

© Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-205-213

УДК 517.927.4



Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения

Арам Владимирович АРУТЮНОВ, Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ,
Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ

ФГБУН «Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. В статье исследуется антипериодическая краевая задача для неявного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) + x(\tau) = 0.$$

Предполагается, что отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, определяющее рассматриваемое уравнение, является гладким и удовлетворяет условию равномерной невырожденности первой производной

$$\inf \{ \text{cov} f'_v(t, x, v) : (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \} > 0.$$

Здесь $\text{cov} A$ — константа Банаха линейного оператора A . Предположение равномерной невырожденности выполняется, в частности, для отображения f , определяющего нормальное обыкновенное дифференциальное уравнение. Для неявных уравнений получены достаточные условия существования решения антипериодической краевой задачи и найдены оценки решений. Сформулированы следствия для нормальных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для доказательства основного результата исходное неявное уравнение сводится к нормальному дифференциальному уравнению за счет применения нелокальной теоремы о неявной функции. Затем в работе доказывается вспомогательное утверждение о разрешимости уравнения $x + \psi(x) = 0$, представляющее собой аналог теоремы Брауэра о неподвижной точке. Показывается, что отображение ψ , ставящее произвольной начальной точке x_0 значение решения задачи Коши в точке τ , корректно определено и удовлетворяет предположениям вспомогательного утверждения, что доказывает существование решения исходной краевой задачи.

Ключевые слова: антипериодическая краевая задача, неявное ОДУ, теорема о неявной функции

Благодарности: Результаты § 2 и 3 получены первым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131). Результаты § 1 и 4 получены вторым и третьим авторами при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/>).

Для цитирования: Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е. Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 205–213. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-205-213.

Antiperiodic boundary value problem for an implicit ordinary differential equation

Aram V. ARUTYUNOV, Zukhra T. ZHUKOVSKAYA, Sergey E. ZHUKOVSKIY

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The paper is devoted to the investigation of the antiperiodic boundary value problem for an implicit nonlinear ordinary differential equation

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) + x(\tau) = 0.$$

We assume that the mapping $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ defining the equation under consideration is smooth and satisfies the condition of uniform nondegeneracy of the first derivative

$$\inf \{ \text{cov} f'_v(t, x, v) : (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \} > 0.$$

Here $\text{cov} A$ is the Banach constant of the linear operator A . The assumption of uniform nondegeneracy holds, in particular, for the mapping f defining an explicit ordinary differential equation. For implicit equations, sufficient conditions for the existence of a solution to an antiperiodic boundary value problem are obtained, and estimates for solutions are found. Corollaries for normal ordinary differential equations are formulated. To prove the main result, the original implicit equation is reduced to an explicit differential equation by applying a nonlocal implicit function theorem. Then we prove an auxiliary assertion on the solvability of the equation $x + \psi(x) = 0$, which is an analog of Brouwer's fixed point theorem. It is shown that the mapping ψ , that assigns the value of the solution of the Cauchy problem at the point τ to an arbitrary initial point x_0 , is well defined and satisfies the assumptions of the auxiliary statement. This reasoning completes the proof of the existence of a solution to the boundary value problem.

Keywords: antiperiodic boundary value problem, implicit ordinary differential equation, implicit function theorem

Acknowledgements: The results in Sections 2 and 3 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (Project no. 20-11-20131). The results in Sections 1 and 4 are due to the second and the third authors who were supported by the Russian Science Foundation (Project no. 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/>).

Mathematics Subject Classification: 34B15.

For citation: Arutyunov A.V., Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E., Antiperiodicheskaya krayevaya zadacha dlya neyavnogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya [Antiperiodic boundary value problem for an implicit ordinary differential equation]. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 205–213. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-205-213. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса разрешимости антипериодической краевой задачи для неявного обыкновенного дифференциального уравнения. Один из подходов к исследованию задачи Коши для такого уравнения предполагает применение теории накрывающих отображений. Первой работой, посвященной применению накрывающих отображений к исследованию неявных дифференциальных уравнений, является статья [1]. В [2] исследованы свойства гладких накрывающих отображений и получены нелокальные теоремы о неявной функции. В настоящей работе мы применим нелокальную теорему о неявной функции из [2] для доказательства существования решения антипериодической краевой задачи для неявного обыкновенного дифференциального уравнения и получим априорные оценки решений. Основным результатом работы остается содержательным и для нормальных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи и основной результат

Прежде чем перейти к постановке задачи, введем используемые обозначения.

Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n -мерное арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через $B^n(x, r)$ замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $r \geq 0$, т.е.

$$B^n(x, r) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - x| \leq r\}.$$

Для числа $t \in \mathbb{R}$ и определенной в окрестности этой точки дифференцируемой функции x через $\dot{x}(t)$ обозначим производную функции x в точке t . Для произвольного линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ положим

$$\text{cov} A := \max\{\alpha \geq 0 : B^k(0, \alpha) \subset AB^n(0, 1)\}.$$

Очевидно, что $\text{cov} A > 0$ тогда и только тогда, когда оператор A сюръективен. Известно (см., например, [2]), что функция cov непрерывна.

Пусть заданы непрерывное отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ и число $\tau > 0$. Рассмотрим антипериодическую краевую задачу для неявного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} f(t, x, \dot{x}) &= 0, \quad t \in [0, \tau], \\ x(0) + x(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Будем говорить, что непрерывно дифференцируемая функция $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$, является решением задачи (1.1), если

$$[0, \tau] \subset I, \quad f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, \tau]$$

и

$$x(0) + x(\tau) = 0.$$

Цель настоящей работы состоит в получении достаточных условий существования решения задачи (1.1). Основным результатом работы состоит в следующем.

Пусть заданы числа $R \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $y : (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

$$y(0) + y(\tau) = 0. \tag{1.2}$$

Положим

$$w(t) := \max_{x \in B^n(y(t), R)} |f(t, x, \dot{y}(t))|, \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.3)$$

Очевидно, что функция w непрерывна.

Теорема 1.1. *Предположим, что*

- (i) *отображение f дважды непрерывно дифференцируемо;*
- (ii) $\alpha := \inf \{ \text{cov } f'_v(t, x, v) : (t, x, v) \in (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \} > 0;$
- (iii) *функция $y(\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет соотношению (1.2).*

Тогда если выполняется соотношение

$$\frac{3}{2\alpha} \int_0^\tau w(t) dt \leq R, \quad (1.4)$$

то существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи (1.1) такое, что имеют место соотношения

$$|\bar{x}(t)| \leq R \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \text{и} \quad |\bar{x}(0)| \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt. \quad (1.5)$$

2. Обсуждение

Пусть задано непрерывное отображение $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим антипериодическую краевую задачу для нормального обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(t, x), \quad t \in [0, \tau], \\ x(0) + x(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Положим

$$w_0(t) := \max_{x \in B^n(y(t), R)} |\dot{y}(t) - g(t, x)|, \quad t \in [0, \tau]. \quad (2.2)$$

Очевидно, что функция w_0 непрерывна. Из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Предположим, что отображение g дважды непрерывно дифференцируемо, функция $y(\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируема. Тогда, если для определенной равенством (2.2) функции w_0 выполняется соотношение*

$$\frac{3}{2} \int_0^\tau w_0(t) dt \leq R,$$

то существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи (2.1) такое, что имеют место соотношения

$$|\bar{x}(t)| \leq R \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \text{и} \quad |\bar{x}(0)| \leq \int_0^\tau w_0(t) dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $k := n$, $f(t, x, v) := v - g(t, x)$. Очевидно, что для этого отображения $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ выполняются все предположения теоремы 1.1. В частности, $w(t) \equiv w_0(t)$ и $\alpha = 1$. Поэтому существование решения задачи (2.1) вытекает из теоремы 1.1. $\square$

Следствие 2.2. *Предположим, что отображение g дважды непрерывно дифференцируемо. Тогда если выполняется соотношение*

$$\frac{3}{2} \int_0^\tau \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)| dt \leq R, \quad (2.3)$$

то существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи (2.1) такое, что имеют место соотношения

$$|\bar{x}(t)| \leq R \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \text{и} \quad |\bar{x}(0)| \leq \int_0^\tau \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)| dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для отображения g и функции $y(t) \equiv 0$ выполняются предположения следствия 2.1 при $w_0(t) \equiv \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)|$. Поэтому существование решения задачи (2.1) вытекает из следствия 2.1. $\square$

Отметим, что для произвольной гладкой функции g и произвольного фиксированного $R > 0$ неравенство (2.3) выполняется при любом достаточно малом $\tau > 0$, поскольку функция $\tau \mapsto \frac{3}{2} \int_0^\tau \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)| dt$ непрерывна и обращается в нуль при $\tau = 0$. Поэтому решение задачи (2.1) существует при любом достаточно малом $\tau > 0$. Отметим также, что из приводимого далее доказательства теоремы 1.1 следует, что предположение гладкости в следствии 2.2 можно ослабить, потребовав непрерывности отображения g и непрерывной дифференцируемости g по x .

3. Вспомогательные утверждения

Далее при доказательстве теоремы 1.1 наряду с классическими теоремами о свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений и теоремами о неподвижных точках будет использоваться глобальная теорема о неявной функции из [2]. Напомним её.

Теорема 3.1. (см. [2, теорема 5]) Пусть задано натуральное s , открытое непустое множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^s$ и дважды непрерывно дифференцируемое отображение $F : \mathbb{R}^n \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$. Если

$$\alpha := \inf \{ \text{cov} F'_v(v, \sigma) > 0 : v \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in \Sigma \} > 0,$$

то существует непрерывно дифференцируемое отображение $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$F(G(\sigma), \sigma) = 0, \quad |G(\sigma)| \leq \frac{|F(0, \sigma)|}{\alpha} \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Наряду с нелокальной теоремой о неявной функции, ниже будет использоваться следующее утверждение о разрешимости нелинейных абстрактных уравнения, эквивалентное теореме Брауэра о неподвижной точке (см. [3, §1.6]).

Теорема 3.2. Пусть заданы число $r \geq 0$ и непрерывное отображение $\psi: B^n(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

$$|\psi(x) - x| \leq 2r \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : |x| = r. \quad (3.1)$$

Тогда существует точка $\hat{x} \in B^n(0, r)$ такая, что $\psi(\hat{x}) = -\hat{x}$.

Доказательство. Положим

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}.$$

Если $\psi(\hat{x}) = -\hat{x}$ для некоторого $x \in S$, то предложение доказано. Рассмотрим теперь случай $\psi(x) \neq -x \quad \forall x \in S$.

Покажем, что для любого $x \in S$ векторы x и $-\psi(x) - x$ не являются сонаправленными, т.е., что $\lambda x \neq -\psi(x) - x$ для любого $\lambda > 0$. Для $x \in S$ и $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\lambda x - (-\psi(x) - x)|^2 &= |(2 + \lambda)x + (\psi(x) - x)|^2 \\ &= (2 + \lambda)^2 |x|^2 + 2(2 + \lambda) \langle x, \psi(x) - x \rangle + |\psi(x) - x|^2 \\ &\geq (2 + \lambda)^2 |x|^2 - 2(1 + \lambda) |x| |\psi(x) - x| + |\psi(x) - x|^2 \\ &= (2|x| + \lambda|x| - |\psi(x) - x|)^2 = (2r + \lambda r - |\psi(x) - x|)^2 \geq (\lambda r)^2 > 0. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство следует из неравенства Коши–Буняковского, последнее равенство — из включения $x \in S$, а предпоследнее неравенство из предположения (3.1). Таким образом, доказано, что $\lambda x \neq -\psi(x) - x$ для любого $\lambda > 0$.

Поскольку для любого $x \in S$ векторы x и $-\psi(x) - x$ не являются сонаправленными, то из [3, §1.6] следует, что существует точка $\hat{x} \in B^n(0, r)$ такая, что $-\psi(\hat{x}) - \hat{x} = 0$. Очевидно, эта точка является искомой. $\square$

4. Доказательство теоремы 1.1

Положим

$$\begin{aligned} F(v, \sigma) &:= f(t, x + y(t), v + \dot{y}(t)), \\ v \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma &= (t, x) \in \Sigma := (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Поскольку для отображения f выполнено предположение (ii), отображение f дважды непрерывно дифференцируемо, а функция y трижды непрерывно дифференцируема, то для F выполнены предположения теоремы 3.1. Поэтому существует непрерывно дифференцируемая функция $G: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\begin{aligned} f(t, x + y(t), \dot{y}(t) + G(t, x)) &= 0, \\ |G(t, x)| &\leq \frac{|f(t, x + y(t), \dot{y}(t))|}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.1)$$

для любых $(t, x) \in (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n$.

Положим

$$r := \frac{1}{2\alpha} \int_0^\tau w(t) dt. \quad (4.2)$$

В силу (1.4) имеем

$$0 \leq r < R, \quad \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt \leq R - r. \quad (4.3)$$

Кроме того,

$$\int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |G(t, x)| dt \stackrel{(4.1)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |f(t, x + y(t), \dot{y}(t))| dt \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt. \quad (4.4)$$

Для произвольного $x_0 \in B^n(0, r)$ рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = G(t, x), \quad t \in [0, \tau], \quad x(0) = x_0. \quad (4.5)$$

Поскольку

$$\int_0^\tau \max_{|x-x_0| \leq R-r} |G(t, x)| dt \leq \int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |G(t, x)| dt \stackrel{(4.4)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt \stackrel{(4.3)}{\leq} R - r,$$

то в силу [4, теорема II.4.1] существует решение $\varphi(\cdot, x_0) : [0, \tau] \rightarrow B^n(0, R)$ задачи (4.5). Из [4, теорема II.4.5] следует, что это решение единственно. Из [4, теорема II.4.11] следует, что отображение $\varphi(\tau, \cdot) : B^n(0, r) \rightarrow B^n(0, R)$ непрерывно.

Зададим отображение $\psi : B^n(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формуле

$$\psi(x_0) := \varphi(\tau, x_0), \quad x_0 \in B^n(0, r).$$

Это отображение непрерывно, поскольку непрерывно отображение $\varphi(\tau, \cdot)$. Кроме того,

$$|\psi(x_0) - x_0| \leq 2r \quad \forall x_0 \in B^n(0, r) : |x_0| = r,$$

поскольку

$$\begin{aligned} |\psi(x_0) - x_0| &= \left| \int_0^\tau \dot{\varphi}(t, x_0) dt \right| = \left| \int_0^\tau G(t, \varphi(t, x_0)) dt \right| \\ &\stackrel{(4.4)}{\leq} \int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |G(t, x)| dt \stackrel{(4.2)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt = 2r. \end{aligned}$$

Поэтому из теоремы 3.2 следует, что существует точка $x_0 \in B^n(0, r)$ такая, что

$$\psi(x_0) = -x_0.$$

Положим $\bar{x}(t) := y(t) + \varphi(t, x_0)$, $t \in [0, \tau]$. Покажем, что $\bar{x}$ является искомым решением задачи (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) &= f(t, y(t) + \varphi(t, x_0), \dot{y}(t) + \dot{\varphi}(t, x_0)) \\ &= f\left(t, y(t) + \varphi(t, x_0), \dot{y}(t) + G(t, \varphi(t, x_0))\right) \stackrel{(4.1)}{=} 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\bar{x}(0) = y(0) + \varphi(0, x_0) = y(0) + x_0 = -y(\tau) - \psi(x_0) = -y(\tau) - \varphi(\tau, x_0) = -\bar{x}(\tau).$$

Следовательно, $\bar{x}$ является решением задачи (1.1). Кроме того,

$$|\bar{x}(0) - y(0)| = |\varphi(0, x_0)| \leq r \stackrel{(4.2)}{=} \frac{1}{2\alpha} \int_0^\tau w(t) dt;$$

$$|\bar{x}(t) - y(t)| = |\varphi(t, x_0)| \leq R.$$

Таким образом, функция $\bar{x}$ является искомой. □

References

- [1] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.: E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.
- [2] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции”, *Дифференциальные уравнения*, **55**:4 (2019), 452–463; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Application of methods of ordinary differential equations to global inverse function theorems”, *Differential Equations*, **55**:4 (2019), 437–448.
- [3] L. Nirenberg, *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, American Mathematical Society, New York–London, 2001.
- [4] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. пер.: J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York–London, 1972.

Информация об авторах

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7326-7492>

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

Information about the authors

Aram V. Arutyunov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation.
 E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7326-7492>

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Жуковский Сергей Евгеньевич

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Corresponding author:

Sergey E. Zhukovskiy

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.06.2022 г.

Поступила после рецензирования 24.08.2022 г.

Принята к публикации 13.09.2022 г.

Received 28.06.2022

Reviewed 24.08.2022

Accepted for press 13.09.2022