

© Афанасьев А.П., Дзюба С.М., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142

УДК 517.938



О взаимоотношении движений динамических систем

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ^{1,2,3}, Сергей Михайлович ДЗЮБА⁴

¹ ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

² ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

³ ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

⁴ ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В более ранних статьях авторов [А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, «О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем», *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14] и [А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, «Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем», *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 5–15] фактически установлено взаимоотношение движений динамических систем в компактных метрических пространствах. Целью данной работы является распространение этих результатов на случай динамических систем в произвольных метрических пространствах.

Именно, пусть Σ – произвольное метрическое пространство. В настоящей статье, прежде всего, установлено новое важнейшее свойство, связывающее в таком пространстве произвольные и рекуррентные движения. Далее, на основании этого свойства показано, что если положительная (отрицательная) полутраектория некоторого движения $f(t, p)$, расположенного в Σ , относительно компактна, то ω - (α -) предельное множество данного движения – компактное минимальное множество. Из этого следует, что в пространстве Σ любое нерекуррентное движение является или положительно (отрицательно) уходящим, или положительно (отрицательно) асимптотическим по отношению к соответствующему минимальному множеству.

Ключевые слова: динамические системы в метрических пространствах, взаимоотношение движений

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00347_а), РНФ (проект № 22-11-00317).

Для цитирования: Афанасьев А.П., Дзюба С.М. О взаимоотношении движений динамических систем // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 136–142. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142.

© A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142



On the interrelation of motions of dynamical systems

Aleksandr P. AFANAS'EV^{1,2,3}, Sergei M. DZYUBA⁴

¹ Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation

² Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

³ Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklouho-Maclay St., Moscow 117198, Russian Federation

⁴ Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. In the earlier articles by the authors [A. P. Afanasiev, S. M. Dzyuba, “On new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14] and [A. P. Afanasiev, S. M. Dzyuba, “New properties of recurrent motions and limit motions sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 5–15], there was actually established the interrelation of motions of dynamical systems in compact metric spaces. The goal of this paper is to extend these results to the case of dynamical systems in arbitrary metric spaces.

Namely, let Σ be an arbitrary metric space. In this article, first of all, a new important property is established that connects arbitrary and recurrent motions in such a space. Further, on the basis of this property, it is shown that if the positive (negative) semitrajectory of some motion $f(t, p)$ located in Σ is relatively compact, then ω - (α -) limit set of the given motion is a compact minimal set. It follows, that in the space Σ , any nonrecurrent motion is either positively (negatively) outgoing or positively (negatively) asymptotic with respect to the corresponding minimal set.

Keywords: dynamical systems in metric spaces, interrelation of motions

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00347_a), Russian Science Foundation (project no. 22-11-00317).

Mathematics Subject Classification: 37B20, 37B25.

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. O vzaimootnoshenii dvizheniy dinamicheskikh sistem [On the interrelation of motions of dynamical systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 136–142. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В своей знаменитой книге [1] Дж. Биркгоф полно и подробно изложил основы общей теории динамических систем, которые по сей день во многом определяют развитие нелинейной динамики и ее приложений.

Конечной целью общей теории динамических систем является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [1, с. 194]).

Важнейшим из всех типов движений, как известно, является рекуррентное. Одна из главных заслуг Дж. Биркгофа состоит в том, что он фактически показал, что в метрическом пространстве Σ из существования движения $f(t, p)$, расположенного в компактном множестве $E \subset \Sigma$, следует существование рекуррентного движения $f(t, q)$, расположенного в компактном минимальном множестве $M \subset E$.

Хорошо известно, что каждое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону (см., например, [2, с. 402]). Дж. Биркгоф допускал, что существуют устойчивые по Пуассону нерекуррентные движения. Однако, ни примеров, ни критериев существования таких движений он не привел (см. [1, гл. VII]). Более того, до недавнего времени эта ситуация оставалась неизменной (см., например, [3, с. 1–4]).

Заметим теперь, что в работе [4] показано, что в компактном метрическом пространстве Σ устойчивость по Пуассону является лишь характеристическим свойством рекуррентности движений. Это позволяет установить взаимоотношение движений в произвольном метрическом пространстве Σ : *каждое нерекуррентное движение, расположенное в Σ , является или положительно (отрицательно) уходящим, или положительно (отрицательно) асимптотическим по отношению к соответствующему минимальному множеству.*

Основной целью настоящей работы является доказательство данного утверждения.

1. Произвольные и рекуррентные движения

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ и положим

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

- (а) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;
- (б) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

- (с) для всех $t, s \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда, следуя [2, с. 347], будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \rightarrow f(t, p)$ — *движение*.

Приведем определение рекуррентного движения, которое прочно устоялось в современных источниках (см., например, [2, с. 402]).

О п р е д е л е н и е 1.1. Движение $f(t, p)$ называется *рекуррентным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T_\varepsilon > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau, T_\varepsilon} = \{f(t, p): t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]\}$$

траектории

$$K = \{f(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию K с точностью ε , т. е. при заданном ε и соответствующем ему T_ε для всех $s \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ найдется такое $t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]$, что

$$d(f(s, p), f(t, p)) < \varepsilon.$$

Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см., например, [2, с. 400]). Кроме того, заметим, что в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}$ траектории K рекуррентного движения $f(t, p)$ является компактным минимальным множеством M , а каждое движение $f(t, p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M , рекуррентно (см. [2, с. 402, 404]).

Как известно, в метрическом пространстве Σ любое непустое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см., например, [2, с. 401]). Это фундаментальное утверждение дополняет следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если для заданного $p \in \Sigma$ положительная полутраектория*

$$K^+(p) = \{f(t, p) : t \geq 0\}$$

некоторого движения $f(t, p)$ относительно компактна, то для каждого положительного числа T из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что в ω -предельном множестве Ω движения $f(t, p)$ расположено рекуррентное движение $f(t, q)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) *равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$*

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(t + (N_{k_l} - 1)T, p) = f(t, q);$$

(ii) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, q) = f(t, q).$$

Доказательство. Так как полутраектория $K^+(p)$ относительно компактна, то ω -предельное множество Ω движения $f(t, p)$ непусто и компактно. Более того, для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ полутраектория

$$K_{t_0}(p) = \{f(t, p) : t \geq t_0\}$$

движения $f(t, p)$ также относительно компактна. Отсюда в силу теоремы 1 работы [5] следует справедливость утверждения теоремы 1.1. $\square$

З а м е ч а н и е 1.1. Вообще говоря, в условиях теоремы 1.1 выбор числа T не зависит от выбора последовательности $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и обратно. Более того, действуя как и выше, несложно показать, что имеет место следующее дополнение к теореме 1.1.

Если при заданном $p \in \Sigma$ отрицательная полутраектория

$$K^-(p) = \{f(t, p) : t \leq 0\}$$

некоторого движения $f(t, p)$ относительно компактна, то для каждого положительного числа T из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что в α -предельном множестве A движения $f(t, p)$ расположено рекуррентное движение $f(t, r)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(iii) равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(t - (N_{k_l} - 1)T, p) = f(t, r);$$

(iv) равномерно на всей оси $\mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(t - (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, r) = f(t, r).$$

Теорема 1.1, вообще говоря, определяет все последующие построения. Основное ее значение состоит в том, что из нее вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.2. Если положительная полутраектория $K^+(p)$ некоторого движения $f(t, p)$ относительно компактна, то ω -предельное множество Ω этого движения — компактное минимальное множество.

Доказательство. Для всех $N = 0, 1, \dots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t \rightarrow f(t + N + l, p), \quad l = 0, 1, \dots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\bar{P}_N$ — замыкание множества P_N . Положим

$$P = \bigcap_{N \geq 0} \bar{P}_N.$$

Очевидно, что

$$\bar{P}_0 \supset \bar{P}_1 \supset \dots \supset \bar{P}_N \supset \dots$$

Значит, для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$

$$P = \bigcap_{k \geq 1} \bar{P}_{N_k}. \quad (1.1)$$

Поскольку полутраектория $K^+(p)$ относительно компактна, то каждое из множеств P_N равномерно непрерывно (см., например, [6, с. 313]). Поэтому, действуя как и в [7, с. 105], несложно показать, что множество P непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно. Следовательно, P содержит компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество M .

В силу теоремы 1.1 и равенства (1.1) несложно заметить, что P — объединение компактных в топологии равномерной сходимости минимальных множеств. Теперь, действуя как и при доказательстве теоремы 2.2 работы [8], несложно показать, что M не является собственной частью P , т. е. что P — минимальное множество.

Заметим теперь, что по определению

$$\Omega = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} f(s, p)}.$$

Поэтому Ω — компактное минимальное множество. □

З а м е ч а н и е 1.2. Очевидно, что утверждение, аналогичное теореме 1.2, справедливо также для α -предельного множества A движения $f(t, p)$, если отрицательная полутраектория $K^-(p)$ этого движения относительно компактна (см. замечание 1.1).

2. Взаимоотношение движений

Напомним, что движение $f(t, p)$ называется *положительно асимптотическим* по отношению к своему ω -предельному множеству Ω , если $p \notin \Omega$ (см., например, [2, с. 363]). Аналогичным образом, движение $f(t, p)$ называется *отрицательно асимптотическим* по отношению к своему α -предельному множеству A , если $p \notin A$.

Будем говорить, что $f(t, p)$ — *положительно уходящее движение*, если его ω -предельное множество или пусто, или не компактно. Аналогичным образом, будем говорить, что $f(t, p)$ — *отрицательно уходящее движение*, если его α -предельное множество или пусто, или не компактно. Тогда, согласно теореме 1.2 и замечанию 1.2, взаимоотношение движений в пространстве Σ устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Любое нерекуррентное движение $f(t, p)$, расположенное в метрическом пространстве Σ , является или положительно (отрицательно) уходящим, или положительно (отрицательно) асимптотическим по отношению к компактному ω -предельному множеству Ω , совпадающему с минимальным множеством M^+ (соответственно, к компактному α -предельному множеству A , совпадающему с минимальным множеством M^-).*

Следствие 2.1. *Если пространство Σ компактно, то каждое нерекуррентное движение $f(t, p)$, расположенное в Σ , является как положительно, так и отрицательно асимптотическим по отношению к множествам $\Omega = M^+$ и $A = M^-$.*

References

- [1] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].
- [2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].
- [3] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC Publ., New York, 2009.
- [4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14 (In Russian)].
- [5] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Обобщенно-периодические движения неавтономных систем”, *Дифференц. уравнения*, **53**:1 (2017), 3–9; англ. пер.: A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “Generalized-periodic motions of nonautonomous systems”, *Differential Equations*, **53**:1 (2017), 1–7.
- [6] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, *Периодические и другие устойчивые по Пуассону движения динамических систем*, ВГУИТ, Воронеж, 2021. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, *Periodic and Others Poisson-stable Motions of Dynamical Systems*, VGUIT Publ., Voronezh, 2021 (In Russian)].
- [7] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].
- [8] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 5–15. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 5–15 (In Russian)].

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; профессор, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@iitp.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4171-5745>

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Дзюба Сергей Михайлович

E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2022 г.

Поступила после рецензирования 01.06.2022 г.

Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas'ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, Lomonosov Moscow State University; Professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@iitp.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4171-5745>

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Sergei M. Dzyuba

E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 15.03.2022

Reviewed 01.06.2022

Accepted for press 09.06.2022