ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302
УДК 517.911,517.968

О РАЗРЕШИМОСТИ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© **А. А. Григоренко**

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: g.anya@mail.ru

Аннотация. Получено утверждение о существовании решений возмущенного включения и об оценке их близости к наперед заданной непрерывной функции.
Ключевые слова: возмущенное включение; оценка близости решений к наперед заданным функциям

Введение

Работа посвящена исследованию так называемого «возмущенного включения», правая часть которого состоит из алгебраической суммы значений компактнозначного многозначного отображения и отображения, не обладающего свойством замкнутости значений. К таким включениям сводятся краевые задачи для функционально-дифференциальных включений, функционально-дифференциальные системы управления. В статье доказана теорема существования и получены оценки близости решений к наперед заданным функциям. Отметим, что этот результат дает не только условия существования решения возмущенного включения, но и способ нахождения приближенного решения путем подбора соответствующей функции, а также оценку погрешности этого решения.

1. Основные понятия

Пусть X - банахово пространство с нормой $||\cdot||_X$. Обозначим $\mathrm{comp}[X]$ - множество всех непустых компактов пространства пространства X, $\rho_X[\cdot,\cdot]$ — расстояние от точки до множества, $h_X[\cdot,\cdot]$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами. Пусть $\mathbb{R}^n$ — арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$, если $A \subset \mathbb{R}^n$, то $||A|| = \sup\{|a| : a \in A\}$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — измеримое по Лебегу множество. Обозначим: $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|\,ds$; $\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ — множество всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ — пространство непрерывных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00553).

функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\mathbf{C}^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$; $\mathbf{C}^1_+[a,b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a,b]$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ — многозначные операторы, $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ — линейный непрерывный интегральный оператор, определенный равенством

$$(Vz)\,(t) = \int\limits_a^b V(t,s)z(s)ds, \qquad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Включение (1) назовем **возмущенным включением.**

Под **решением включения** (1) будем понимать элемент $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Пусть $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$ и $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = r_0 + Vw_0 + e, \tag{3}$$

где $e = q_0 - r_0 - Vw_0$. Предположим, что функция $k \in \mathbf{L}^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q_0)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{4}$$

а непрерывная функция $\nu : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)|k(s)ds + |e(t)|, \tag{5}$$

где $|V(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), $e \in \mathbf{C}^n[a,b]$ – функция в правой части равенства (3).

Определим отображение отображение $Z : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ соотношением

$$(Zx)(t) = |x(t)|.$$

Будем говорить, что отображения $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством A**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие следующим условиям:

• для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняются неравенства

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|\Gamma Z(x-y)\|_{\mathbf{L}^1(U)}, \tag{6}$$

$$h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(x),\Psi(y)] \leqslant P\left(Z(x-y)\right); \tag{7}$$

• для определенной соотношением (5) функции $\nu \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ и непрерывного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенного равенством

$$\left(\mathcal{A}z\right)(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)|(\Gamma z)(s)ds + P(z),$$

ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i\nu, \;\; \mathcal{A}^0\nu = \nu, \;\; \mathcal{A}^i\nu = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\nu\right), \;\; i = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$.

Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (8), то есть

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i\nu. \tag{9}$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$, $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством (3). Далее, пусть отображения* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством A. Тогда найдется решение* x *включения (1), то есть* $x = v + Vz$, $v \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$, *которое следующие оценки:*

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t) \text{ при любом } t \in [a,b]; \tag{10}$$

$$\|v - r_0\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant P(\xi(\nu)); \tag{11}$$

$$|z(t) - w_0(t)| \leqslant k(t) + (\Gamma\xi(\nu))(t) \text{ при почти всех } t \in [a,b]; \tag{12}$$

где ν, ξ, P, Γ, k *удовлетворяют соотношениям (5), (9), (7), (6), (4), соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$ представима в виде (3) и пусть функция $w_1 \in \Phi(q_0)$ для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет равенству

$$\|w_1 - w_0\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0, \Phi(q_0)].$$

Тогда в силу неравенства (4) при почти всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка

$$|w_1(t) - w_0(t)| \leqslant k(t). \tag{13}$$

Далее, пусть

$$q_1 = r_1 + Vw_1,$$

где $r_1 \equiv r_0$. Тогда согласно (13) для любого $t \in [a,b]$ получаем соотношения

$$|q_1(t) - q_0(t)| = |V(w_1 - w_0)(t) - e(t)| \leqslant |V(w_1 - w_0)(t)| + |e(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b |V(t,s)||w_1(s)-w_0(s)|ds+|e(t)| \leqslant \int\limits_a^b |V(t,s)|k(s)ds+|e(t)|.$$

Таким образом, для любого $t\in[a,b]$ выполняется оценка:

$$|q_1(t)-q_0(t)| \leqslant (\mathcal{A}^0\nu)(t). \tag{14}$$

Предположим, что функция $r_2\in\Psi(q_1)$ удовлетворяет равенству

$$||r_2-r_1||_{\mathbf{C}^n[a,b]}=\rho_{\mathbf{C}^n[a,b]}[r_1,\Psi(q_1)].$$

Тогда в силу (7) имеют место неравенства

$$||r_2-r_1||_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(q_0);\Psi(q_1)] \leqslant P(Z(q_0-q_1)) \leqslant P(\mathcal{A}^0\nu).$$

Пусть для функции $w_2\in\Phi(q_1)$ и любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ справедливо соотношение

$$||w_2-w_1||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}=\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_1,\Phi(q_1)].$$

Из определения функции w_2 и неравенств (6), (14) для любого измеримого $\mathcal{U}\subset[a,b]$ вытекают оценки

$$||w_2-w_1||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(q_0);\Phi(q_1)] \leqslant ||\Gamma Z(q_0-q_1)||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \leqslant ||\Gamma\mathcal{A}^0\nu||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}.$$

Пусть

$$q_2=r_2+Vw_2.$$

Тогда для любого $t\in[a,b]$ имеют место соотношения

$$|q_2(t)-q_1(t)|=|r_2(t)+(Vw_2)(t)-r_1(t)-(Vw_1)(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |r_2(t)-r_1(t)|+|V(w_2-w_1)(t)| \leqslant P(\mathcal{A}^0\nu)+\int\limits_a^b |V(t,s)||w_2(s)-w_1(s)|\,ds.$$

Таким образом, при всех $t\in[a,b]$ справедлива оценка

$$|q_2(t)-q_1(t)| \leqslant (\mathcal{A}\nu)(t). \tag{15}$$

Пусть $r_3\in\Psi(q_2)$ удовлетворяет равенству

$$||r_3-r_2||_{\mathbf{C}^n[a,b]}=\rho_{\mathbf{C}^n[a,b]}[r_2,\Psi(q_2)].$$

Тогда из соотношений (7), (15) получаем неравенства

$$||r_3-r_2||_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(q_1);\Psi(q_2)] \leqslant P(Z(q_1-q_2)) \leqslant P(\mathcal{A}\nu). \tag{16}$$

Далее, пусть $w_3\in\Phi(q_2)$ для любого измеримого $\mathcal{U}\subset[a,b]$ удовлетворяет равенству

$$||w_3-w_2||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}=\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_2,\Phi(q_2)].$$

Из соотношений (6), (15) вытекают оценки

$$||w_3 - w_2||_{L^n(\mathcal{U})} \leqslant h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(q_1); \Phi(q_2)] \leqslant$$

$$\leq ||\Gamma Z(q_1 - q_2)||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \leq ||\Gamma \mathcal{A}\nu||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \tag{17}$$

Теперь пусть

$$q_3 = r_3 + V w_3.$$

Тогда из (16), (17) для любого $t \in [a, b]$ получаем неравенства

$$|q_3(t) - q_2(t)| \leqslant |r_3(t) - r_2(t)| + |V(w_3 - w_2)(t)| \leq$$

$$\leqslant P(\mathcal{A}\nu) + \int\limits_a^b |V(t,s)|(\Gamma \mathcal{A}\nu)(s)\, ds.$$

Таким образом, для любого $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|q_3(t) - q_2(t)| \leqslant (\mathcal{A}^2\nu)(t). \tag{18}$$

Наконец, пусть для $r_4 \in \Psi(q_3)$ имеет место равенство

$$||r_4 - r_3||_{\mathbf{C}^n[a,b]} = \rho_{\mathbf{C}^n[a,b]}[r_3, \Psi(q_3)].$$

Тогда из (18) вытекают соотношения

$$||r_4 - r_3||_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(q_2); \Psi(q_3)] \leqslant P(Z(q_2 - q_3)) \leqslant P(\mathcal{A}^2\nu).$$

Пусть $w_4 \in \Phi(q_3)$ – такая функция, что для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется равенство

$$||w_4 - w_3||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_3, \Psi(q_3)].$$

Из определения функции w_4 и из соотношений (6), (18) для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ вытекают оценки

$$||w_4 - w_3||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(q_2); \Phi(q_3)] \leqslant$$

$$\leq ||\Gamma(Z(q_2 - q_3))||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \leqslant ||\Gamma(\mathcal{A}^2\nu)||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}.$$

Далее, пусть

$$q_4 = r_4 + V w_4.$$

Тогда для любого $t \in [a, b]$ имеют место неравенства

$$|q_4(t) - q_3(t)| \leqslant |r_4(t) - r_3(t)| + |V(w_4 - w_3)(t)| \leqslant$$

$$\leqslant P(\mathcal{A}^2\nu) + \int\limits_a^b |V(t,s)|(\Gamma \mathcal{A}^2\nu)(s)\, ds = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2\nu)(t) = (\mathcal{A}^3\nu)(t).$$

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательности $\{q_i\}$, $\{r_i\}$ и $\{w_i\}$ такие, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$q_i = r_i + V w_i, \tag{19}$$

где $r_i \in \Psi(q_{i-1})$, $w_i \in \Phi(q_{i-1})$, причем имеют место следующие соотношения:

$$|q_i(t) - q_{i-1}(t)| \leqslant (\mathcal{A}^{i-1}\nu)(t), \tag{20}$$

$$||r_i - r_{i-1}||_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant P(\mathcal{A}^{i-2}\nu) \tag{21}$$

и при почти всех $t \in [a, b]$

$$|w_i(t) - w_{i-1}(t)| \leqslant (\Gamma\mathcal{A}^{i-2}\nu)(t). \tag{22}$$

Покажем, что последовательность $\{q_i\}$ сходится. Действительно, согласно неравенству (20) для любых $j = 0, 1 \ldots,$ $i = 1, 2 \ldots$ и $t \in [a, b]$ получаем оценку

$$|q_{j+i}(t) - q_j(t)| \leqslant |q_{j+i}(t) - q_{j+i-1}(t)| + |q_{j+i-1}(t) - q_{j+i-2}(t)| + \cdots +$$

$$+|q_{j+1}(t) - q_j(t)| \leqslant (\mathcal{A}^{j+i-1}\nu)(t) + (\mathcal{A}^{j+i-2}\nu)(t) + \cdots + (\mathcal{A}^{j}\nu)(t).$$

Таким образом, для любых $j = 0, 1, \ldots,$ $i = 1, 2, \ldots$ и при любом $t \in [a, b]$ выполняются соотношения

$$|q_{j+i}(t) - q_j(t)| \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} (\mathcal{A}^{k}\nu)(t). \tag{23}$$

Из сходимости ряда (8) следует, что последовательности $\{q_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{C}^n[a, b]$, поэтому последовательность $\{q_i\}$ сходится. Пусть

$$x = \lim_{i\to\infty} q_i.$$

Докажем, что x удовлетворяет теореме. Покажем, что для x справедливо неравенство (10). Пусть в неравенстве (23) $j = 0$. Тогда, учитывая, что $\xi(\nu) \in \mathbf{C}^1[a, b]$ – сумма ряда (8), при любом $t \in [a, b]$ получим оценку

$$|q_i(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$ в этом соотношении, получим неравенство (10). Докажем далее сходимость последовательности $\{r_i\}$. Так как при $t \in [a, b]$ и любых $i, j = 1, 2 \ldots$ выполняются соотношения

$$|r_{j+i}(t) - r_j(t)| \leqslant |r_{j+i}(t) - r_{j+i-1}(t)| + |r_{j+i-1}(t) - r_{j+i-2}(t)| + \cdots +$$

$$+|r_{j+1}(t) - r_j(t)|,$$

то, согласно (21) справедлива оценка

$$||r_{j+i} - r_j||_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant P(\sum_{k=j-1}^{\infty} \mathcal{A}^{k}\nu). \tag{24}$$

Отсюда и из сходимости ряда (8) вытекает, что последовательность $\{r_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$. Пусть

$$v = \lim_{i\to\infty} r_i.$$

Приняв в соотношении (24) $j=1$ и переходя к пределу при $i\to\infty$, при этом учитывая, что $r_1\equiv r_0$, получим, что v удовлетворяет неравенству (11).

Наконец, рассмотрим последовательность $\{w_i\}$. Докажем ее сходимость. В самом деле, для любых $j=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots$ и при почти всех $t\in[a,b]$ имеет место соотношение

$$|w_{j+i}(t)-w_j(t)|\leqslant |w_{j+i}(t)-w_{j+i-1}(t)|+|w_{j+i-1}(t)-w_{j+i-2}(t)|+\cdots+$$

$$+|w_{j+1}(t)-w_j(t)|$$

Поэтому из (22) следует, что при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется оценка

$$|w_{j+i}(t)-w_j(t)|\leqslant \Gamma(\sum_{k=j-1}^{\infty}\mathcal{A}^k\nu)(t). \tag{25}$$

Следовательно, последовательность $\{w_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$. Пусть

$$z=\lim_{i\to\infty} w_i.$$

Покажем, что при почти всех $t\in[a,b]$ z удовлетворяет соотношению (12). Действительно, так как при почти всех $t\in[a,b]$ и любом $i=1,2,\ldots$ выполняется оценка

$$|w_{i+1}(t)-w_0(t)|\leqslant|w_{i+1}(t)-w_1(t)|+|w_1(t)-w_0(t)|,$$

то из (25) для любого $i=1,2,\ldots$ и при почти всех $t\in[a,b]$ имеем неравенство

$$|w_{i+1}(t)-w_0(t)|\leqslant\Gamma(\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{A}^k\nu)(t)+|w_1(t)-w_0(t)|.$$

Переходя к пределу в последнем соотношении при $i\to\infty$ и учитывая (9), (5), при почти всех $t\in[a,b]$ получим оценку (12). Далее, переходя в равенстве (19) к пределу при $i\to\infty$, получим равенство

$$x=v+Vz,$$

причем из непрерывности по Хаусдорфу отображений $\Psi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ вытекают включения $v\in\Psi(x)$ и $z\in\Phi(x)$, то есть x – решение включения (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что теорема 1 дополняет результат работы [1], в которой аналогичные оценки получены в случае выпуклозначности отображения $\Psi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$. При этом в [1] доказательство этих оценок основывалось на теореме Майкла [2], с помощью которой доказывалось существование в некотором смысле «минимальной» непрерывной ветви $g:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ отображения

$\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, а также с помощью результата работы [3–5]. Отметим, что предложенную в работе [1] схему в доказательстве теоремы 1 применить невозможно, поскольку теорема 1 не предполагает, что отображение $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$ выпуклозначно.

Замечание 2. Отметим, что теорема 1 не является непосредственным следствием принципа сжимающих отображений [6], поскольку оператор, порожденный правой частью включения (1), не является замкнутозначным. Это доказывает следующий пример. Пусть отображение $\Phi : \mathbf{C}^1[0,1] \to \Pi[\mathbf{L}^1[0,1]]$ задано равенством

$$\Phi(x) = \{y \in \mathbf{L}^1[0,1] : y(t) \in \{-1,1\} \text{ при п.в. } t \in [0,1]\},$$

а оператор $V : \mathbf{L}^1[0,1] \to \mathbf{C}^1[0,1]$ имеет вид

$$(Vz)(t) = \int_0^t z(s)\,ds.$$

Определим последовательность измеримых функций $y_m : [0,1] \to \mathbb{R}$, $m = 1,2,\ldots$ следующим образом

$$y_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0,1/2), \\ -1, & \text{если } t \in [1/2,1], \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0,1/4), \\ -1, & \text{если } t \in [1/4,1/2), \\ 1, & \text{если } t \in [1/2,3/4), \\ -1, & \text{если } t \in [3/4,1], \end{cases}$$

и так далее. Из определения последовательности $y_m : [0,1] \to R$, $m = 1,2,\ldots$ следует, что $Vy_m \to 0$ в пространстве $\mathbf{C}^1[0,1]$ при $m \to \infty$. В то же время $0 \notin V\Phi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 6. С. 3-32.

2. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Известия вузов. Математика. 1999. № 3. С. 3-16.

3. *Булгаков А.И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371-379.

4. *Булгаков А.И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. II // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 4. С. 566-571.

5. *Булгаков А.И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. III // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 739-746.

6. *Булгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А.* Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1587-1598.

Поступила в редакцию 26 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.

Григоренко Анна Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: g.anya@mail.ru

Для цитирования: *Григоренко А.А.* О разрешимости и оценках решений возмущенного включения в пространстве непрерывных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 292–302. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302

ON THE SOLVABILITY AND ESTIMATES OF SOLUTIONS OF A PERTURBED INCLUSION IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

A. A. Grigorenko

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: g.anya@mail.ru

Abstract. In this paper we consider the assertion on the estimate of the closeness of the solution of a perturbed inclusion to a preassigned continuous function, and the proof of this assertion is given.
Keywords: perturbed inclusion; estimation of the proximity of solutions to previously given functions

REFERENCES

1. Bulgakov A.I., Tkach L.I. Vozmushchenie vypukloznachnogo operatora mnogoznachnym otobrazheniem tipa Gammershteyna s nevypuklymi obrazami i kraevye zadachi dlya funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniy [Perturbation of a convex-valued operator by a set-valued map of Hammerstein type with non-convex values, and boundary-value problems for functional-differential inclusions]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 6, pp. 3-32. (In Russian).

2. Bulgakov A.I., Tkach L.I. Vozmushchenie odnoznachnogo operatora mnogoznachnym otobrazheniem tipa Gammershteyna s nevypuklymi obrazami [Perturbation of a single-valued operator by a multi-valued mapping of Hammerstein type with nonconvex images]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1999, no. 3, pp. 3-16. (In Russian).

3. Bulgakov A.I. Nepreryvnye vetvi mnogoznachnykh otobrazheniy i integral'nye vklyucheniya s nevypuklymi obrazami i ikh prilozheniya. I [Continuons branches of multivalued mappings and integral inclusions with nonconvex images and their applications. I]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 371-379. (In Russian).

4. Bulgakov A.I. Nepreryvnye vetvi mnogoznachnykh otobrazheniy i integral'nye vklyucheniya s nevypuklymi obrazami i ikh prilozheniya. II [Continuons branches of multivalued mappings and integral inclusions with nonconvex images and their applications. II]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 4, pp. 566-571. (In Russian).

5. Bulgakov A.I. Nepreryvnye vetvi mnogoznachnykh otobrazheniy i integral'nye vklyucheniya s nevypuklymi obrazami i ikh prilozheniya. III [Continuons branches of multivalued mappings and integral inclusions with nonconvex images and their applications. III]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 739-746. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-01-00553).

6. Bulgakov A.I., Efremov A.A., Panasenko E.A. Obyknovennye differentsial'nye vklyucheniya s vnutrennimi i vneshnimi vozmushcheniyami [Ordinary diffrential inclusions with internal and external perturbations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 12, pp. 1587-1598. (In Russian).

Received 26 March 2018
Reviewed 24 April 2018
Accepted for press 5 June 2018

Grigorenko Anna Alexandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: g.anya@mail.ru

For citation: Grigorenko A.A. O razreshimosti i ocenkah resheniy vozmushchennogo vklyucheniya v prostranstve nepreryvnyh funkciy [On the solvability and estimates of solutions of a perturbed inclusion in the space of continuous functions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 292-302. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302 (In Russian, Abstr. in Engl.).