

© Арутюнов А.А., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-305-317

УДК 517.28+512.552+512.548.4



О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах

Андроник Арамович АРУТЮНОВ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141701, Российская Федерация, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Аннотация. Работа посвящена обзору известных результатов, связанных с исследованиями дифференцирований в групповых алгебрах, бимодулях и других алгебраических структурах, а также различным обобщениям и вариациям данной задачи. Дается обзор результатов, посвященных дифференцированиям в алгебрах $L_1(G)$, в алгебрах фон Ноймана и в банаховых бимодулях. Обсуждаются алгебраические задачи, в частности дифференцирования в группах, (σ, τ) -дифференцирования и исчисление Фокса. Также дается обзор некоторых результатов связанных с приложением к псевдодифференциальным операторам и построению символического исчисления. В заключении описываются некоторые результаты, связанные с описанием дифференцирований, как характеров на группоиде присоединенного действия. Описаны также некоторые приложения: к теории кодирования, теории концов метрических пространств и грубой геометрии.

Ключевые слова: дифференцирования, операторные алгебры, групповые алгебры, (σ, τ) -дифференцирования, алгебры фон Ноймана, банаховы бимодули

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание № 075-00337-20-03), проект № 0714-2020-0005.

Для цитирования: Арутюнов А.А. О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 305–317. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-305-317.

On derivations in group algebras and other algebraic structures

Andronick A. ARUTYUNOV

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
Moscow Institute of Physics and Technology

9 Institutskii Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141700, Russian Federation

Abstract. The work is devoted to a survey of known results related to the study of derivations in group algebras, bimodules and other algebraic structures, as well as to various generalizations and variations of this problem. A review of results on derivations in $L_1(G)$ algebras, in von Neumann algebras, and in Banach bimodules is given. Algebraic problems are discussed, in particular, derivations in groups, (σ, τ) -derivations, and the Fox calculus. A review of some results related to the application to pseudodifferential operators and the construction of the symbolic calculus is also given. In conclusion, some results related to the description of derivations as characters on the groupoid of the adjoint action are described. Some applications are also described: to coding theory, the theory of ends of metric spaces, and rough geometry.

Keywords: derivations, operator algebras, group algebras, (σ, τ) -derivations, von Neumann algebras, Banach bimodules

Acknowledgements: The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Assignment No. 075-00337-20-03), Project No. 0714-2020-0005.

Mathematics Subject Classification: 16W25, 47B47, 46L10, 16S34.

For citation: Arutyunov A.A. O differentsirovaniyakh v gruppovykh algebrakh i drugikh algebraicheskikh strukturakh [On derivations in group algebras and other algebraic structures]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 305–317. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-305-317. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть имеем ассоциативную алгебру A (пока без дополнительного оснащения) над кольцом R . В самом общем виде нас интересует описание пространства дифференцирований, то есть линейных операторов, удовлетворяющих правилу Лейбница.

О п р е д е л е н и е 0.1. Линейный оператор $d : A \rightarrow A$ назовем дифференцированием, если для всех $u, v \in A$ выполнено правило Лейбница

$$d(uv) = d(u)v + ud(v). \quad (0.1)$$

Преимущественно мы будем рассматривать частный случай групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ для произвольной конечнопорожденной группы G .

О п р е д е л е н и е 0.2. Назовем групповой алгеброй $\mathbb{C}[G]$ пространство конечных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, где λ_g — комплексные коэффициенты.

Одним из важнейших примеров дифференцирований являются внутренние, а именно

О п р е д е л е н и е 0.3. Для $a \in A$ линейный оператор d_a задаваемый формулой

$$d_a : x \mapsto ax - xa$$

назовем внутренним дифференцированием.

Пространство внутренних дифференцирований образует идеал в алгебре всех дифференцирований. Соответственно фактор алгебры по внутренним обычно называют алгеброй внешних дифференцирований.

Краеугольным вопросом является следующий

Проблема 1 (The derivation problem). *Верно ли что все дифференцирования в данной алгебре внутренние?*

Частным случаем данного вопроса является следующий, поставленный В. Johnson

Проблема 2. *Верно ли что все дифференцирования в $L_1(G)$ — внутренние?*

Изучение данной проблемы ставит также ряд дополнительных вопросов. Прежде всего масштабирование предложенного метода на другие классы ассоциативных алгебр, при этом дифференцирования вообще говоря не образуют алгебру, только бимодуль.

Истоки задачи

Само по себе понятие дифференцирования является одним из базовых понятий математики. Не углубляясь в богатую историю развития математического анализа, отметим, что ключевую роль в исследовании различных структур, обладающих некоторой дополнительной алгебраической структурой, будь то структура бимодуля, кольца или группы, ключевую роль играет знаменитое правило Лейбница

$$d(fg) = d(f)g + fd(g).$$

В отличие от классических задач анализа и дифференциальной геометрии, в которых мы имеем непрерывную структуру и можем понимать дифференцирование как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при работе с алгебрами и модулями такое определение не годится, и именно правило Лейбница становится необходимым требованием в определении дифференцирования.

При этом, как мы увидим ниже, само по себе правило Лейбница различными путями может модифицироваться и пониматься разными способами. Это касается и смысла умножения в слагаемых правой части, и «подкручивания» (twisting), т. е. оснащения дополнительными эндоморфизмами слагаемых. Однако, общая индуктивная структура правила сводящего вычисление $d(fg)$ к вычислению значения дифференцирования на сомножителях — всегда легко угадывается.

По всей видимости первое упоминание банаховых алгебр (названных тогда линейным метрическим кольцом) — работа 1936 года [1]. Там же впервые рассмотрено и понятие дифференцирования. Систематическое изучение общей теории банаховых алгебр было начато в 1941 году в работе И. М. Гельфанда [2], а в 1943 в [3] была доказана знаменитая теорема Гельфанда–Наймарка.

Дифференцирования в банаховых алгебрах

В послевоенные годы вырос интерес к дифференцированиям в банаховых алгебрах. Так, в работе [4] И. Капланский, исследуя автоморфизмы в банаховых алгебрах, приходит к необходимости изучения дифференцирования AW^* алгебр (частный случай C^* алгебр, введенный ранее им же в [5]) и показывает, что все они внутренние ([4], Theorem 9). Это позволяет доказать основной результат (теорема 10), что автоморфизмы некоторых банаховых алгебр, сохраняющих центральные элементы, также будут внутренними. Там же ставится другой вопрос, называемый «проблемой Капланского», о том, обязаны ли дифференцирования C^* алгебр быть непрерывными. Ответ на данный вопрос — положительный, и был получен в работе С. Сакаи [6]. Далее этот вопрос развивался в работах как самого С. Сакаи [7–9] так и в статьях других исследователей, например [10–12]. Примеры C^* алгебр в которых есть внешние дифференцирования были получены в [13].

Об отмеченной И. Капланским связи между дифференцированиями и автоморфизмами см. также [14, 15]. Отмечались и некоторые приложения, в частности к теории динамических систем [16].

Среди дальнейших результатов в этом направлении отметим работы Р. Кадисона [4, 17] и его совместные работы с Дж. Рингроузом [18, 19], в которых было продолжено исследование дифференцирований в C^* алгебрах, в т. ч. и действующих на гильбертовом пространстве, понимаемом как модуль над алгеброй.

Особое значение играл поиск условий, при которых все дифференцирования оказываются внутренними. Для групповых алгебр основной вопрос т. н. *derivation problem* формулируется следующим образом: «При каких условиях все производные в групповой алгебре являются внутренними?».

Большой вклад в исследование этого вопроса для случая алгебры $L_1(G)$ внес Б. Джонсон, и часто вопрос наличия дифференцирований, не являющихся внутренними, называют *Проблемой Джонсона*. Так, в совместной работе с Дж. Рингроузом [20] было получено простое доказательство тривиальности дифференцирований в алгебрах фон Ноймана (ранее аналогичные результаты получил Сакаи в [6]), а также для $\ell_1(G)$. Многие результаты собраны в монографии [21].

Самому Б. Джонсону удалось найти ответ на данный вопрос и для некоторых других случаев, связанных с групповой алгеброй $L_1(G)$. В таком случае проблема Джонсона играет принципиальную роль для исследований в теории меры и гармоническом анализе, теории операторов, операторных алгебр и когомологических конструкций [22, во-

прос 5.6.B, с. 746]. В работе [23] им была решена указанная проблема для случая связных локально компактных групп. Наиболее полный результат был получен в [24], где упоминалось, что все дифференцирования в $L_1(G)$ являются внутренними.

В отмеченном случае алгебр фон Ноймана некоторые результаты были получены Б. Джонсоном с С. Пэрротом [25], а также заметно усилены С. Поупом в [26]. Итоговый результат (теорема Джонсона–Пэррота–Поупа) состоит в том, что все дифференцирования из алгебры фон Ноймана со значениями в пространстве компактных операторов над гильбертовым пространством — внутренние. Некоторые современные результаты получены, например в [27], наиболее полное изложение см. в [28]. Позднее в [29] был изучен и более общий случай полупростых алгебр фон Ноймана.

Задача вычисления гомологий банаховых алгебр была одной из важных мотивировок в изучении структуры дифференцирований. Отметим две важные монографии, в которых собраны достаточно полные обзоры соответствующих результатов [30, 31]. Важно отметить роль изучения дифференцирований для когомологий Хохшильда. Сам комплекс был предложен Г. Хохшильдом в [32], как инструмент для изучения свойств алгебры. Один из знаковых результатов — теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга из [33], устанавливающая изоморфизм между, собственно, комплексом Хохшильда и производного пространства петель. О некоторых других приложениях комплекса Хохшильда см. [34].

С точки зрения исследования дифференцирований поясним, что дифференцирования соответствуют 1-коциклам комплекса Хохшильда, внутренние дифференцирования — 1-кограницам, а внешние дифференцирования, соответственно, являются одномерными когомологиями. Формула для вычисления гомологий и когомологий была получена в [35] для групповых алгебр. Из недавних отметим результаты А. С. Мищенко [36–38], в которых построены новые формулы для вычисления гомологий и когомологий.

Другим свежим направлением развития данной тематики является исследование униформных алгебр Роу и в целом развитие инструментария комплексов Хохшильда (и, в частности, дифференцирований, как 1-коциклов) на грубую геометрию. Так, в работе [39] было показано, что все ограниченные дифференцирования равномерной алгебры Роу над дискретным метрическим пространством ограниченной геометрии — будут внутренними. Существенным развитием этих результатов является работа [40] в которой вычисляются ограниченные когомологии Хохшильда равномерной алгебры Роу со значениями в униформных бимодулях Роу для дискретных метрических пространств.

Алгебраические дифференцирования

Большая часть упомянутых выше работ относится к исследованию банаховых алгебр и вообще к случаю, когда алгебра имеет некое топологическое оснащение. При этом, как несложно видеть, для «лобовой» проверки правила Лейбница достаточно иметь только алгебраическую структуру.

По всей видимости впервые чисто алгебраические дифференцирования и алгебраический аналог проблемы Джонсона, был исследован М. Смит в [41]. Среди дальнейших работ отметим [42], в которой изучался случай колец с целочисленными коэффициентами. Последнее обусловлено прикладными задачами, в частности криптографические. В частности применения дифференцирований к кодам Рида–Соломона, было исследовано в [43, 44].

Дальнейшее исследование дифференцирований в кольцах было связано с рассмотрением различных вариантов колец. Причем особый интерес представляет случай конечных колец. Так, в [45], рассмотрены групповые алгебры с коэффициентами в конечном кольце R , при этом на группу налагаются определенные требования (группа должна быть черниковской). Исследуются R -дифференцирования, т. е. такие дифференцирования δ , что $\delta(R) = 0$. Авторами доказывается, что все R -дифференцирования будут внутренними. Другие обобщенные варианты обобщенных дифференцирований рассматриваются например в [46].

Естественным обобщением являются т. н. (σ, τ) -дифференцирования. То есть дифференцирования, удовлетворяющие «подкрученному» правилу Лейбница

$$d(uv) = d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v), \quad u, v \in R.$$

Здесь R — некоторое унитарное кольцо, и σ, τ — его эндоморфизмы. Важным частным случаем этой общей конструкции являются (σ, id) -дифференцирования, также называемые σ -дифференцированиями. При этом сама структура таких (σ, τ) -дифференцирований достаточно сложная, в частности они вообще говоря не обладают структурой алгебры Ли или аналогичной. Даже проверка того, что в случае конечной группы все дифференцирования будут внутренними — оказывается уже нетривиальным (см. [47]).

Конструкция «подкрученных» дифференцирований возникла в связи с исследованиями расширений Оре, предложенных в [48]. Общая теория, в частности связь с теорией Галуа, изложена в [49]. Также отметим монографии [50–52], и записки лекций [53, 54].

Расширением Оре полиномиального кольца называют некоммутативное кольцо $R[x; \sigma, \delta]$ косых многочленов (skew-polynomial ring), определяемое эндоморфизмом кольца σ и соответствующем ему σ -дифференцированием δ , в котором выполнено соотношение

$$xr = \sigma(r)x + \delta(r).$$

Многие свойства, касающиеся размерностей и строения модулей, были получены в [55]. Косые полиномы находят многочисленные приложения в квантовом исчислении [56, 57], для поиска право-инвариантных полиномов и классов сопряженности [58], для исследования деформаций алгебр Ли [59] и матричных алгебр [60]. Находят свои приложения данная конструкция и в некоммутативной геометрии [61, 62], в частности для описания некоммутативных нетеровых колец [63]. Отметим также приложения к теории кодирования [64].

Одной из мотивировок исследования «подкрученных» дифференцирований является исследование Quasi-Hom-Lie алгебр, обобщающих алгебры Витта и алгебры Вирасо. Данный тип алгебр отличается от обычных алгебр Ли тем, что вместо классического тождества Якоби они удовлетворяют более общему правилу. Их описание оказывается тесно связанным с σ -дифференцированиями. Фактически они ими и описываются (см. [65, теорема 2]).

Сами (σ, τ) -дифференцирования также возникают при исследовании деформаций алгебр [60, 66, 67]. И при изучении полиномов Лорана на групповой алгебре [68]. Дальнейшее развитие связано как с упомянутыми приложениями в квантовой теории, так и с обобщениями в анализе. В частности изучался вопрос описания (σ, τ) -дифференцирований в алгебрах фон Ноймана [69].

Говоря об алгебраической задаче, нельзя не упомянуть также производные Фокса (the Fox derivative), предложенные в контексте изучения свободных групп Р. Фоксом в серии работ [70–74]. Рассматривается следующая конструкция. Пусть $F = \langle X \rangle$ — свободная группа, $\mathbb{Z}F$ — целочисленная групповая алгебра (т. е. коэффициенты — кольцо целых чисел). Тогда для каждого $x \in X$ производной Фокса называют линейный оператор $D_x : \mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}F$ такой, что для $u, v \in \mathbb{Z}F$ значение $D_x(1) = 0$, справедливо свойство $D_x(y) = \delta_{xy}$ для $y \in X$, где δ_{xy} — символ Кронекера, а также выполнен следующий аналог правила Лейбница

$$D_x(uv) = D_x(u) \cdot v + u \cdot D_x(v).$$

Сам Р. Фокс применил такое исчисление среди прочего к исследованию групп узлов, групповым когомологиям и многим другим задачам. Из недавних исследований отметим работу [75] в которой исчисление Фокса применяется для изучения квази Пуассоновых структур на представлениях поверхностей.

Операторное исчисление

Исследования рядов Лорана также указывают на еще один важный аспект приложения дифференцирований в алгебрах. В работе А. Н. Паршина [76] предложена следующая конструкция. Пусть d — дифференцирование некоторого кольца R . Тогда левый модуль формальных выражений $L = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i d^i$ можно понимать как аналог алгебры псевдодифференциальных операторов. Дальнейшее развитие логики исследования операторных алгебр приводит нас к теории Шура–Сато. Наиболее полное и современное исследование см. в работе А. Жеглова [77].

Отметим также, что сходные идеи описания псевдодифференциальных операторов как некоммутативных степенных рядов, в которых в качестве переменных подставляются операторы дифференцирования, были ранее предложены в [78]. В частности, изучался формализм т. н. μ -исчисления и соответствующих μ -алгебр.

Теория псевдодифференциальных операторов достаточно полно изложена в [79]. Одним из самых ярких результатов является теорема Атьи–Зингера представленная в работах [80, 81].

Исследование данной задачи связано с изучением операторных алгебр, которые порождаются дифференцированиями. Одним из возникающих вопросов является выяснение условий, при которых оператор нильпотентен. В одной из первых работ по данной теме [82] была исследована связь локальной нильпотентности внутреннего дифференцирования (т. е. того, что внутреннее дифференцирование обнуляется в некоторой степени) и нильпотентности резольвенты, т. е. элемента вида $(a - \lambda)$. Эти результаты были усилены в работах В. Харченко. В частности в [83] было показано, что все дифференцирования для простых колец нулевой характеристики внутренние. Это позволило (с учетом результатов из работы [82]) доказать, что все нильпотентные дифференцирования простых колец внутренние, и порождаются нильпотентными элементами. Такие результаты, характеризующие нильпотентные дифференцирования в дальнейшем многократно обобщались и усиливались.

Так, в работе [84] были получены обобщения для случая полупростых колец конечной характеристики. Более общие результаты были получены в работе [85], в которой были исследованы более общие варианты полупростых колец.

Важной вариацией данной задачи является случай локально нильпотентных дифференцирований, т. е. таких, что для каждого элемента кольца $a \in R$ найдется такое n , что $d^n(a) = 0$. Исследование таких операторов оказывается связанным со знаменитой проблемой якобиана (см. [86]) и 14-й проблемой Гильберта. Подробнее см. работы М. Нагато, который построил контрпример к 14-й проблеме Гильберта в [87], а также более подробный разбор контекста данной задачи в [88]. В [89] было получено описание локально нильпотентных дифференцирований для коммутативных редуцированных колец без $\mathbb{Z}$ -кручения. Из последних результатов отметим [90], в которой исследуются ядра локально нильпотентных дифференцирований и исследуются их приложения.

Отметим проблему коммутации дифференцирований (*the Commuting Derivations Conjecture*), состоящую в предположении о том, что пересечение ядер коммутирующих линейно независимых локально нильпотентных дифференцирований изоморфно пространству полиномов $C[f]$, где f – координата. В случае пары дифференцирований данная проблема была частично решена С. Маубахом в [91]. Предложенное решение было обобщено на случай большего числа дифференцирований в [92].

Комбинаторный подход

В работах [93, 94] был предложен метод исследования дифференцирований в групповых алгебрах при помощи характеров на группоиде присоединенного действия. Было построено описание алгебры дифференцирований для нильпотентных групп ранга 2 и, в частности, для групп Гейзенберга. В дальнейшем эти результаты были развиты на случай полугрупповых алгебр (см. [95]). Было построено описание алгебры внешних дифференцирований в терминах 2-характеров на 2-группоиде и получено описание соответствующего комплекса для n -категорий.

Суть метода состоит в том, что дифференцирования отождествляются с локально финитными характерами на группоиде присоединенного действия Γ . То есть с функциями $\chi : \text{Hom}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ такими, что сохраняется операция композиции $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$. В таком случае оказывается справедливым следующее утверждение [95, теорема 1]. Имеется взаимнооднозначное соответствие между дифференцированиями в групповой алгебре и локально финитными характерами, причем справедлива формула

$$d(a) = a \left(\sum_{t \in G} \chi(at, a) \right), \quad a \in G \subset \mathbb{C}[G].$$

Оказывается, что помимо идеала внутренних дифференцирований, есть содержащий его идеал квазивнутренних дифференцирований. Это дифференцирования, которые в смысле последней формулы задаются характерами тривиальными на эндоморфизмах. Данная конструкция была предложена в [96, теорема 4.1].

Развитие этих результатов дало и лучшее понимание того, как устроены дифференцирования в банаховых бимодулях, а также получены результаты по нильпотентности. Интересно, что помимо связи с классами сопряженности (которая в целом ясна из строения комплекса Хохшильда, о котором говорилось выше) — возникла связь и с другими комбинаторными свойствами группы. В частности с числом концов.

Техника работы с характерами позволяет работать не только с алгебраическими задачами, но и с аналитическими. В частности упомянутую выше проблему Джонсона можно

решить для чрезвычайно широкого класса бимодулей над групповыми кольцами: а именно, для замыкания группового кольца по норме, подчиненной супремумной. В частности такой будет естественная ℓ_p норма. В таком случае удастся доказать, что все дифференцирования обязаны быть квазивнутренними. Соответствующие результаты получены в [97].

Данные результаты находятся в контексте изучения псевдодифференциальных операторов на евклидовых пространствах и вычисления их индекса, начатого в работах [98, 99] и развитого в [100]. Пользуясь идеями [76] и операторным методом, который был предложен в [78], возникает следующая конструкция для псевдодифференциальных операторов на групповой алгебре. Рассмотрим полиномы Лорана, в которых в качестве переменной подставляется оператор дифференцирования. Комбинаторный подход позволяет строить явные формулы для операторов дифференцирования, а также и для обратных к ним, что делает задачу построения символов таких операторов и вычисления обратных к ним (параметрикса) корректной и обозримой. С точки зрения дальнейшего развития возникает вопрос построения теории эллиптических операторов, а также вычисления индекса для таких операторов.

References

- [1] M. Nagumo, “Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen”, *Japan J. Math.*, **13** (1936), 61–80.
- [2] I. Gelfand, “Normierte Ringe”, *Матем. сб.*, **9(51)**:1 (1941), 3–24.
- [3] I. Gelfand, M. Neumark, “On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space”, *Матем. сб.*, **12(54)**:2 (1943), 197–217.
- [4] I. Kaplansky, “Modules over operator algebras”, *Amer. J. Math.*, **75**:4 (1953), 839–858.
- [5] I. Kaplansky, “Projections in banach algebras”, *Annals of Mathematics*, **53**:2 (1950), 235–249.
- [6] S. Sakai, “On a conjecture of Kaplansky”, *Tohoku Math. J.*, **12**:2 (1960), 31–33.
- [7] S. Sakai, “Derivations of W^* -algebras”, *Annals of Mathematics*, **83**:2 (1966), 273–279.
- [8] S. Sakai, “Derivations of simple C^* -algebras”, *J. Functional Analysis*, **2**:2 (1968), 202–206.
- [9] S. Sakai, *C^* -algebras and W^* -algebras*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1998.
- [10] C. A. Akemann, G. A. Elliott, G. K. Pedersen, J. Tomiyama, “Derivations and multipliers of C^* -algebras”, *Amer. J. Math.*, **98**:3 (1976), 679–708.
- [11] C. A. Akemann, G. K. Pedersen, “Central sequences and inner derivations of separable C^* -algebras”, *Amer. J. Math.*, **101** (1979), 1047–1061.
- [12] B. E. Johnson, A. M. Sinclair, “Continuity of derivations and a problem of Kaplansky”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1067–1073.
- [13] G. A. Elliott, “Some C^* -algebras with outer derivations, III”, *Annals of Mathematics*, **106** (1977), 121–143.
- [14] *C^* -Algebras and Their Automorphism Groups*. V. 14, ed. G. K. Pedersen, Academic Press, 1979.
- [15] I. Kaplansky, “Derivations of Banach Algebras”, *Seminars on Analytic Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.: Seminar V. Analytic functions as related to Banach algebras*, **II**, 1958, 254–258.
- [16] S. Sakai, *Operator Algebras in Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1991.
- [17] R. V. Kadison, “Derivations of operator algebras”, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 280–293.
- [18] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, “Derivations of operator group algebras”, *Amer. J. Math.*, **88**:3 (1966), 562–576.
- [19] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, “Derivations and automorphisms of operator algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **4** (1967), 32–63.

- [20] B. E. Johnson, J. R. Ringrose, “Derivations of operator algebras and discrete group algebras”, *Bull. London Math. Soc.*, **1** (1969), 70–74.
- [21] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, **127**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1972.
- [22] H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, London Mathematical Society Monographs, **24**, Oxford University Press, New York, 2000, 928 pp.
- [23] B. E. Johnson, “The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups”, *Journal of the London Mathematical Society*, **63**:2 (2001), 441–452.
- [24] V. Losert, “The derivation problem for group algebras”, *Annals of Mathematics*, **168**:1 (2008), 221–246.
- [25] B. E. Johnson, S. Parrott, “Operators commuting with a von Neumann algebras modulo the set of compact operators”, *Journal of Functional Analysis*, **11** (1972), 39–61.
- [26] S. Popa, “The commutant modulo the set of compact operators of a von Neumann algebra”, *Journal of Functional Analysis*, **71** (1987), 393–408.
- [27] A. Ber, J. Huang, G. Letvina, F. Sukochev, “Derivations with values in ideals of semifinite von Neumann algebras”, *Journal of Functional Analysis*, **272**:12 (2017), 4984–4997.
- [28] J. Huang, *Derivations with values into ideals of a semifinite von Neumann algebra*, Australia’s Global University, School of Mathematics and Statistics Faculty of Science, 2019, <http://hdl.handle.net/1959.4/63344>.
- [29] A. Ber, J. Huang, K. Kudaybergenov, F. Sukochev, “Non-existence of translation-invariant derivations on algebras of measurable functions”, *Quaestiones Mathematicae*, **45**:10 (2022).
- [30] A. Ya. Helemskii, *The Homology of Banach and Topological Algebras*, Mathematics and its Applications, **41**, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1989.
- [31] A. Ya. Helemskii, *Banach and Locally Convex Algebras*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1993.
- [32] G. Hochschild, “On the cohomology groups of an associative algebra”, *Annals of Mathematics*, **46**:1 (1945), 58–67.
- [33] G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg, “Differential forms on regular affine algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102**:3 (1962), 383–408.
- [34] S. Witherspoon, *An Introduction to Hochschild Cohomology*, Texas AM University, 2017.
- [35] D. Burghlea, “The cyclic homology of the group rings”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **60** (1985), 354–365.
- [36] A. S. Mischenko, “Derivations of group algebras and Hochschild cohomology”, 2020, <http://arxiv.org/abs/1811.02439>.
- [37] A. S. Mischenko, “Geometric description of the Hochschild Cohomology of group algebras”, *Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin Memorial*, Contemporary Mathematics, **772**, AMS, Providence, R.I., etc., United States, 2021, 267–279.
- [38] A. S. Mischenko, “Description of outer derivations of the group algebras”, *Topology and its Applications*, **275** (2020), 107013.
- [39] M. Lorentz, R. Willett, “Bounded derivations on uniform Roe algebras”, *Rocky Mountain J. Math.*, **50** (2020), 1747–1758.
- [40] V. Manuilov, “On Hochschild homology of uniform Roe algebras with coefficients in uniform Roe bimodules”, <https://arxiv.org/abs/2201.06488>.
- [41] M. K. Smith, “Derivations of group algebras of finitely-generated, torsion-free, nilpotent groups”, *Houston J. Math.*, **4** (1978), 277–288.
- [42] E. Spiegel, “Derivations of integral group rings”, *Communications in Algebra*, **22**:8 (1994), 2955–2959.
- [43] D. Boucher, D. Ulmer, “Linear codes using skew polynomials with automorphisms and derivations”, *Des. Codes Cryptogr.*, **70** (2014), 405–431.
- [44] L. Creedon, K. Hughes, “Derivations on group algebras with coding theory applications”, *Finite Fields and Their Applications*, **56** (2019), 247–265.
- [45] O. D. Artemovych, V. A. Bovdi, M. A. Salim, “Derivations of group rings”, 2020, <https://arxiv.org/abs/2003.01346>.

- [46] Y. Rao, S. Kosari, A. Khan, N. Abbasizadeh, “A Study on special kinds of derivations in ordered hyperrings”, *Symmetry*, **14** (2022), 2205.
- [47] D. Chaudhuri, “ (σ, τ) -derivations of group rings”, *Comm. Algebra*, **47**:9 (2019), 3800–3807.
- [48] O. Ore, “Theory of non-commutative polynomials”, *Ann. Math.*, **34** (1933), 480–508.
- [49] V. K. Kharchenko, *Automorphisms and Derivations of Associative Rings*, Mathematics and its Applications, **69**, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1991.
- [50] F. A. Berezin, *Introduction to Algebra and Analysis with Anticommuting Variables*, Moscow University Press, Moscow, 1983.
- [51] L. A. Bokut, I. V. Lvov, V. K. Kharchenko, “Noncommutative Rings”, *Algebra – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **18**, VINITI, Moscow, 1988, 5–116.
- [52] P. M. Cohn, *Difference Algebra*, Interscience Publ., New York, 1965.
- [53] P. M. Cohn, *Skew Fields Constructions*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **27**, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
- [54] K. R. Goodearl, R. B. Warfield, Jr, *An Introduction to Non-Commutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society Student Texts, **16**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [55] D. A. Jordan, “Iterated skew polynomial rings and quantum groups”, *Journal of Algebra*, **156** (1993), 194–218.
- [56] V. Kac, P. Cheung, *Quantum Calculus*, Universitext (UTX), Springer, New York, 2002.
- [57] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**, 1st ed., Springer-Verlag, New York, 1995.
- [58] T. Y. Lam, A. Leroy, “Algebraic conjugacy classes and skew polynomial rings”, *Perspectives in Ring Theory*, NATO ASI Series, **233**, eds. F. van Oystaeyen, L. Le Bruyn, Springer, Dordrecht, 1988, 153–203.
- [59] J. T. Hartwig, D. Larsson, S. D. Silvestrov, “Deformations of Lie algebras using σ -derivations”, *Journal of Algebra*, **295**:2 (2006), 314–361.
- [60] D. Larsson, S. D. Silvestrov, “Quasi-deformations of $sl_2(\mathbb{F})$ using twisted derivations”, *Comm. Algebra*, **35**:12 (2007), 4303–4318.
- [61] Yu. I. Manin, *Topics in Non-Commutative Geometry*, Porter Lectures, Princeton University Press, 1991.
- [62] L. R. Rosenberg, *Noncommutative Algebraic Geometry and Representations of Quantized Algebras*, Mathematics and Its Applications, **330**, Springer, Dordrecht, 1995.
- [63] J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Graduate Studies in Mathematics, **30**, Amer. Math. Society, Providence, Rhode Island, 1987.
- [64] Heide Gluesing-Luerssen, “Skew-Polynomial Rings and Skew-Cyclic Codes”, 2019, <https://arxiv.org/abs/1902.03516>.
- [65] D. Larsson, S. D. Silvestrov, “Quasi-hom-Lie algebras, central extensions and 2-cocycle-like identities”, *Journal of Algebra*, **288**:2 (2005), 321–344.
- [66] O. Elchinger, K. Lundengard, A. Makhlof, S. D. Silvestrov, “Brackets with (τ, σ) -derivations and (p, q) -deformations of Witt and Virasoro algebras”, *Forum Math.*, **28**:4 (2016), 657–673.
- [67] G. Song, C. Xia, “Simple deformed Witt algebras”, *Algebra Colloquium*, **18**:3 (2011), 533–540.
- [68] G. Song, Y. Wu, B. Xin, “The σ -derivations of $C[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ ”, *Algebra Colloquium*, **22**:2 (2015), 251–258.
- [69] E. Gordji, “A characterization of (σ, τ) -derivations on von Neumann algebras”, *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, **73** (2009).
- [70] R. H. Fox, “Free differential calculus. I: Derivation in the free group ring”, *The Annals of Mathematics*, **57**:3 (1953), 547–560.
- [71] R. H. Fox, “Free differential calculus. II: The isomorphism problem of groups”, *The Annals of Mathematics*, **59**:2 (1954), 196–210.
- [72] R. H. Fox, “Free differential calculus III. Subgroups”, *The Annals of Mathematics*, **64**:3 (1956), 407–419.
- [73] K. T. Chen, R. H. Fox, R. C. Lyndon, “Free differential calculus IV. The quotient groups of the lower central series”, *The Annals of Mathematics*, **68**:1 (1958), 81–95.

- [74] R. H. Fox, “Free differential calculus V. The Alexander matrices re-examined”, *The Annals of Mathematics*, **71**:3 (1960), 408–422.
- [75] G. Massuyeau, V. Turaev, “Quasi-Poisson structures on representation spaces of surfaces”, 2012, <https://arxiv.org/abs/1205.4898>.
- [76] А. Н. Паршин, “О кольце формальных псевдодифференциальных операторов”, *Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **224**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 1999, 291–305; англ. пер.: A. N. Parshin, “On a ring of formal pseudodifferential operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **224** (1999), 266–280.
- [77] A. Zheglov, “Schur-Sato theory for quasi-elliptic rings”, 2022, <https://arxiv.org/abs/2205.06790>.
- [78] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973. [V. P. Maslov, *Operator Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian)].
- [79] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Добросвет, Москва. [M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Dobrosvet Publ., Moscow (In Russian)].
- [80] M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The index of elliptic operators on compact manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**:3 (1963), 422–433.
- [81] M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The index of elliptic operators I”, *Annals of Mathematics*, **87**:3 (1968), 484–530.
- [82] I. N. Herstein, “Sui commutatori degli anelli semplici”, *Seminario Mat. e. Fis. di Milano*, **33** (1963), 80–86.
- [83] V. K. Kharchenko, “Differential identities of prime rings”, *Algebra and Logic*, **17** (1978), 155–168.
- [84] P. Grzeszczuk, “On nilpotent derivations of semiprime rings”, *Journal of Algebra*, **149** (1992), 313–321.
- [85] C. Chen-Lian, L. Tsiu-Kwen, “Nilpotent derivations”, *Journal of Algebra*, **287**:2 (2005), 381–401.
- [86] D. Wright, “On the Jacobian Conjecture”, *Illinois J. Math.*, **25** (1981), 423–440.
- [87] M. Nagata, “On the fourteenth problem of Hilbert”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Cambridge University Press., Edinburgh, 1958, 459–462.
- [88] M. Nagata, *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert*, **31**, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, Bombay, 1965, 65 pp.
- [89] M. Ferrero, Y. Lequain, A. Nowicki, “A note on locally nilpotent derivations”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **79** (1992), 45–50.
- [90] D. Daigle, “Locally nilpotent derivations and the structure of rings”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224**:4 (2020), 106–201.
- [91] S. Maubach, “The commuting derivations conjecture”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **179**:1–2 (2003), 159–168.
- [92] Jiantao Li, Xiankun Du, “Pairwise commuting derivations of polynomial rings”, *Linear Algebra and its Applications*, **436**:7, 2375–2379.
- [93] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, А. И. Штерн, “Деривации групповых алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:6 (2016), 65–78; англ. пер.: A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, A. I. Shtern, “Derivations of group algebras”, *Journal of Mathematical Sciences*, **248** (2020), 709–718.
- [94] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр”, *Матем. сб.*, **210**:6 (2019), 3–29; англ. пер.: A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “A smooth version of Johnson’s problem on derivations of group algebras”, *Sb. Math.*, **210**:6 (2019), 756–782.
- [95] А. А. Арутюнов, “Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **308**, МИАН, М., 2020, 28–41; англ. пер.: A. A. Arutyunov, “Derivation algebra in noncommutative group algebras”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **308** (2020), 22–34.
- [96] A. A. Arutyunov, A. V. Alekseev, “Cohomology of n -categories and derivations in group algebras”, *Topology and its Applications*, **275** (2019).
- [97] A. Arutyunov, “A combinatorial view on derivations in bimodules”, 2022, <https://arxiv.org/abs/2208.05478>.

- [98] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности”, *Матем. заметки*, **94**:4 (2013), 488–505; англ. пер.: A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “Reduction of the calculus of pseudodifferential operators on a noncompact manifold to the calculus on a compact manifold of doubled dimension”, *Math. Notes*, **94**:4 (2013), 455–469.
- [99] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Редукция ПДО исчисления на некомпактном многообразии к компактному многообразию удвоенной размерности”, *Доклад. РАН*, **451**:4 (2013), 369–373; англ. пер.: A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “Reduction of PDO calculus on a noncompact manifold to a double-dimensional compact manifold”, *Doklady Mathematics*, **88**:1 (2013), 427–430.
- [100] А. А. Арутюнов, “Редукция нелокальных псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к классическим псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности”, *Матем. заметки*, **97**:4 (2015), 493–502; англ. пер.: A. A. Arutyunov, “Reduction of nonlocal pseudodifferential operators on a noncompact manifold to classical pseudodifferential operators on a double-dimensional compact manifold”, *Math. Notes*, **97**:4 (2015), 502–509.

Информация об авторе

Арутюнов Андроник Арамович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва; доцент кафедры высшей математики. Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6878-0993>

Поступила в редакцию 02.09.2022 г.
Поступила после рецензирования 09.11.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Andronick A. Arutyunov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Reg., Russian Federation. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6878-0993>

Received 02.09.2022
Reviewed 09.11.2022
Accepted for press 24.11.2022