Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-85-99
УДК 517.956.27

О единственности решения обратной задачи атмосферного электричества

Андрей Владимирович ЧЕРНОВ
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24

On the uniqueness of solution to the inverse problem of the atmospheric electricity

Andrei V. CHERNOV
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod 603950, Russian Federation
Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev
24 Minin St., Nizhni Novgorod 603950, Russian Federation

Аннотация. Исследуется обратная задача определения двух неизвестных числовых параметров, входящих линейно и нелинейно в старший коэффициент линейного эллиптического уравнения второго порядка типа диффузии-реакции в области Ω, диффеоморфной шаровому слою, при специальных краевых условиях, по наблюдению в окрестностях соответствующего количества точек. Для аналогичной обратной задачи при краевых условиях Дирихле автором в свое время были получены достаточные условия единственности решения, но они носили абстрактный характер, в силу чего были неудобны для практического использования. В данной статье эти условия распространяются на случай иных краевых условий и конкретизируются для случая старшего коэффициента экспоненциального вида. Исследуемая обратная задача имеет непосредственное отношение к изучению электрических процессов в атмосфере Земли в условиях глобальной электрической цепи в стационарном приближении и вытекает из потребностей восстановления неизвестного старшего коэффициента уравнения на основе данных наблюдений, полученных с двух локальных датчиков.

Ключевые слова: обратная параметрическая задача; старший коэффициент; линейное эллиптическое уравнение второго порядка; краевая задача в шаровом слое

Для цитирования: *Чернов А.В.* О единственности решения обратной задачи атмосферного электричества // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 85–99. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-85-99.

Abstract. We investigate the inverse problem of determination of two unknown numerical parameters occuring linearly and nonlinearly in the higher coefficient of a linear second order elliptic equation of the diffusion–reaction type in a domain Ω diffeomorphic to a ball layer under special boundary conditions by observation in neighborhoods of the correspondent amount of points. For an analogous inverse problem under Dirichlet boundary conditions, sufficient conditions of solution uniqueness was obtained by the author formerly, but they had an abstract character and so were inconvenient for practical usage. In the paper, these conditions are extended to the case of different boundary conditions and rendered concrete for the case of the exponential type higher coefficient. The inverse problem investigated in the paper refers to research of electric processes in the Earth atmosphere in the frame of global electric circuit in the stationary approximation and arises from needs of recovering the unknown higher coefficient of the equation on the base of observation data obtained from two local transmitters.

Keywords: inverse parametric problem; higher coefficient; second order linear elliptic equation; boundary value problem in a ball layer

For citation: Chernov A.V. O edinstvennosti resheniya obratnoy zadachi atmosfernogo elektrichestva [On the uniqueness of solution to an inverse problem of the atmospheric electricity]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 85–99. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-85-99. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследуется обратная задача определения двух неизвестных числовых параметров, входящих линейно и нелинейно в старший коэффициент линейного эллиптического уравнения второго порядка типа диффузии-реакции в области Ω, диффеоморфной шаровому слою, при специальных краевых условиях, по наблюдению в окрестностях соответствующего количества точек. Краевая задача, о которой идет речь, возникает как стационарная модель при изучении электрических процессов, протекающих в атмосфере. О моделях глобальной электрической цепи и их корректности см. [1, 2] для нестационарного случая ([1] соответствует нашему способу выбора краевых условий; в [2] рассматриваются различные альтернативные постановки) и [3] для стационарного (при альтернативном выборе краевых условий). Область Ω ассоциируется с атмосферой Земли.

Указанная выше обратная задача вытекает из потребностей восстановления неизвестного старшего коэффициента уравнения на основе данных наблюдений, полученных с двух локальных датчиков; аналогичная задача (при краевых условиях Дирихле) изучалась в [4], где были получены некоторые общие условия единственности решения. К сожалению, указанные условия имели несколько абстрактный вид, поскольку никак не использовали специфику конкретной формы представления коэффициента, и, вследствие этого, не удобны для непосредственного использования и, очевидно, нуждаются в соответствующей конкретизации. Именно проблеме этой конкретизации для старшего коэффициента экспоненциального вида и посвящена данная статья. Упомянутый экспоненциальный вид имеет реальную физическую подоплеку, см. [3]. Проблема единственности решения обратной задачи здесь очень важна с физической точки зрения, так как требуется однозначно установить истинные, реальные значения неизвестных параметров в то время, как существование решения естественно ожидать из физических соображений.

Проблема однозначного определения старшего коэффициента эллиптических уравнений по данным наблюдений того или иного типа уже достаточно давно привлекает внимание исследователей. См. на этот счет краткий обзор в [4].

Физические механизмы формирования *глобальной электрической цепи* (ГЭЦ) излагаются в [5]. Достижения и перспективы исследований ГЭЦ обсуждаются в [6]. Модели ГЭЦ, учитывающие топографию земной поверхности, конструируются в [7,8]. Стационарная и нестационарная модели ГЭЦ с учетом грозовых облаков как генераторов электрического поля атмосферы, различных космических факторов, аэрозольных частиц и радиоактивных веществ, подробно изучаются в [9, 10]. В [11] исследуется электрическое поле и ток внутри и около стационарной мезомасштабной конвективной системы и ее вклад в ГЭЦ. В [12] предлагается схема моделирования ГЭЦ, собирающая эффекты от тропосферы до ионосферы, изучавшиеся ранее по отдельности, в единую модель. В [13] разрабатывается эффективная численная модель, основанная на методе обобщенных конечных разностей с применением радиальных базисных функций для симуляции ГЭЦ в атмосфере Земли с учетом топографии земной поверхности. В приведенных здесь источниках см. также дополнительную библиографию.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 1 приводится общая постановка прямой и обратной задачи, а также основные обозначения и соглашения. Раздел 2 содержит формулировку основных результатов. В разделе 3 обосновывается корректность используемого нами понятия обобщенного решения прямой задачи. Раздел 4 содержит некоторые общие признаки единственности решения обратной задачи, никак не использующие конкретный вид старшего коэффициента. В разделе 5 проводится доказательство основного результата на базе теоремы 4.2 раздела 4, которая в свою очередь является переформулировкой [4, теорема 5].

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, диффеоморфная шаровому слою; $\vec{J}^{\text{ст}} \in L_2^3(\Omega)$ — заданная вектор-функция. С физической точки зрения, Ω — атмосфера Земли, $\vec{J}^{\text{ст}}$ — вектор сторонних электрических токов. Через $L_\infty^+(\Omega)$ будем обозначать класс всех неотрицательных функций из $L_\infty(\Omega)$; для $n \in \mathbb{N}$ обозначаем $\mathbb{R}_+^n$ — множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами. Далее, пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ — заданное ограниченное множество неизвестных параметров υ, подлежащих определению; $\gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ – заданная непрерывная функция; $\Lambda \subset \Omega$ — заданная область (с физической точки зрения представляющая, например, грозовое облако); $\sigma = \sigma[\upsilon] \in L_\infty^+(\Omega)$ — старший коэффициент, содержащий набор параметров $\upsilon \in \mathcal{D}$, подлежащих определению. Далее мы везде считаем, что всюду в области Ω выполняется неравенство:

$$0 < \sigma_* \le \sigma[\upsilon](x) \le \sigma^* \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \quad \forall \upsilon \in \mathcal{D}.$$

Кроме того, мы предполагаем, что в области Λ справедливо представление

$$\sigma[\upsilon](x) = \upsilon_1 \exp\big\{\upsilon_2 \gamma(x)\big\}.$$

При определенных условиях можно считать, что скалярная функция $\varphi(x)$, представляющая потенциал электрического поля в области Ω, в стационарном режиме подчиняется дифференциальному уравнению типа диффузии-реакции вида

$$\operatorname{div}\big(\sigma[\upsilon](x)\nabla\varphi(x)\big) = \operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}(x),\ x \in \Omega,\ \upsilon \in \mathcal{D}; \tag{1.1}$$

и краевым условиям

$$\varphi\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi\Big|_{\Gamma_2} = C; \tag{1.2}$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} \left\{ \sigma[v]\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} - \vec{J}^{\,\text{ст}}_{\vec{n}} \right\} d\ell = 0. \tag{1.3}$$

Здесь Γ_1 — внешняя часть, а Γ_2 — внутренняя часть границы области Ω; C — нефиксированная константа, характеризующая средневзвешенный фоновый показатель электрического потенциала; $\vec{n}(x)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_2, $\vec{J}^{\,\text{ст}}_{\vec{n}} = \vec{J}^{\,\text{ст}}_{\vec{n}} \cdot \vec{n}$ — нормальная составляющая вектора $\vec{J}^{\,\text{ст}}$.

Прежде чем дать понятие обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), проведем некоторые формальные преобразования (то есть предполагая, что участвующие в них функции являются достаточно гладкими). Обозначим Ω_i — область, ограниченная поверхностью Γ_i, $i \in \{1,2\}$. Для скалярной функции ψ и вектор-функции $\vec{g}$ непосредственно из формулы Остроградского–Гаусса получаем:

$$\int\limits_{\Omega_i} \operatorname{div}(\psi\vec{g})\,dx = \int\limits_{\Gamma_i} \psi\vec{g}\cdot\vec{n}\,d\ell.$$

Здесь точка $\cdot$ означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$. С другой стороны,

$$\operatorname{div}(\psi\vec{g}) = \nabla\psi\cdot\vec{g} + \psi\cdot\operatorname{div}\vec{g}.$$

Таким образом, приходим к формуле интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\Omega_i} \psi\operatorname{div}\vec{g}\,dx = \int\limits_{\Gamma_i} \psi\vec{g}\cdot\vec{n}\,d\ell - \int\limits_{\Omega_i} \vec{g}\cdot\nabla\psi\,dx.$$

Пользуясь теперь этой формулой, получаем:

$$\int\limits_{\Omega} \psi\operatorname{div}\vec{g}\,dx = \int\limits_{\Omega_2} \psi\operatorname{div}\vec{g}\,dx - \int\limits_{\Omega_1} \psi\operatorname{div}\vec{g}\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \vec{g}\cdot\nabla\psi\,dx + \int\limits_{\Gamma_2} \psi\vec{g}\cdot\vec{n}\,d\ell - \int\limits_{\Gamma_1} \psi\vec{g}\cdot\vec{n}\,d\ell.$$

Если теперь ψ удовлетворяет условиям (1.2), то ясно, что

$$\int\limits_{\Omega} \psi\operatorname{div}\vec{g}\,dx = -\int\limits_{\Omega} \vec{g}\cdot\nabla\psi\,dx + C\int\limits_{\Gamma_2} \vec{g}\cdot\vec{n}\,d\ell.$$

Таким образом, тождество

$$\int\limits_{\Omega} \psi\operatorname{div}(\sigma\nabla\varphi)\,dx = \int\limits_{\Omega} \psi\operatorname{div}\vec{J}^{\,\text{ст}}\,dx$$

можно переписать в виде:

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx = \int_{\Omega} \vec{J}^{\text{ст}} \cdot \nabla\psi \, dx + C \int_{\Gamma_2} \left(\sigma\nabla\varphi - \vec{J}^{\text{ст}}\right) \cdot \vec{n} \, d\ell.$$

Используя теперь условия (1.3), то же самое можем конкретизировать следующим образом:

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx = \int_{\Omega} \vec{J}^{\text{ст}} \cdot \nabla\psi \, dx.$$

Сделаем некоторые важные замечания. Обозначим

$$V(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \exists C \in \mathbb{R} : \; \psi\Big|_{\Gamma_1} = 0, \; \psi\Big|_{\Gamma_2} = C \right\}.$$

В работе [1] было показано, что множество $V(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением вида

$$(\varphi, \psi)_{V(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x) \, dx.$$

Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию $\varphi \in V(\Omega)$, удовлетворяющую для всех $\psi \in V(\Omega)$ интегральному тождеству.

$$B\{\upsilon\}[\varphi, \psi] = \mathcal{F}[\psi], \tag{1.4}$$

где приняты обозначения

$$B\{\upsilon\}[\varphi, \psi] \equiv \int_{\Omega} \sigma[\upsilon](x) \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x) \, dx, \; \mathcal{F}[\psi] \equiv \int_{\Omega} \vec{J}^{\text{ст}}(x) \cdot \nabla\psi(x) \, dx.$$

Корректность такого определения устанавливается в разделе 3. А именно, основываясь на теореме Лакса–Мильграма, доказывается, что для всех $\upsilon \in \mathcal{D}$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение $\varphi = \varphi[\upsilon] \in V(\Omega)$.

Далее будем считать, что заданы некоторые непересекающиеся подобласти $\Lambda_j \subset \Lambda$, $j = 1, 2$, и на каждой из них фиксируется наблюдение $\varphi = \overline{\varphi}(x)$. Решается следующая обратная задача: по данным наблюдений $\varphi = \varphi[\upsilon](x) = \overline{\varphi}(x)$, $x \in \Lambda_j$, $j = 1, 2$, восстановить значения неизвестных параметров $\upsilon \in \mathcal{D}$. Существование решения ожидается, исходя из физических соображений. Требуется установить единственность решения обратной задачи.

2. Формулировка основных результатов

Теорема 2.1. *Пусть на каждой из областей Λ_j, $j = 1, 2$, выполняются следующие условия.*

1. *Функция $\gamma(x)$ имеет градиент $\nabla\gamma \in L_2^3(\Lambda_j)$ и не обращается в ноль.*

2. *Функция $\overline{\varphi}(x)$ имеет лапласиан $\Delta\overline{\varphi} \in L_2(\Lambda_j)$.*

3. *Для любых* $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $\xi_2 \neq \eta_2$, *система из десяти функций*

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\{\upsilon_2\gamma(x)\}, \quad \Delta\overline{\varphi}(x)\gamma(x)\exp\{\upsilon_2\gamma(x)\},$$

$$A[\overline{\varphi},\upsilon](x), \quad \gamma(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x), \quad \gamma^2(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x),$$

где

$$A[\overline{\varphi},\upsilon](x) \equiv \big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\exp\{\upsilon_2\gamma(x)\},$$

при $\upsilon = \xi$ *(пять функций),* $\upsilon = \eta$ *(еще пять функций) линейно независима.*

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы 2.1 см. в разделе 5.

Теорема 2.2. *Пусть на каждой из областей* Λ_j, $j = 1, 2$, *выполняются следующие условия.*

1. *Функция* $\gamma(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\gamma \in \big[\mathbf{C}(\Lambda_j)\big]^3$ *и не обращается в ноль.*

2. *Функция* $\overline{\varphi}(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\overline{\varphi} \in \big[\mathbf{C}(\Lambda_j)\big]^3$ *и лапласиан* $\Delta\overline{\varphi} \in \mathbf{C}(\Lambda_j)$.

3. *Существует набор точек* $x_{j,i} \in \Lambda_j$, $i = \overline{1,6}$, *расположенных на различных поверхностях уровня функции* $\gamma(x)$, *для которого выполняется по крайней мере одно из двух:*
   a) $\Delta\overline{\varphi}(x_{j,i}) \neq 0$, $\big(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\big)(x_{j,i}) = 0$, $i = \overline{1,6}$,
   или наоборот,
   b) $\Delta\overline{\varphi} \not\equiv 0$, $\Delta\overline{\varphi}(x_{j,i}) = 0$, $\big(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\big)(x_{j,i}) \neq 0$, $i = \overline{1,6}$.

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы 2.2 см. в разделе 5.

Следствие 2.1. *Пусть на каждой из областей* Λ_j, $j = 1, 2$, *выполняются следующие условия.*

1. *Функция* $\gamma(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\gamma \in \big[\mathbf{C}(\Lambda_j)\big]^3$ *и не обращается в ноль.*

2. *Функция* $\overline{\varphi}(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\overline{\varphi} \in \big[\mathbf{C}(\Lambda_j)\big]^3$ *и лапласиан* $\Delta\overline{\varphi} \in \mathbf{C}(\Lambda_j)$.

3. *Существует непрерывная кривая* $\ell_j \subset \Lambda_j$, *вдоль которой функция* $\gamma(x)$ *не является постоянной и выполняется по крайней мере одно из двух: a)* $\Delta\overline{\varphi} \neq 0$, $\big(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\big) = 0$, *или наоборот, b)* $\Delta\overline{\varphi} = 0$, $\big(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\big) \neq 0$, *при том, что* $\Delta\overline{\varphi} \not\equiv 0$ *на* $\Lambda_j \setminus \ell_j$.

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

3. Корректность понятия обобщенного решения краевой задачи

Докажем, используя стандартную схему, что задача (1.1)–(1.3) имеет единственное обобщенное решение $\varphi \in V(\Omega)$ в смысле интегрального тождества (1.4).

Следующее утверждение известно как теорема Лакса–Мильграма, см., например, [14, § 5.8, теорема 5.8, с.84].

Лемма 3.1. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство; $B : H \times H \to \mathbb{R}$ — билинейная форма, которая является ограниченной и коэрцитивной, то есть существуют константы γ_1, $\gamma_2 > 0$ такие, что*

$$\big|B[\varphi,\psi]\big| \le \gamma_2\|\varphi\|\,\|\psi\|, \quad B(\varphi,\varphi) \ge \gamma_1\|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi,\psi \in H.$$

Тогда для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $\varphi \in H$ такой, что $B[\varphi,\cdot] = f$.

Очевидно, что формула $\mathcal{F}[\psi]$ определяет линейный функционал $\mathcal{F} : V(\Omega) \to \mathbb{R}$. Функционал $\mathcal{F}$ является ограниченным. Действительно, согласно неравенству Гельдера, для всякого $\psi \in V(\Omega)$ имеем:

$$|\mathcal{F}[\psi]| \le \|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{L_2^3(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L_2^3(\Omega)} = \|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{L_2^3(\Omega)}\|\psi\|_{V(\Omega)}.$$

Таким образом, $\mathcal{F} \in H^*$ при $H = V(\Omega)$.

Покажем, что билинейная форма $B[\varphi,\psi]$ является ограниченной. Используя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Гельдера, для всех $\varphi,\psi \in V(\Omega)$ получаем:

$$\big|B[\varphi,\psi]\big| \le \sigma^*\|\nabla\varphi\|_{L_2^3(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L_2^3(\Omega)} = \sigma^*\|\varphi\|_{V(\Omega)}\|\psi\|_{V(\Omega)}.$$

Это означает, что билинейная форма $B[\varphi,\psi]$ является ограниченной.

Пользуясь теперь определением скалярного произведения в гильбертовом пространстве $V(\Omega)$, для произвольного $\varphi \in V(\Omega)$ оценим

$$B[\varphi,\varphi] \ge \sigma_*\|\nabla\varphi\|^2_{L_2^3(\Omega)} = \sigma_*\|\varphi\|^2_{V(\Omega)}.$$

Это означает, что билинейная форма $B[\varphi,\psi]$ коэрцитивна. Таким образом, согласно теореме Лакса–Мильграма (лемме 3.1), при данном (произвольно фиксированном) $\upsilon \in \mathcal{D}$ существует единственное обобщенное решение $\varphi \in V(\Omega)$ задачи (1.1)–(1.3).

4. Общие признаки единственности решения обратной задачи

В этом разделе считаем выполненными условия 1 и 2 теоремы 2.1. Но, вообще говоря, функция $\sigma[\upsilon](x)$ может иметь произвольный вид; достаточно лишь, чтобы она обладала определенной степенью гладкости в областях Λ_j, $j = 1,2$. Фактически, речь идет о переформулировке общих признаков единственности решения обратной задачи из [4].

Для $j \in \overline{1,2}$ обозначим $\mathcal{H}_j$ – множество всех функций $\psi \in V(\Omega)$, сужение которых на область Λ_j принадлежит пространству $H_0^1(\Lambda_j)$, и более того, $\psi \equiv 0$, $\nabla\psi \equiv 0$ на $\Omega \setminus \Lambda_j$. При заданных $\psi_j \in \mathcal{H}_j$, $j = \overline{1,2}$, определим функции

$$F_j[\psi_j](\upsilon) = \int\limits_{\Lambda_j} \sigma[\upsilon](x)\nabla\overline{\varphi}(x)\cdot\nabla\psi_j(x)\,dx, \quad j = \overline{1,2}.$$

Определим также вектор-функцию $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ формулой

$$F = F[\vec{\psi}] = \mathrm{col}\,(F_1[\psi_1], F_2[\psi_2]), \quad \vec{\psi} = \mathrm{col}\,(\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{H},$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$.

Теорема 4.1. *Пусть для всякой пары $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $\xi \neq \eta$, существует $\vec{\psi} \in \mathcal{H}$ такое, что скалярное произведение*

$$\big(F[\vec{\psi}](\xi) - F[\vec{\psi}](\eta)\big) \cdot (\xi - \eta) > 0. \tag{4.1}$$

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

Доказательство см. в [4, теорема 3].

Далее будем конкретизировать теорему 4.1, предполагая, что выполняется условие

H$_1$) Для всех $\upsilon \in \mathcal{D}$, $i, j = 1, 2$ сужение $\left[\sigma'_{\upsilon_j}[\upsilon](x)\nabla\overline{\varphi}(x)\right]\big|_{\Lambda_i}$ принадлежит пространству $H^1(\Lambda_i)$.

Используя интегрирование по частям, получаем равенство:

$$\frac{\partial F_i[\psi_i](\xi)}{\partial \upsilon_j} = -\int\limits_{\Lambda_i} \mathrm{div}\left[\sigma'_{\upsilon_j}[\upsilon](x)\nabla\overline{\varphi}(x)\right]\psi_i(x)\,dx, \quad i, j = \overline{1, 2}. \tag{4.2}$$

Предположим дополнительно выполнение следующего условия.

H$_2$) Функции $h_j(x, \xi) = \mathrm{div}\,\sigma'_{\upsilon_j}[\xi](x)\nabla\overline{\varphi}(x)$, $j = 1, 2$, таковы, что для любых $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $\xi \neq \eta$, функции

$$H_j(x; \xi, \eta) = \int\limits_0^1 h_j\big(x, \eta + \theta(\xi - \eta)\big)\,d\theta, \quad j = \overline{1, 2},$$

линейно независимы на каждом из множеств Λ_i, $i = \overline{1, 2}$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* **H**$_1$), **H**$_2$). *Тогда все предположения теоремы 4.1 выполняются, и тем самым, обратная задача не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 4.2 практически дословно повторяет доказательство [4, теорема 5]; отличие лишь в том, что подынтегральное выражение в формуле (4.2), формально говоря, выглядело несколько иначе, но лишь за счет того, что рассматривалось уравнение более общего вида.

5. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.1. В соответствии с теоремой 4.2 нам достаточно лишь проверить выполнение условий $\mathbf{H}_1$), $\mathbf{H}_2$). Условие $\mathbf{H}_1$) выполняется очевидным образом. Покажем, что выполнено также и условие $\mathbf{H}_2$). Это и составляет основную трудность. Именно здесь нам потребуется конкретное представление функции $\sigma(x)$ на области Λ, а точнее, на областях $\Lambda_j \subset \Lambda$, $j = 1, 2$.

Найдем выражения функций $H_j(x; \xi, \eta)$, $j = 1, 2$, $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $\xi \neq \eta$. Прежде всего, непосредственным вычислением получаем:

$$\sigma'_{\upsilon_1}[\upsilon](x) = \exp\bigl\{\upsilon_2 \gamma(x)\bigr\}, \quad \sigma'_{\upsilon_2}[\upsilon](x) = \upsilon_1 \gamma(x) \exp\bigl\{\upsilon_2 \gamma(x)\bigr\}, \quad x \in \Lambda_j,$$

$j = 1, 2$, и следовательно,

$$h_1(x, \xi) = \operatorname{div} \sigma'_{\xi_1}[\xi](x) \nabla \overline{\varphi}(x) = \exp\bigl\{\xi_2 \gamma(x)\bigr\}\bigl(\Delta \overline{\varphi}(x) + \xi_2 \nabla \gamma(x) \cdot \nabla \overline{\varphi}(x)\bigr);$$

$$h_2(x, \xi) = \operatorname{div} \sigma'_{\xi_2}[\xi](x) \nabla \overline{\varphi}(x) =$$

$$= \exp\bigl\{\xi_2 \gamma(x)\bigr\} \xi_1 \Bigl[\gamma(x) \Delta \overline{\varphi}(x) + \{1 + \xi_2 \gamma(x)\} \nabla \gamma(x) \cdot \nabla \overline{\varphi}(x)\Bigr].$$

Далее необходимо рассмотреть три случая.

I. Пусть $\xi_j \neq \eta_j$, $j = 1, 2$. В соответствии с определением функций $H_j(x; \xi, \eta)$ и полученными выражениями для $h_j(x, \xi)$, $j = 1, 2$, прежде всего, вычислим интегралы:

$$J_0 = \int_0^1 \exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\, d\theta = \frac{1}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}\Bigl[e^{\xi_2 \gamma(x)} - e^{\eta_2 \gamma(x)}\Bigr];$$

$$J_1 = \int_0^1 \bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr] \exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\, d\theta =$$

$$= \frac{\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)} \exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\} \Big|_{\theta=0}^{\theta=1} - \frac{\xi_2 - \eta_2}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)} J_0 =$$

$$= \frac{1}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}\Bigl[\xi_2 e^{\xi_2 \gamma(x)} - \eta_2 e^{\eta_2 \gamma(x)}\Bigr] - \frac{\xi_2 - \eta_2}{\bigl[\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)\bigr]^2}\Bigl[e^{\xi_2 \gamma(x)} - e^{\eta_2 \gamma(x)}\Bigr];$$

$$J_2 = \int_0^1 \bigl[\eta_1 + \theta(\xi_1 - \eta_1)\bigr] \exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}\Bigl[\xi_1 e^{\xi_2 \gamma(x)} - \eta_1 e^{\eta_2 \gamma(x)}\Bigr] - \frac{\xi_1 - \eta_1}{\bigl[\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)\bigr]^2}\Bigl[e^{\xi_2 \gamma(x)} - e^{\eta_2 \gamma(x)}\Bigr];$$

$$J_3 = \int_0^1 \bigl[\eta_1 + \theta(\xi_1 - \eta_1)\bigr]\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr] e^{\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}}\, d\theta = \eta_2 J_2 + J_4;$$

$$J_4 = \int_0^1 \bigl[\eta_1 \theta + \theta^2(\xi_1 - \eta_1)\bigr]\bigl[\xi_2 - \eta_2\bigr] \exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\, d\theta =$$

$$= \frac{\eta_1\theta + \theta^2(\xi_1-\eta_1)}{\gamma(x)} \exp\Big\{\big[\eta_2 + \theta(\xi_2-\eta_2)\big]\gamma(x)\Big\}\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} -$$

$$-\frac{1}{\gamma(x)}\int_0^1 \big[\eta_1 + 2\theta(\xi_1-\eta_1)\big]\exp\Big\{\big[\eta_2+\theta(\xi_2-\eta_2)\big]\gamma(x)\Big\}\,d\theta =$$

$$= \frac{\xi_1}{\gamma(x)}\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\} - \frac{1}{\gamma(x)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\eta_1+2\theta(\xi_1-\eta_1)}{(\xi_2-\eta_2)\gamma(x)}\exp\Big\{\big[\eta_2+\theta(\xi_2-\eta_2)\big]\gamma(x)\Big\}\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} - \frac{2(\xi_1-\eta_1)}{(\xi_2-\eta_2)\gamma(x)}J_0\right] =$$

$$= \frac{\xi_1}{\gamma(x)}\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\} - \frac{2\xi_1-\eta_1}{(\xi_2-\eta_2)\gamma^2(x)}\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\} +$$

$$+\frac{\eta_1}{(\xi_2-\eta_2)\gamma^2(x)}\exp\big\{\eta_2\gamma(x)\big\} + \frac{2(\xi_1-\eta_1)}{(\xi_2-\eta_2)^2\gamma^2(x)}\Big[e^{\{\xi_2\gamma(x)\}} - e^{\{\eta_2\gamma(x)\}}\Big].$$

Теперь можем записать:

$$H_1(x;\xi,\eta) = \int_0^1 h_1\big(x,\eta+\theta(\xi-\eta)\big)\,d\theta = J_0\,\Delta\overline{\varphi}(x) + J_1\left(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\right),$$

$$H_2(x;\xi,\eta) = \int_0^1 h_2\big(x,\eta+\theta(\xi-\eta)\big)\,d\theta =$$

$$= \big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\,J_2 + \gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\,J_3.$$

Нас интересуют условия, при которых функции $H_1(x;\xi,\eta)$, $H_2(x;\xi,\eta)$ будут линейно независимы на каждой из областей Λ_j, $j=1,2$. В связи с этим заметим, что домножение на функцию $\gamma^2(x)>0$ не влияет на их линейную зависимость. При этом из полученных представлений видим, что функция $\gamma^2(x)H_1(x;\xi,\eta)$ представляется в виде линейной комбинации функций

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma(x)\exp\big\{\upsilon_2\gamma(x)\big\}, \quad A[\overline{\varphi},\upsilon](x) \equiv \big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\exp\big\{\upsilon_2\gamma(x)\big\},$$

$$\gamma(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x),$$

а функция $\gamma^2(x)H_2(x;\xi,\eta)$ — в виде линейной комбинации тех же функций и плюс к тому функций

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\big\{\upsilon_2\gamma(x)\big\}, \quad \gamma^2(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x),$$

при $\upsilon=\xi$, $\upsilon=\eta$. Покажем, что выполняется условие $\mathbf{H}_2$). Рассуждая от противного, предположим, что при некоторых константах C_1, C_2 имеет место тождество

$$C_1\gamma^2(x)H_1(x;\xi,\eta) + C_2\gamma^2(x)H_2(x;\xi,\eta) \equiv 0, \quad x\in\Lambda_j. \tag{5.1}$$

Заметим, что в выражении $\gamma^2(x)H_2(x;\xi,\eta)$ коэффициент при каждой из функций

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\}, \quad \Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\big\{\eta_2\gamma(x)\big\},$$

обязательно не нулевой. В самом деле, для всех $\upsilon \in \mathcal{D}$ должно быть $\upsilon_1 > 0$, иначе получим противоречие с исходным предположением $\sigma[\upsilon](x) \geq \sigma_* > 0 \ \ \forall \upsilon \in \mathcal{D}$. Таким образом, $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$. Причем в выражение $\gamma^2(x) H_1(x;\xi,\eta)$ ни та, ни другая функция не входит. Поэтому, предполагая, что $C_2 \neq 0$, получаем противоречие с условием 3 теоремы 2.1. Если же $C_2 = 0$, то предполагая, что $C_1 \neq 0$, и учитывая полученное выше представление для функции $H_1(x;\xi,\eta)$, вновь получаем противоречие с условием 3 теоремы 2.1. Таким образом, $C_1 = C_2 = 0$, то есть выполняется условие $\mathbf{H}_2$).

II. Пусть $\xi_1 = \eta_1 = \tau > 0$, $\xi_2 \neq \eta_2$. Выясним, как преобразуются интегралы по сравнению с пунктом I. Очевидно, что интегралы J_0 и J_1 не меняются. Вычислим интегралы

$$J_2 = \tau\, J_0, \quad J_3 = \tau\, J_1.$$

Ясно, что выражение для $H_1(x;\xi,\eta)$ по сравнению с пунктом I никак не изменится:

$$H_1(x;\xi,\eta) = J_0\, \Delta\overline{\varphi}(x) + J_1 \left(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\right).$$

При этом

$$H_2(x;\xi,\eta) = \big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\, J_2 + \gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\, J_3,$$

то есть

$$H_2(x;\xi,\eta) = \big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\, \tau\, J_0 + \gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\, \tau\, J_1.$$

После этого аналогично пункту I устанавливаем выполнение условия $\mathbf{H}_2$).

III. Пусть $\xi_1 \neq \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2 = \tau$. Выясним, как преобразуются интегралы по сравнению с пунктом I:

$$J_0 = \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\}, \quad J_1 = \tau\, \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\},$$

$$J_2 = \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\} \int\limits_0^1 \big[\eta_1 + \theta(\xi_1 - \eta_1)\big]\, d\theta =$$

$$= \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\} \left[\eta_1\theta + \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\theta^2\right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=1} = \frac{\xi_1 + \eta_1}{2} \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\}, \quad J_3 = \tau\, J_2.$$

Таким образом, обозначая $\xi_1 + \eta_1 = 2\nu > 0$, получаем:

$$\exp\big\{-\tau\gamma(x)\big\}\Big\{C_1 H_1(x;\xi,\eta) + C_2 H_2(x;\xi,\eta)\Big\} =$$

$$= C_1\Delta\overline{\varphi}(x) + C_1\tau\left(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\right) +$$

$$+ C_2\nu\big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big) + C_2\nu\tau\gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big).$$

Отсюда и из условия 3 теоремы 2.1 следует, что условие $\mathbf{H}_2$) выполняется. □

Далее, для доказательства теоремы 2.2 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть* $C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,6}$, *— произвольные постоянные, не все равные нулю;* ξ, $\eta \in \mathbb{R}$, $\xi \neq \eta$, *— заданные константы. Тогда уравнение вида*

$$\bigl(C_1t^2 + C_2t + C_3\bigr)\exp\{\xi t\} + \bigl(C_4t^2 + C_5t + C_6\bigr)\exp\{\eta t\} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

может иметь не более пяти корней.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $\xi < \eta$. Обозначим $k = \eta - \xi > 0$. Тогда, домножая уравнение (5.2) на $\exp\{-\xi t\}$, можем переписать его в виде

$$f(t) \equiv C_1t^2 + C_2t + C_3 + \bigl(C_4t^2 + C_5t + C_6\bigr)\exp\{kt\} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

В случае $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ утверждение леммы очевидно. Поэтому предположим, что это не так. Непосредственным вычислением получаем, что производные функции $f(t)$ могут быть представлены следующим образом:

$$f'(t) = 2C_1t + C_2 + \bigl(\overline{C}_4t^2 + \overline{C}_5t + \overline{C}_6\bigr)\exp\{kt\},$$

$$f''(t) = 2C_1 + \bigl(\widetilde{C}_4t^2 + \widetilde{C}_5t + \widetilde{C}_6\bigr)\exp\{kt\},$$

$$f'''(t) = \bigl(\widehat{C}_4t^2 + \widehat{C}_5t + \widehat{C}_6\bigr)\exp\{kt\}.$$

Ясно, что уравнение $f'''(t) = 0$ может иметь не более двух корней. Таким образом, функция $f''(t)$ имеет не более трех промежутков монотонности. Поэтому уравнение $f''(t) = 0$ может иметь не более трех корней. Следовательно (по аналогичным причинам), уравнение $f'(t) = 0$ может иметь не более четырех корней, а уравнение (5.3) — не более пяти корней. □

Доказательство теоремы 2.2. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.1, рассмотрим три случая.

I. Пусть $\xi_1 \neq \eta_1$, $\xi_2 \neq \eta_2$. Покажем, что тождество

$$\gamma^2(x)\Bigl\{C_1H_1(x;\xi,\eta) + C_2H_2(x;\xi,\eta)\Bigr\} \equiv 0 \quad \text{на} \quad \Lambda_j, \tag{5.4}$$

возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Как видно из доказательства теоремы 2.1, тождество (5.4) может быть переписано в виде

$$A(x)\mathcal{P}[\nu]\{\gamma(x)\} + B(x)\mathcal{Q}[\mu]\{\gamma(x)\} \equiv 0, \quad x \in \Lambda_j, \tag{5.5}$$

где приняты обозначения:

$$\mathcal{P}[\nu]\{t\} = \bigl(\nu_1t^2 + \nu_2t + \nu_3\bigr)\exp\{\xi_2t\} + \bigl(\nu_4t^2 + \nu_5t + \nu_6\bigr)\exp\{\eta_2t\};$$

$$\mathcal{Q}[\mu]\{t\} = \bigl(\mu_1t^2 + \mu_2t + \mu_3\bigr)\exp\{\xi_2t\} + \bigl(\mu_4t^2 + \mu_5t + \mu_6\bigr)\exp\{\eta_2t\};$$

$$A(x) = \Delta\overline{\varphi}(x), \quad B(x) = \bigl(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\bigr)(x);$$

ν_i, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,6}$, — некоторые числа. При этом

$$\nu_1 = C_2\frac{\xi_1}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \nu_4 = -C_2\frac{\eta_1}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_1 = C_2\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_4 = -C_2\frac{\eta_1\eta_2}{\xi_2 - \eta_2}.$$

Предположим, что $C_2 \neq 0$. Тогда ясно, что $\nu_1 \neq 0$, $\nu_4 \neq 0$, поскольку, как уже было отмечено при доказательстве теоремы 2.1, $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$. Кроме того, по крайней мере один из коэффициентов μ_1 или μ_4 не равен нулю (иначе окажется, что $\xi_2 = \eta_2 = 0$, но по исходному предположению, $\xi_2 \neq \eta_2$). Если же $C_2 = 0$, то

$$\nu_2 = \frac{C_1}{\xi_2 - \eta_2},\ \nu_5 = -\frac{C_1}{\xi_2 - \eta_2},\ \mu_2 = C_1\frac{\xi_2}{\xi_2 - \eta_2},\ \mu_5 = -C_1\frac{\eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, \tag{5.6}$$

и если $C_1 \neq 0$, то $\nu_2 \neq 0$, $\nu_5 \neq 0$ и по крайней мере один из коэффициентов μ_2 или μ_5 не равен нулю. Иными словами, если хотя бы одно из чисел C_1 или C_2 не равно нулю, то и оба набора ν и μ не нулевые.

Предположим, например, что из двух условий 3 a) и 3 b) теоремы 2.2 выполнено первое, и покажем, что в этом случае набор ν нулевой. Рассуждая от противного, допустим, что это не так.

Обозначим $t_{ji} = \gamma(x_{ji})$, $i = \overline{1,6}$. Поскольку, согласно условию 3 теоремы 2.2, точки x_{ji} принадлежат различным поверхностям уровня функции $\gamma(x)$, то ясно, что все числа t_{ji}, $i = \overline{1,6}$, различны. Поэтому, в соответствии с леммой 5.1, функция $\mathcal{P}[\nu]\{\gamma(x)\}$ по крайней мере в одной из точек x_{ji}, $i = \overline{1,6}$, не обращается в ноль. Для краткости обозначим эту точку как $\widehat{x}$. Таким образом, в точке $\widehat{x} \in \Lambda_j$ выполняются соотношения:

$$A(\widehat{x}) \neq 0, \quad \mathcal{P}[\nu]\{\gamma(\widehat{x})\} \neq 0, \quad B(\widehat{x}) = 0.$$

Получаем противоречие с тождеством (5.5). Стало быть, наше предположение не верно, то есть набор ν нулевой. Отсюда, как уже было установлено выше, следует, что $C_1 = C_2 = 0$.

II. Пусть $\xi_1 = \eta_1 = \tau > 0$, $\xi_2 \neq \eta_2$. Покажем, что тождество (5.4) возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Как и в пункте I, можно переписать тождество (5.4) в эквивалентном виде (5.5), но, вообще говоря, с другими наборами коэффициентов ν и μ.

При этом

$$\nu_1 = C_2\frac{\tau}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \nu_4 = -C_2\frac{\tau}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_1 = C_2\frac{\tau\xi_2}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_4 = -C_2\frac{\tau\eta_2}{\xi_2 - \eta_2}.$$

Предположим, что $C_2 \neq 0$. Тогда ясно, что $\nu_1 \neq 0$, $\nu_4 \neq 0$. Кроме того, по крайней мере один из коэффициентов μ_1 или μ_4 не равен нулю. Если же $C_2 = 0$, то опять получаем (5.6) (поскольку выражение $H_1(x;\xi,\eta)$ остается тем же, что и в пункте I), и оставшаяся часть доказательства дословно такая же, как в пункте I.

III. Пусть $\xi_1 \neq \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2 = \tau$. Тогда вместо тождества (5.4) рассмотрим следующее:

$$\exp\{-\tau\gamma(x)\}\Big\{C_1H_1(x;\xi,\eta) + C_2H_2(x;\xi,\eta)\Big\} \equiv 0 \quad \text{на} \quad \Lambda_j. \tag{5.7}$$

Докажем, что (5.7) возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Примем обозначение $\nu = \dfrac{\xi_1 + \eta_1}{2} > 0$. Тождество (5.7) можно переписать в виде:

$$A(x)\{C_1 + C_2\nu\gamma(x)\} + B(x)\{C_1\tau + C_2\nu + C_2\tau\nu\gamma(x)\} = 0 \quad \forall x \in \Lambda_j. \tag{5.8}$$

Пусть выполнено условие 3 a) теоремы 2.2. Тогда при ненулевом наборе параметров C_1, C_2 существует точка $\widehat{x} \in \Lambda_j$ такая, что

$$A(\widehat{x}) \neq 0, \quad B(\widehat{x}) = 0, \quad C_1 + C_2\nu\gamma(\widehat{x}) \neq 0.$$

В результате получаем противоречие с (5.8). Поэтому $C_1 = C_2 = 0$.

Пусть выполнено условие 3 b) теоремы 2.2. Сначала предположим, что $\tau \neq 0$. Тогда при ненулевом наборе параметров C_1, C_2 существует точка $\widehat{x} \in \Lambda_j$ такая, что

$$A(\widehat{x}) = 0, \quad B(\widehat{x}) \neq 0, \quad C_1\tau + C_2\nu + C_2\tau\nu\gamma(\widehat{x}) \neq 0.$$

В результате получаем противоречие с (5.8). Поэтому $C_1 = C_2 = 0$.

Теперь предположим, что $\tau = 0$. Тогда тождество (5.8) принимает вид:

$$A(x)\big\{C_1 + C_2\nu\gamma(x)\big\} + B(x)C_2\nu = 0 \quad \forall x \in \Lambda_j. \tag{5.9}$$

При этом непосредственно по условию 3 b) теоремы 2.2 существует точка $\widehat{x} \in \Lambda_j$ такая, что

$$A(\widehat{x}) = 0, \quad B(\widehat{x}) \neq 0.$$

Отсюда и из (5.9) сразу же получаем, что $C_2 = 0$. В таком случае, при $C_1 \neq 0$ будет $A(x) \equiv 0$ на Λ_j, но это противоречит условию 3 b) теоремы 2.2. Поэтому $C_1 = C_2 = 0$. $\square$

References

[1] А. А. Жидков, А. В. Калинин, “Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере”, *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2009, №6(1), 150–158. [A. A. Zhidkov, A. V. Kalinin, “Several problems of mathematical and numerical modeling of global electric circuit in the atmosphere”, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta imeni N.I. Lobachevskogo (Nizhni Novgorod University Reports)*, 2009, №6(1), 150–158 (In Russian)].

[2] A. V. Kalinin, N. N. Slyunyaev, “Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **450** (2017), 112–136.

[3] N. A. Denisova, A. V. Kalinin, “Influence of the choice of boundary conditions on the distribution of the electric field in models of the global electric circuit”, *Radiophysics and Quantum Electronics*, **61**:10 (2019), 741–751.

[4] А. В. Чернов, “О единственности решения обратной задачи определения параметров в старшем коэффициенте и правой части эллиптического уравнения”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:1 (2016), 96–110. [A. V. Chernov, “On the uniqueness of solution to the inverse problem of determination parameters in the senior coefficient and the righthand side of an elliptic equation”, *Far Eastern Mathematical Journal*, **16**:1 (2016), 96–110 (In Russian)].

[5] E. A. Mareev, S. V. Anisimov, “Geophysical Studies of the Global Electric Circuit”, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, **44**:10 (2008), 760–769.

[6] Е. А. Мареев, “Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи”, *Успехи физических наук*, **180**:5 (2010), 527–534; англ. пер.:E. A. Mareev, “Global electric circuit research: achievements and prospects”, *Physics, Uspekhi*, **53**:5 (2010), 504–511.

[7] J. Jansky, V. P. Pasko, “Effects of conductivity perturbations in time-dependent global electric circuit model”, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **120**:12 (2015), 10654–10668.

[8] V. V. Denisenko, M. J. Rycroft, R. G. Harrison, “Mathematical Simulation of the Ionospheric Electric Field as a Part of the Global Electric Circuit”, *Surveys in Geophysics*, **40**:1 (2019), 1–35.

[9] В. Н. Морозов, *Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ*, Российский государственный гидрометеорологический университет, СПб., 2011. [V. N. Morozov, *Mathematical Modeling of Atmospheric Electric Processes Allowing for the Influence of Aerosol Particles and Radioactive Substances*, Russian State Hydrometeorological University, St. Petersburg, 2011 (In Russian)].

[10] A. J. G. Baumgaertner, J. P. Thayer, R. R. Neely, G. Lucas, “Toward a comprehensive global electric circuit model: Atmospheric conductivity and its variability in CESM1(WACCM) model simulations”, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, **118**:16 (2013), 9221–9232.

[11] S. S. Davydenko, E. A. Mareev, T. C. Marshall, M. Stolzenburg, “On the calculation of electric fields and currents of mesoscale convective systems”, *Journal of Geophysical Research*, **109**:D11 (2004), 1–10.

[12] G. M. Lucas, A. J. G. Baumgaertner, J. P. Thayer, “A global electric circuit model within a community climate model”, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, **120**:23 (2015), 12054–12066.

[13] V. Bayona, N. Flyer, G. M. Lucas, A. J. G. Baumgaertner, “A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0)”, *Geoscientific Model Development*, **8**:10 (2015), 3007–3020.

[14] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; англ. пер.:D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin etc., 1983.

Информация об авторе

Чернов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского; Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: chavnn@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249

Поступила в редакцию 26 декабря 2019 г.
Поступила после рецензирования 3 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Andrei V. Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod; Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russian Federation. E-mail: chavnn@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249

Received 26 December 2019
Reviewed 3 February 2020
Accepted for press 6 March 2020