ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401

УДК 519.254.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ГАММЕРШТЕЙНА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ДРОБНОГО БЕЛОГО ШУМА

© **Д. В. Иванов**[1], **А. В. Иванов**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Самарский государственный экономический университет»
443090, Российская Федерация, г. Самара, ул. Советской Армии, 141
E-mail: dvi85@list.ru

[2] ФГБОУ ВО «Самарский государственный университет путей сообщения»
443066, Российская Федерация, г. Самара, ул. Свободы, 2 В
E-mail: ivanov2016@list.ru

Аннотация. Предложен алгоритм идентификации нелинейных динамических систем дробного порядка класса Гаммерштейна. Разработанный алгоритм позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров при наличии помехи наблюдения в виде дробного белого шума. Результаты численных экспериментов показали высокую эффективность предложенного алгоритма идентификации по сравнению с методом наименьших квадратов (МНК).

Ключевые слова: разность дробного порядка; дробный белый шум; метод наименьших квадратов (МНК); система класса Гаммерштейна; выходная ошибка

Введение

Дифференциальные и разностные уравнения с производными и разностями дробного порядка находят широкое применение в самых различных физических и технических приложениях: моделирование свойств полимеров [1, 2], диэлектрических материалов [3], электрохимических процессов [4]. Раздел теории управления, связанный с синтезом регуляторов дробного порядка, активно развивается. В связи с этим развитие методов построения математических моделей на основе уравнений с производными и разностями дробного порядка по экспериментальным данным является актуальной задачей.

В настоящее время активно развиваются методы идентификации динамических систем, описываемых уравнениями с производными и разностями дробного порядка [5, 6], а также их рекуррентные модификации [7]. В статье [8] рассмотрена идентификация динамических систем класса Гаммерштейна дробного порядка с известной нелинейной частью общего вида.

В данной статье рассматривается идентификация динамической системы класса Гаммерштейна дробного порядка с неизвестными коэффициентами полиномиальной нелинейности при наличии дробной белошумной помехи.

1. Постановка задачи

Нелинейная динамическая система класса Гаммерштейна описывается стохастическими уравнениями с разностями дробного порядка:

$$\sum_{m=1}^{r_1} b^{(m)} \Delta^{\alpha^{(m)}} z_{i-f_1^{(m)}} = \sum_{m=1}^{r} a^{(m)} \sum_{j=1}^{k} c^{(j)} \Delta^{\beta^{(j)}} x^j_{i-f^{(m)}} + \varsigma_i, y_i = z_i + \Delta^{\gamma}\xi_i, \quad (1)$$

где $0 < \alpha^{(1)} \ldots < \alpha^{(r_1)}$, $0 < \beta^{(1)} \ldots < \beta^{(r)}$,

$\Delta^{\alpha^{(m)}} z_i = \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \alpha^{(m)} \\ j \end{pmatrix} z_{i-j}, \Delta^{\beta^{(m)}} x_i = \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta^{(m)} \\ j \end{pmatrix} x_{i-j},$

$\begin{pmatrix} \alpha^{(m)} \\ j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha^{(m)}+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha^{(m)}-j+1)}, \begin{pmatrix} \beta^{(m)} \\ j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^j \Gamma(\beta^{(m)}+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta^{(m)}-j+1)},$

z_i, y_i – ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные; x_i – наблюдаемая переменная; $\Delta^{\gamma}\xi_i$ – помеха наблюдения в выходном сигнале; ς_i – ошибка в уравнении; $f^{(m)}, f_1^{(m)}$ – неотрицательные значения запаздываний;

Пусть выполнены следующие предположения:

1. Параметры $b^{(m)}$, $a^{(m)}$, $c^{(j)}$ асимптотически устойчивой системы (1) принадлежат компактному множеству.

2. Вектор входных переменных удовлетворяет условию постоянного возбуждения.

3. $\{x_i\}$ статистически не зависят от $\{\xi_i\}$, $\{\varsigma_i\}$;

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов $b^{(m)}$, $a^{(m)}$, $c^{(j)}$ динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям y_i, x_i при известных порядках k, r, r_1, α_m, β_m, γ, $f_1^{(m)}, f^{(m)}$.

2. Алгоритм идентификации

В работе предложено обобщение двухэтапного алгоритма [9] на случай динамических систем класса Гаммерштейна с дробными разностями при наличии дробной белошумной помехи в выходном сигнале:

1. На первом этапе определяются оценки параметров расширенной модели $\hat{\theta}$ (здесь и далее символ ˆ обозначает оценку соответствующей величины),

где $\theta = \left(\theta_b \,\middle|\, \theta_{ac} \right)^T =$

$= \left(b^{(1)} \ldots b^{(r_1)} \,\middle|\, a^{(1)}c^{(1)} \ldots a^{(r)}c^{(1)}, a^{(1)}c^{(2)} \ldots a^{(r)}c^{(2)}, \ldots, a^{(1)}c^{(k)} \ldots a^{(r)}c^{(k)} \right)^T,$

2. На втором этапе с помощью сингулярного разложения (SVD – singular value decomposition) осуществляется разделение параметров $a^{(m)}$, $c^{(j)}$.

Введем обозначения:

$$\varphi_i = \left(\varphi_b^{(i)} \mid \varphi_{ac}^{(i)} \right)^T =$$

$$= \left(\Delta^{\alpha^{(1)}} y_{i-f_1^{(1)}} \ldots \Delta^{\alpha^{(r)}} y_{i-f_1^{(r)}} \mid \Delta^{\beta^{(1)}} x_{i-f^{(1)}} \ldots \Delta^{\beta^{(r_1)}} x_{i-f^{(r_1)}}, \ldots, \Delta^{\beta^{(1)}} x^k_{i-f^{(1)}} \ldots \Delta^{\beta^{(r_1)}} x^k_{i-f^{(r_1)}} \right)^T.$$

При неограничительных условиях на сигнал и независимых помехах можно показать, что оценки, полученные по приведенному ниже критерию, являются сильно состоятельными [8]:

$$\min_{\theta \in \tilde{\mathrm{B}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\varphi_b^{(i)} \theta_b^T - \varphi_{ac}^{(i)} \theta_{ac}^T \right)^2}{\sigma_\varsigma^2 + \theta_b^T H_{\alpha+\gamma} \theta_b^T} \tag{2}$$

где $\sigma_\varsigma^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \varsigma_i^2$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_\xi^{(i)} \left(\varphi_\xi^{(i)} \right)^T \right] = H_{\alpha+\gamma}$,

$\varphi_\xi^{(i)} = \left(\Delta^{\alpha^{(1)}+\gamma} \xi_{i-f_1^{(1)}}, \ldots, \Delta^{\alpha^{(r_1)}+\gamma} \xi_{i-f_1^{(r_1)}} \right)^T$.

Теорема 1. *Пусть некоторый случайный процесс* $\{y_i, i = ...-1, 0, 1, ...\}$ *описывается уравнением* (1) *с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-3. Тогда оценки* $\hat{\theta}$, *определяемые выражением (2) с вероятностью 1 при* $N \to \infty$, *существуют, единственные и являются сильно состоятельными оценками.*

Полученные оценки параметров $\hat{\theta}_{ac}$ запишем в виде матрицы. Для однозначного определения коэффициентов будем полагать, что $a^{(1)} = 1$:

$$\hat{\Theta}_{ac} = \begin{pmatrix} \hat{c}^{(1)} & \ldots & c^{(\hat{k})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}^{(1)} \hat{a}^{(r)} & \ldots & \hat{c}^{(k)} \hat{a}^{(r)} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Сингулярное разложение матрицы $\hat{\Theta}_{ac}$ имеет вид [10]:

$$\hat{\Theta}_{ac} = U \Sigma V^T, \tag{4}$$

где U, V – ортогональные матрицы порядков r и k, соответственно;

Σ – матрица размера $r \times k$ с неотрицательными элементами, у которой элементы, лежащие на главной диагонали, — это сингулярные числа λ_i (а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми).

Оценки параметров могут быть найдены по формулам:

$$\hat{a} = U_{:,1} / U_{1,1}, \hat{c} = \lambda_1 V_{1,:}^T / U_{1,1}, \tag{5}$$

где λ_1 – наибольшее сингулярное число матрицы Σ;

$U_{1,1}$ обозначает первый ненулевой элемент $U_{:,1}$, где $U_{:,1}$ и $V_{1,:}$ обозначают первую строку и столбец соответствующих матриц.

Заключение

В статье предложено обобщение алгоритма идентификации нелинейной динамической системы класса Гаммерштейна [8] на случай дробной белошумной помехи. Тестовые примеры показали, что предложенный алгоритм позволяет получать более точные оценки по сравнению с методом МНК. Дальнейшим направлением исследований является разработка структурно-параметрического метода идентификации [11], позволяющего определять порядки дробных разностей α_m, β_m, γ и обобщение результатов на случай систем, описываемых уравнениями с разностями Гэгенбауэра [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stiassnie M.* On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models // Applied Mathematical Modelling. 1979. Vol. 3. № 4. P. 300-302.

2. *Bagley R.L.* Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J. 1983. Vol. 21. № 5. P. 741-748.

3. *Reyes-Melo M.E., Martinez-Vega J.J., Guerrero-Salazar C.A., Ortiz-Mendez U.* Application of fractional calculus to modeling of relaxation phenomena of organic dielectric materials // Proceedings International Conference Solid Dielectrics (ICSD'04). Toulouse, 2004. Vol. 2. P. 530-533.

4. *Vinagre B.M., Feliu V.* Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures // Proceeding 41-st IEEE Conference Decision Control. Las Vegas, 2002. P. 214-239.

5. *Иванов Д.В.* Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнале // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. Вып. 2 (27). С. 30-38.

6. *Иванов Д.В., Ширинов И.Р.* Идентификация многомерных по входу линейных динамических систем с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1169-1173.

7. *Иванов Д.В., Салугин И.Е.* Рекуррентная идентификация линейных динамических систем с разностями дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1167-1169.

8. *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order Hammerstein systems // 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015. Omsk, 2015. P. 7147074. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147074.

9. *Baia E.W.* An optimal two-stage identification algorithm for Hammerstein–Wiener nonlinear systems // Automatica. 1998. Vol. 34. № 3. P. 333-338.

10. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.

11. *Engelgardt V.V., Ivanov D.V., Katsyuba O.A.* Structural and parametric identification of linear dynamic systems of fractional order with noise on input and output // 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2017. Astana, 2017. P. 7998556. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998556.

12. *Ivanov D.V., Engelgardt V.V., Sandler I.L.* Genetic Algorithm of Structural and Parametric Identification of Gegenbauer Autoregressive with Noise on Output // Procedia Computer Science. 2018. Vol. 131. P. 619-625.

Поступила в редакцию 22 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 20 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Иванов Дмитрий Владимирович, Самарский государственный экономический университет, г. Самара, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, e-mail: dvi85@list.ru

Иванов Александр Владимирович, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, аспирант, кафедра мехатроники, автоматизации и управления на транспорте, e-mail: aivanov2016@list.ru

Для цитирования: *Иванов Д.В., Иванов А.В.* Идентификацикация систем Гаммерштейна дробного порядка с полиномиальной нелинейностью при наличии дробного белого шума // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 395–401. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401

IDENTIFICATION OF HAMMERSTEIN SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER WITH A POLYNOMIAL NONLINEARITY IN THE PRESENCE OF A FRACTIONAL WHITE NOISE

D. V. Ivanov[1], **A. V. Ivanov**[2]

[1] Samara State University of Economics
141 Sovetskoi Armii St., Samara 443090, Russian Federation
E-mail: dvi85@list.ru
[2] Samara State University of Transport
2B Svobody St., Samara 443066, Russian Federation
E-mail: aivanov2016@list.ru

Abstract. An identification algorithm is proposed nonlinear dynamical systems of fractional order of the Hammerstein class. Designed algorithm allows you to get strongly consistent parameter estimates in the presence of observation noise in the form of fractional white noise. The results of numerical experiments showed high efficiency of the proposed identification algorithm in comparison with the least squares method (LS).
Keywords: fractional order difference; fractional white noise; least squares method (LS); the system of a class of Hammerstein; output error

REFERENCES

1. Stiassnie M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models. *Applied Mathematical Modelling*, 1979, vol. 3, no. 4, pp. 300-302.

2. Bagley R.L. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J.*, 1983, vol. 21, no. 5, pp. 741-748.

3. Reyes-Melo M.E., Martinez-Vega J.J., Guerrero-Salazar C.A., Ortiz-Mendez U. Application of fractional calculus to modeling of relaxation phenomena of organic dielectric materials. *Proceedings International Conference Solid Dielectrics (ICSD'04)*. Toulouse, 2004, vol. 2, pp. 530-533.

4. Vinagre B.M., Feliu V. Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures. *Proceeding 41-st IEEE Conference Decision Control*. Las Vegas, 2002, pp. 214-239.

5. Ivanov D.V. Otsenivanie parametrov lineynykh ARX-sistem drobnogo poryadka s pomekhoy nablyudeniya vo vkhodnom signale [Estimation of parameters of linear fractional order ARX systems with noise in the input signal]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2014, no. 2 (27), pp. 30-38. (In Russian).

6. Ivanov D.V., Shirinov I.R. Identifikatsiya mnogomernykh po vkhodu lineynykh dinamicheskikh sistem s raznostyami drobnogo poryadka pri nalichii pomekh nablyudeniy [Identification of miso linear dynamical systems with differences of fractional order in the presence of noise observations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1169-1173. (In Russian).

7. Ivanov D.V., Salugin I.E. Rekurrentnaya identifikatsiya lineynykh dinamicheskikh sistem s raznostyami drobnogo poryadka s pomekhoy v vykhodnom signale [Recursive identification of linear dynamical systems of fractional order with noise output signal]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1167-1169. (In Russian).

8. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order Hammerstein systems. *2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015.* Omsk, 2015, p. 7147074. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147074.

9. Baia E.W. An optimal two-stage identification algorithm for Hammerstein–Wiener nonlinear systems. *Automatica*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 333-338.

10. Golub G., Van Loun Ch. *Matrichnye vychisleniya* [Matrix Computations]. Moscow, Mir Publ., 1999, 548 p. (In Russian).

11. Engelgardt V.V., Ivanov D.V., Katsyuba O.A. Structural and parametric identification of linear dynamic systems of fractional order with noise on input and output. *2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2017.* Astana, 2017, p. 7998556. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998556.

12. Ivanov D.V., Engelgardt V.V., Sandler I.L. Genetic Algorithm of Structural and Parametric Identification of Gegenbauer Autoregressive with Noise on Output. *Procedia Computer Science*, 2018, vol. 131, pp. 619-625.

Received 22 April 2018
Reviewed 20 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Ivanov Dmitriy Vladimirovich, Samara State University of Economics, Samara, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics and Economic and Mathematical Methods Department, e-mail: dvi85@list.ru

Ivanov Alexandr Vladimirovich, Samara State University of Transport, Samara, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Mechatronics Department, e-mail: aivanov2016@list.ru

For citation: Ivanov D.V., Ivanov A.V. Identifikacikaciya sistem Gammershtejna drobnogo poryadka s polinomialnoj nelinejnostyu pri nalichii drobnogo belogo shuma [Identification of Hammerstein systems of fractional order with a polynomial nonlinearity in the presence of a fractional white noise]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 395–401. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401 (In Russian, Abstr. in Engl.).