ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149

УДК 517.977

Вложение гомотета в выпуклый компакт: алгоритм и его сходимость

Максим Викторович БАЛАШОВ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается задача покрытия данного выпуклого компакта гомотетичным образом другого выпуклого компакта с заданным центром гомотетии, вычисляется коэффициент гомотетии. Задача имеет старую историю и тесно связана с вопросами о чебышевском центре, задачах о транслятах и другими задачами вычислительной геометрии. Методы аппроксимации многогранниками и другие аппроксимационные методы не работают в пространстве уже умеренной размерности (более 5 на ПК).

Мы предлагаем подход, основанный на применении метода проекции градиента, который гораздо слабее чувствителен к размерности, чем аппроксимационные методы. Мы выделяем классы множеств, для которых удается доказать линейную скорость сходимости градиентного метода, т. е. сходимость со скоростью геометрической прогрессии с положительным знаменателем строго меньше 1. Эти множества должны быть сильно выпуклыми и обладать в определенном смысле гладкостью границы.

Ключевые слова: метод проекции градиента, сильная выпуклость, равномерная гладкость, опорная функция, невыпуклая оптимизация

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00042).

Для цитирования: *Балашов М.В.* Вложение гомотета в выпуклый компакт: алгоритм и его сходимость // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 143–149. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149

Embedding of a homothete in a convex compactum: an algorithm and its convergence

Maxim V. BALASHOV
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The problem of covering of a given convex compact set by a homothetic image of another convex compact set with a given homothety center is considered, the coefficient of homothety is calculated. The problem has an old history and is closely related to questions about the Chebyshev center, problems about translates, and other problems of computational geometry. Polyhedral approximation methods and other approximation methods do not work in a space of already moderate dimension (more than 5 on a PC).

We propose an approach based on the application of the gradient projection method, which is much less sensitive to dimension than the approximation methods. We select classes of sets for which we can prove the linear convergence rate of the gradient method, i. e. convergence with the rate of a geometric progression with a positive ratio strictly less than 1. These sets must be strongly convex and have, in a certain sense, smoothness of the boundary.

Keywords: gradient projection method, strong convexity, uniform smoothness, supporting function, nonconvex optimization

Acknowledgements: The work was supported by Russian Science Foundation (project no. 22-11-00042).

Mathematics Subject Classification: Primary: 49J53, 90C26. Secondary: 52A20, 46N10.

For citation: Balashov M.V. Vlozheniye gomoteta v vypuklyy kompakt: algoritm i ego skhodimost' [Embedding of a homothete in a convex compactum: an algorithm and its convergence]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 143–149. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Для $t \geq 0$ определим многозначное отображение $\mathcal{R}(t) = t\mathcal{R}$, где $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Таким образом, $\mathcal{R}(t)$ есть гомотетия $\mathcal{R}$ с центром в нуле и коэффициентом $t \geq 0$. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{M}$, является выпуклым компактом. Предположим, что $\mathcal{R}(T) \not\subset \mathcal{M}$ для $T > 0$. Мы хотим решить следующий вопрос:

$$\text{Верно ли включение } \mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M} \text{ для данного } t \in [0,T]\,? \tag{0.1}$$

Предполагается обсудить алгоритм решения задачи (0.1). Во многих задачах при работе с компактными выпуклыми подмножествами типичным считается информация об опорной функции этих подмножеств, т. е. $s(p,\mathcal{R}) = \max\limits_{x \in \mathcal{R}}(p,x)$ и $s(p,\mathcal{M})$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$. Здесь (p,x) — скалярное произведение векторов p и x. В дальнейшем будем считать известными функции $s(p,\mathcal{R})$ и $s(p,\mathcal{M})$.

Вопрос (0.1) есть вопрос о покрытии выпуклого компакта гомотетичным образом другого выпуклого компакта с фиксированным центром гомотетии. Этот вопрос очень близок к задаче вычисления чебышевского радиуса (см. [1]). Предположим, что центр гомотетии есть ноль и $\mathcal{M}$ — выпуклое компактное подмножество с нулем в своей внутренности. Мы хотим найти решение задачи

$$\min_{\tau \geq 0} \tau \qquad \mathcal{R} \subset \tau\mathcal{M}.$$

Полагая $t = \tau^{-1}$, получаем эквивалентную переформулировку: для $\mathcal{R}(t) = t \cdot \mathcal{R}$ найти

$$\max_{t \geq 0} t \qquad \mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}. \tag{0.2}$$

Зафиксируем $t \in [0,T]$. Положим $f_t(p) = s(p,\mathcal{M}) - t \cdot s(p,\mathcal{R})$. Таким образом, на языке опорных функций требуется решить задачу

$$\min_{\|p\|=1} f_t(p) = J. \tag{0.3}$$

Если $J \geq 0$, то $s(p,\mathcal{M}) \geq s(p,t\mathcal{R})$ для всех p и значит по теореме об отделимости $t\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$. Если $J < 0$, то $t\mathcal{R} \not\subset \mathcal{M}$. Меняя (уменьшая) t, можно пытаться найти решение (0.2).

Первая естественная идея — попытка аппроксимировать в задаче $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ многогранниками и решить приближенную задачу методами линейного программирования. Однако разумное приближение в метрике Хаусдорфа для выпуклых компактов может быть получено лишь в небольшой размерности, не более 5 для современного ПК (см. [2, таблица 1]).

Кроме того, задача (0.3) является невыпуклой задачей условной минимизации. Функция $f_t(p)$ невыпукла в общем случае, как разность выпуклых опорных функций, при этом минимизируется $f_t(p)$ на единичной евклидовой сфере. Последнее множество хоть и не выпукло, но обладает простой геометрией.

Решить с удовлетворительной точностью задачу (0.3) в размерности $n \geq 5$ бесперспективно как с помощью аппроксимаций, так и методов нулевого порядка (где участвует лишь значение функции).

Для того, чтобы применить методы первого порядка, необходима дифференцируемость в окрестности единичной сферы функции f_t по p, а значит и опорных функций $s(p,\mathcal{M})$, $s(p,\mathcal{R})$. Кроме того, хорошо известно (см. [3]), что существует широкий класс сходящихся методов с липшицево дифференцируемой функцией. Таким образом, хотелось бы выделить класс множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{R}$, для которых опорная функция была бы липшицево дифференцируемой в окрестности единичной сферы.

1. Обозначения и вспомогательные факты

Пусть $\|x\|^2 = (x,x)$, $B_r(a)$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром $a \in \mathbb{R}^n$.

Выпуклое компактное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильно выпуклым с радиусом* $R > 0$, если множество $\mathcal{M}$ можно представить как пересечение замкнутых шаров радиуса R.

Хорошо известно, что опорная функция $s(p,\mathcal{M})$ компактного подмножества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна по Липшицу с константой Липшица $L = \|\mathcal{M}\| = \max\limits_{x\in\mathcal{M}} \|x\|$. Обозначим $\mathcal{M}(p) = \{x \in \mathcal{M} \ : \ (p,x) = s(p,\mathcal{M})\}$ для $p \in \mathbb{R}^n$ и выпуклого компакта $\mathcal{M}$. Множество $\mathcal{M}(p)$ называется опорным подмножеством множества $\mathcal{M}$ для вектора p, оно является субдифференциалом опорной функции в точке p в смысле выпуклого анализа.

Суммой множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется множество

$$\mathcal{M} + \mathcal{N} = \{x + y \ : \ x \in \mathcal{M}, \ y \in \mathcal{N}\}.$$

Расстоянием в метрике Хаусдорфа между выпуклыми компактами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется

$$h(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \sup_{\|p\|=1} |s(p,\mathcal{M}) - s(p,\mathcal{N})|.$$

Через $P_{\mathcal{M}}x$ обозначим метрическую проекцию точки x на замкнутое множество $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ дополнительно выпукло, то множество $P_{\mathcal{M}}x$ одноточечно. Определим $\varrho(x,\mathcal{M}) = \inf\limits_{y\in\mathcal{M}} \|x-y\|$.

П р е д л о ж е н и е 1.1. [4, теоремы 2.6, 4.1] *Пусть* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклое компактное множество. Следующие свойства эквивалентны*
1) $\mathcal{M}$ *сильно выпукло с радиусом* $R > 0$*;*
2) существует выпуклый компакт $\mathcal{N}$ *такой, что* $\mathcal{M} + \mathcal{N} = B_R(0)$*;*
3) для любого единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ *выполнено включение* $\mathcal{M} \subset B_R(\mathcal{M}(p) - Rp)$*;*
4) для любых единичных векторов $p,q \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство* $\|\mathcal{M}(p) - \mathcal{M}(q)\| \le R\|p-q\|$.

Будем называть выпуклый компакт $\mathcal{M}$ *равномерно гладким* с константой $r > 0$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_r(0)$ и $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$ также выпуклый компакт. Данное свойство рассматривалось ранее в работе [5, Definition 2.1].

Следующее предложение дает скорость убывания за один шаг алгоритма метода проекции градиента для липшицево дифференцируемой функции с константой Липшица $L_1 > 0$.

П р е д л о ж е н и е 1.2. [6, Lemma 2] *Рассмотрим задачу* $\min_{\mathcal{M}} f(x)$ *в* $\mathbb{R}^n$*. Предположим, что* $\mathcal{M}$ *— замкнутое множество,* f' *— липшицева функция с константой* L_1*. Зафиксируем* $0 < \lambda \le \frac{1}{L_1}$*. Пусть* $x_0 \in \mathcal{M}$ *и* $y_0 \in P_{\mathcal{M}}(x_0 - \lambda f'(x_0))$*. Тогда*

$$f(x_0) - f(y_0) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - L_1\right)\|x_0 - y_0\|^2. \tag{1.1}$$

При этом, для доказательства формулы (1.1) *условие Липшица с константой* L_1 *для* f' *важно на отрезке* $[x_0, y_0]$*, см. доказательство* [7, Proposition 2.2].

Лемма 1.1. *Для любых ненулевых векторов* $p, q \in \mathbb{R}^n$ *имеем*

$$\left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{\|p-q\|}{\sqrt{\|p\| \cdot \|q\|}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства умножим обе части неравенства на $\sqrt{\|p\| \cdot \|q\|}$ и возведем в квадрат. □

2. Основной результат

Предположения.

1. Множество $\mathcal{R}$ *сильно выпукло с радиусом* $R > 0$ *и* $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{M}$.

2. Множество $\mathcal{M}$ *равномерно гладкое с константой* $r_{\mathcal{M}} > 0$: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_{r_{\mathcal{M}}}(0)$.

3. Множество $\mathcal{M}$ *сильно выпукло с радиусом* $R_{\mathcal{M}} > 0$.

4. $R < r_{\mathcal{M}}$.

Напомним, что $\mathcal{R}(t) = t\mathcal{R}$. Отметим также, что мы рассматриваем $T = 1$, т. е. $t \in [0,1]$, и поэтому множество $t\mathcal{R}$ сильно выпукло с радиусом R для всех $t \in [0,1]$.

Зададим $\varepsilon \in (0, r_{\mathcal{M}} - R)$. Рассмотрим ε-окрестность $\mathcal{R}_\varepsilon(t) = \mathcal{R}(t) + B_\varepsilon(0)$ множества $\mathcal{R}(t)$. Включение $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$ означает

$$\max_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) \leq \varepsilon$$

и наоборот, если $\max\limits_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) > \varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$. С помощью опорных функций мы можем сформулировать следующую эквивалентную задачу: для функции $f(p) = f_t(p) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))$ (индекс t у f_t мы далее будем опускать) найти минимум

$$\min_{\|p\|=1} f(p) = J. \tag{2.1}$$

Если $J \geq -\varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$, а если $J < -\varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{S}_1 = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ \|p\| = 1\}$ и $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 \ : \ f(p) \leq 0\}$. Предположим, что $p_0 \in \mathcal{S}_1$ есть решение (2.1).

Допустим, что $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Рассмотрим следующий итерационный процесс

$$p_1 \in \mathcal{S}, \qquad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)), \tag{2.2}$$

где $\lambda > 0$.

Для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ геометрической разностью называется множество $A \overset{*}{-} B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x + B \subset A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются предположения раздела 2. и в задаче* (2.1) $J < 0$. *Положим* $\varepsilon \in (0, r_{\mathcal{M}} - R)$, $r_0 = r_{\mathcal{M}} - R - \varepsilon > 0$, $L = \|\mathcal{M} \overset{*}{-} \mathcal{R}_\varepsilon(t)\| > 0$. *Тогда для всякого* $p_1 \in \mathcal{S}$ *и* $0 < \lambda \leq \min\{r_0^2/R_{\mathcal{M}}^3, 1/(2L), 1/(2R_{\mathcal{M}})\}$ *итерации* (2.2) *сходятся с линейной скоростью к решению* p_0:

$$\|p_{k+1} - p_0\| \leq q \cdot \|p_k - p_0\|, \qquad q = \sqrt{1 - \frac{2r_0^2}{R_{\mathcal{M}}}\lambda + R_{\mathcal{M}}^2 \lambda^2} \in (0,1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неравенства $J < 0$ множество $\mathcal{S}$ непусто. Рассмотрим $f(p)$:

$$f(p) = s(p, \mathcal{M}_0) + r_{\mathcal{M}}\|p\| - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)).$$

Множество $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ сильно выпукло с радиусом $R+\varepsilon < r_{\mathcal{M}}$. Значит, в силу предложения 1.1, существует другой выпуклый компакт $\mathcal{N}(t)$ со свойством $\mathcal{R}_\varepsilon(t)+\mathcal{N}(t) = B_{R+\varepsilon}(0)$ и $r_{\mathcal{M}}\|p\| - s(p,\mathcal{R}_\varepsilon(t)) = (r_{\mathcal{M}} - R - \varepsilon)\|p\| + s(p,\mathcal{N}(t))$. Поэтому для всех $p\in\mathbb{R}^n$

$$f(p) = s(p,\mathcal{M}_0) + (r_{\mathcal{M}} - R - \varepsilon)\|p\| + s(p,\mathcal{N}(t)) = s(p,\mathcal{M}_0 + \mathcal{N}(t) + B_{r_{\mathcal{M}}-R-\varepsilon}(0))$$

и, следовательно, функция $f(p)$ является опорной для множества $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{M} \overset{*}{-} \mathcal{R}_\varepsilon(t) = \mathcal{M}_0 + \mathcal{N}(t) + B_{r_{\mathcal{M}}-R-\varepsilon}(0)$. Последнее множество сильно выпукло с радиусом $R_{\mathcal{M}}$ и равномерно гладкое с константой $r_0 = r_{\mathcal{M}} - R - \varepsilon > 0$. Функция f' липшицева на множестве $\mathcal{S}_1$ с константой $R_{\mathcal{M}}$ и $\|p_k - p_{k+1}\| \le \|\lambda f'(p_k)\| \le \frac{1}{2}$. В силу леммы 1.1 f' липшицева в $\frac{1}{2}$-окрестности $\mathcal{S}_1$ с константой $2R_{\mathcal{M}}$. Таким образом, f' липшицева на любом сегменте $[p_k,p_{k+1}]$ с константой $2R_{\mathcal{M}}$. Из условия Липшица f' и предложения 1.2 получаем, что $f(p_k)\le 0$ для всех k.

Для $(k+1)$-й итерации имеем

$$\|p_{k+1} - p_0\|^2 = \|P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)) - P_{\mathcal{S}_1}(p_0 - \lambda f'(p_0))\|^2,$$

$\|p_k - \lambda f'(p_k)\| \ge (p_k, p_k - \lambda f'(p_k)) = 1 - \lambda f(p_k) \ge 1$. Аналогично $\|p_0 - \lambda f'(p_0)\| \ge 1$, т. е. $p_k - \lambda f'(p_k) \notin \operatorname{int} B_1(0)$, $p_0 - \lambda f'(p_0) \notin \operatorname{int} B_1(0)$ и значит в силу леммы 1.1

$$\begin{aligned}\|p_{k+1} - p_0\|^2 &\le \|p_k - p_0 + \lambda(f'(p_k) - f'(p_0))\|^2\\ &\le \|p_k - p_0\|^2 - 2\lambda(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) + \lambda^2\|f'(p_k) - f'(p_0)\|.\end{aligned}$$

Из сильной выпуклости множества $\mathcal{Z}(t)$ с радиусом $R_{\mathcal{M}}$ следует $\|f'(p_k) - f'(p_0)\| \le R_{\mathcal{M}}\|p_k - p_0\|$. Также из сильной выпуклости $\mathcal{Z}(t)$ с радиусом $R_{\mathcal{M}}$ в силу [8, Theorem 2.1(h)] имеем $(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) \ge \frac{1}{R_{\mathcal{M}}}\|f'(p_k) - f'(p_0)\|^2$. Отсюда и из равномерной гладкости множества $\mathcal{Z}(t)$ с константой r_0 в силу [8, Definition 3.2, Theorem 3.6]

$$\|f'(p_k) - f'(p_0)\| \ge r_0\|p_k - p_0\|$$

и

$$(p_k - p_0, f'(p_k) - f'(p_0)) \ge \frac{1}{R_{\mathcal{M}}}\|f'(p_k) - f'(p_0)\|^2 \ge \frac{r_0^2}{R_{\mathcal{M}}}\|p_k - p_0\|^2.$$

Таким образом, $\|p_{k+1} - p_0\|^2 \le q^2\|p_k - p_0\|^2$. □

Заметим, что условие $r_{\mathcal{M}} > R$ фактически гарантирует выпуклость функции f_t в теореме 2.1. Отметим также, что $f'(p) = \mathcal{M}(p) - t\mathcal{R}(p) - \varepsilon p$.

Рассмотрим теперь, как найти максимальное $t = t_0$ в задаче (0.2).

Поскольку $\mathcal{R}(1) \not\subset \mathcal{M}$, то решение задачи (2.1) для коэффициента $t = 1$ есть $J_1 < -\varepsilon$ (т. к. если $J_1 \ge -\varepsilon$, то $t_0 = 1$). Положим $t = 1$, $K = \|\mathcal{R}\|$, $\Delta t = \frac{\varepsilon}{2K}$ и $B_r(0)\subset\mathcal{M}$ для некоторого $r > 0$.

Опишем общий шаг. Пусть p_0 — единичный вектор-решение для t. Напомним, что $f_t(p) = s(p,\mathcal{M}) - s(p,\mathcal{R}_\varepsilon(t)) = s(p,\mathcal{M}) - ts(p,\mathcal{R}) - \varepsilon\|p\|$. Тогда

$$\min_{\|p\|=1} f_{t-\Delta t}(p) \le f_t(p_0) + \Delta t s(p_0,\mathcal{R}) < -\varepsilon + \Delta t K \le -\frac{1}{2}\varepsilon \qquad (2.3)$$

и для коэффициента гомотетии $t - \Delta t$ тоже применима теорема 2.1. Если в задаче (2.1) для коэффициента гомотетии $t - \Delta t$ все еще выполняется неравенство $J < -\varepsilon$, то переобозначим $t := t - \Delta t$ и повторим общий шаг.

Пусть $\min_{\|p\|=1} f_{t-\Delta t}(p) = f_{t-\Delta t}(q_0)$ для единичного вектора q_0. Тогда

$$s(q_0, \mathcal{M}) - (t-\Delta t)s(q_0, \mathcal{R}) - \varepsilon\|q_0\| < -\varepsilon,$$

и

$$r = r\|q_0\| \le s(q_0, \mathcal{M}) < (t-\Delta t)s(q_0, \mathcal{R}) \le s(q_0, \mathcal{R}).$$

Отсюда получаем (напомним, что $f_t(p_0) = \min_{\|p\|=1} f_t(p)$)

$$f_{t-\Delta t}(q_0) = f_t(q_0) + \Delta t s(q_0, \mathcal{R}) \ge f_t(p_0) + \frac{\varepsilon r}{2K}.$$

Поэтому после, не более чем $[|J_1|/(\varepsilon r/(2K))] + 1$ шагов, мы получим $J \ge -\varepsilon$ для задачи (2.1) при некотором коэффициенте гомотетии $t \ge 0$ (заметим, что мы не можем пропустить неравенство $J < 0$ из-за оценки (2.3)). Для коэффициента гомотетии $t + \Delta t$ значение функционала J было менее $-\varepsilon$. Далее решаем задачу с любой желаемой точностью, деля промежуток $[t, t+\Delta t]$ пополам.

References

[1] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968. [L. Danzer, B. Grunbaum, V. Klee, *Helly's Theorem and its Applications*, Mir Publ., Moscow, 1968 (In Russian)].

[2] M. Althoff, G. Frehse, A. Girard, “Set propagation techniques for reachability analysis”, *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, **4**:1 (2021), 369–395.

[3] Б. Т. Поляк, *Введение в оптимизацию*, Наука, М., 1983; англ. пер.:B. T. Polyak, *Introduction to Optimization*, Optimization Software, New York, 1987.

[4] М. В. Балашов, Е. С. Половинкин, “ M -сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества”, *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 27–64; англ. пер.:M. V. Balashov, E. S. Polovinkin, “ M -strongly convex subsets and their generating sets”, *Sb. Math.*, **191**:1 (2000), 25–60.

[5] P. Cannarsa, H. Frankowska,, “Interior sphere property of attainable sets and time optimal control problems”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **12**:2 (2006), 350–370.

[6] J. Bolte, Sh. Sabach, M. Teboulle, “Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems”, *Mathematical Programming*, **146**:1–2 (2014), 459–494.

[7] M. V. Balashov, A. A. Tremba, “Error bound conditions and convergence of optimization methods on smooth and proximally smooth manifolds”, *Optimization*, **71**:3 (2022), 711-735.

[8] G. E. Ivanov, V. V. Goncharov, “Strong and weak convexity of closed sets in a Hilbert space”, *Operations Research, Engineering, and Cyber Security.* V. 113, Springer Optimization and Its Applications, eds. N. Daras, T. Rassias, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2017, 259–297.

Информация об авторе

Балашов Максим Викторович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: balashov73@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5414-2149

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Maxim V. Balashov, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: balashov73@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5414-2149

Received 22.05.2022
Reviewed 03.06.2022
Accepted for press 09.06.2022