

© Молчанов В.Ф., Цыкина С.В., 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-296-304

УДК 517.9



Символы в квантовании Березина для операторов представления

Владимир Федорович МОЛЧАНОВ, Светлана Викторовна ЦЫКИНА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В основе квантования по Березину на многообразии M лежит сопоставление, которое оператору A из некоторого класса соотносит пару функций F и $F^\natural$, определенных на M . Эти функции называются *ковариантным и контравариантным символами* оператора A . Мы интересуемся однородным пространством $M = G/H$ и классами операторов, связанными с теорией представлений. Самая алгебраическая версия квантования — мы называем ее *полиномиальным квантованием* — получается, когда операторы принадлежат алгебре операторов, отвечающих в данном представлении T группы G элементам X универсальной обертывающей алгебры $\text{Env } \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . В этом случае символы оказываются *многочленами* на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

В настоящей статье мы предлагаем новую тему в квантовании Березина на G/H : в качестве исходного класса операторов мы берем операторы, отвечающие элементам *самой* группы G в представлении T этой группы.

В статье мы рассматриваем два примера, в них однородные пространства — это параэрмитовы пространства ранга 1 и 2:

а) $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$, H — подгруппа диагональных матриц, G/H — однополостный гиперboloид в $\mathbb{R}^3$;

б) G — псевдоортогональная группа $\text{SO}_0(p, q)$, подгруппа H накрывает с конечной кратностью группу $\text{SO}_0(p-1, q-1) \times \text{SO}_0(1, 1)$; пространство G/H (псевдо-гассманово многообразие) есть орбита в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G .

Ключевые слова: группы Ли и алгебры Ли, псевдо-ортогональные группы, представления групп Ли, параэрмитовы симметрические пространства, квантование Березина, ковариантные и контравариантные символы

Для цитирования: Молчанов В.Ф., Цыкина С.В. Символы в квантовании Березина для операторов представления // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 296–304. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-296-304.



Symbols in Berezin quantization for representation operators

Vladimir F. MOLCHANOV, Svetlana V. TSYKINA

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The basic notion of the Berezin quantization on a manifold M is a correspondence which to an operator A from a class assigns the pair of functions F and $F^\sharp$ defined on M . These functions are called *covariant and contravariant symbols* of A . We are interested in homogeneous space $M = G/H$ and classes of operators related to the representation theory. The most algebraic version of quantization — we call it the *polynomial quantization* — is obtained when operators belong to the algebra of operators corresponding in a representation T of G to elements X of the universal enveloping algebra $\text{Env } \mathfrak{g}$ of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G . In this case symbols turn out to be *polynomials* on the Lie algebra $\mathfrak{g}$.

In this paper we offer a new theme in the Berezin quantization on G/H : as an initial class of operators we take operators corresponding to elements *of the group G itself* in a representation T of this group. In the paper we consider two examples, here homogeneous spaces are para-Hermitian spaces of rank 1 and 2:

a) $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$, H — the subgroup of diagonal matrices, G/H — a hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^3$;

b) G — the pseudoorthogonal group $\text{SO}_0(p, q)$, the subgroup H covers with finite multiplicity the group $\text{SO}_0(p-1, q-1) \times \text{SO}_0(1, 1)$; the space G/H (a pseudo-Grassmann manifold) is an orbit in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the group G .

Keywords: Lie groups and Lie algebras, pseudo-orthogonal groups, representations of Lie groups, para-Hermitian symmetric spaces, Berezin quantization, covariant and contravariant symbols

Mathematics Subject Classification: 22E46.

For citation: Molchanov V.F., Tsykina S.V. Simvol'y v kvantovanii Berezina dlya operatorov predstavleniya [Symbols in Berezin quantization for representation operators]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 296–304. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-296-304. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В основе квантования по Березину на однородном пространстве G/H лежит сопоставление, которое оператору A из некоторого класса соотносит пару функций F и $F^\natural$, определенных на G/H . Эти функции называются *ковариантным и контравариантным символами* оператора A . Для параэрмитовых симметрических пространств G/H квантование было предложено в [3].

Рассматриваемые операторы A берутся из некоторого класса. Мы интересуемся классами, связанными с теорией представлений. Самая алгебраическая версия квантования — мы называем ее *полиномиальным квантованием* — получается, когда операторы принадлежат алгебре операторов, отвечающих в данном представлении T элементам X универсальной обертывающей алгебры $\text{Env } \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , см., например, [1, 2, 4].

В настоящей статье мы предлагаем новую тему в квантовании. В качестве исходного класса операторов надо взять операторы, отвечающие элементам g самой группы G в представлении T . Результаты, полученные здесь, могут помочь и в изучении полиномиального квантования.

Мы рассматриваем два примера, в них G — это группа $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ и псевдоортогональная группа $\text{SO}_0(p, q)$. Однородные пространства здесь — это пара-эрмитовы пространства ранга 1 и 2.

1. Однополостный гиперboloид

Группа $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Введем обозначение:

$$t^{\lambda, \varepsilon} = |t|^\lambda (\text{sgnt})^\varepsilon, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon \in \{0, 1\}.$$

Для $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathbb{R})$ пространство функций f из $C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что функция

$$\hat{f}(t) = t^{2\sigma, \varepsilon} f(1/t)$$

тоже входит в $C^\infty(\mathbb{R})$. Представление $T_{\sigma, \varepsilon}$ группы G действует в $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathbb{R})$ по формуле:

$$(T_{\sigma, \varepsilon}(g)f)(t) = f\left(\frac{\alpha t + \gamma}{\beta t + \delta}\right) (\beta t + \delta)^{2\sigma, \varepsilon}. \quad (1.1)$$

Обозначим через $\hat{T}_{\sigma, \varepsilon}$ «контраградиентное» представление $g \mapsto T_{\sigma, \varepsilon}(\hat{g})$, где

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

так что

$$(\hat{T}_{\sigma, \varepsilon}(g)f)(t) = f\left(\frac{\delta t + \beta}{\gamma t + \alpha}\right) (\gamma t + \alpha)^{2\sigma, \varepsilon}. \quad (1.2)$$

Представления $T_{\sigma, \varepsilon}$ и $\hat{T}_{\sigma, \varepsilon}$ эквивалентны с помощью оператора $f \mapsto \hat{f}$.

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$, задаваемый формулой:

$$(A_{\sigma,\varepsilon}f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} N^{-2\sigma-2,\varepsilon} f(s) ds, \quad N = N(\xi, \eta) = 1 - \xi\eta,$$

сплетает $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}$:

$$\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}(g)A_{\sigma,\varepsilon} = A_{\sigma,\varepsilon}T_{\sigma,\varepsilon}(g),$$

а также $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{-\sigma-1,\varepsilon}$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ билинейную форму

$$[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Пусть $\mathcal{X}$ обозначает *однополостный гиперболоид* $[x, x] = 1$. Реализуем $\mathcal{X}$ как множество матриц

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 & 1 + x_3 \end{pmatrix}$$

с определителем равным нулю. Группа G действует транзитивно на этих матрицах сопряжениями: $x \mapsto g^{-1}xg$.

Введем на $\mathcal{X}$ *орисферические координаты* ξ, η :

$$x = \frac{1}{N} (\xi + \eta, \xi - \eta, 1 + \xi\eta),$$

отсюда

$$\frac{\xi}{N} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{\eta}{N} = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \frac{\xi\eta}{N} = \frac{x_3 - 1}{2}, \quad \frac{1}{N} = \frac{x_3 + 1}{2}, \quad (1.3)$$

в матричном виде получим:

$$x = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\eta \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Свяжем с переменными ξ, η два вектора — вектор-строку и вектор-столбец:

$$u = u(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad v = v(\eta) = \begin{pmatrix} -\eta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x = \frac{vu}{uv}, \quad N = uv. \quad (1.4)$$

Фиксируем σ, ε . В качестве исходного класса операторов мы берем класс операторов $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$, $g \in G$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi, \eta) = \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)^{2\sigma,\varepsilon} \quad (1.5)$$

от двух переменных ξ, η .

В соответствии с общей схемой (см. [3]) *ковариантным символом* и *контравариантным символом* оператора $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$ мы называем соответственно функции

$$F_g(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi, \eta)} (T_{\sigma,\varepsilon}(g) \otimes 1) \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi, \eta), \quad (1.6)$$

$$F_g^{\natural}(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi_{-\sigma-1, \varepsilon}(\xi, \eta)} (1 \otimes T_{-\sigma-1, \varepsilon}(\widehat{g})) \Phi_{-\sigma-1, \varepsilon}(\xi, \eta). \quad (1.7)$$

Рассмотрим ξ, η как орисферические координаты на $\mathcal{X}$. Тогда функции (1.6), (1.7) превратятся в функции на $\mathcal{X}$.

Теорема 1.1. *Ковариантный и контравариантный символы оператора $T_{\sigma, \varepsilon}(g)$, $g \in G$, — это следующие функции на гиперboloиде $\mathcal{X}$, соответственно:*

$$F_g(x) = (\operatorname{tr}(xg))^{2\sigma, \varepsilon} \quad (1.8)$$

$$= \left(\frac{ugv}{uv} \right)^{2\sigma, \varepsilon} \quad (1.9)$$

$$F_g^{\natural}(x) = \operatorname{tr}(g^{-1}x)^{-2\sigma-2, \varepsilon} \quad (1.10)$$

$$= \left(\frac{ug^{-1}v}{uv} \right)^{-2\sigma-2, \varepsilon}. \quad (1.11)$$

Доказательство. Сначала докажем (1.8), (1.9). По (1.6), (1.5), (1.1) получаем:

$$\begin{aligned} F_g(\xi, \eta) &= \frac{1}{N^{2\sigma, \varepsilon}} \left(1 - \frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta} \eta \right)^{2\sigma, \varepsilon} (\beta\xi + \delta)^{2\sigma, \varepsilon} \\ &= \left(\frac{\beta\xi + \delta - \alpha\xi\eta - \gamma\eta}{N} \right)^{2\sigma, \varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Как легко проверить, числитель в (1.12) есть в точности $u(\xi)gv(\eta)$, вместе с (1.4) это доказывает (1.9). Формула (1.8) следует из (1.12) и (1.3).

Теперь докажем (1.10), (1.11). По (1.7), (1.5), (1.2) получаем:

$$\begin{aligned} F_g^{\natural}(\xi, \eta) &= \frac{1}{N^{-2\sigma-2, \varepsilon}} \left(1 - \xi \frac{\delta\eta + \beta}{\gamma\eta + \alpha} \right)^{-2\sigma-2, \varepsilon} (\gamma\eta + \alpha)^{-2\sigma-2, \varepsilon} \\ &= \left(\frac{\gamma\eta + \alpha - \delta\xi\eta - \beta\xi}{N} \right)^{-2\sigma-2, \varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Поскольку

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

то числитель в (1.12) есть в точности $u(\xi)g^{-1}v(\eta)$, вместе с (1.4) это доказывает (1.11). Формула (1.10) следует из (1.13) и (1.3). $\square$

2. Псевдо-гассманово многообразие ранга 2

В этом параграфе мы рассматриваем пара-эрмитово симметрическое пространство G/H ранга 2 с псевдо-ортогональной группой $G = \operatorname{SO}_0(p, q)$. Связная компонента единицы группы H есть $H_e = \operatorname{SO}_0(p-1, q-1) \times \operatorname{SO}_0(1, 1)$. Мы считаем, что G/H есть G -орбита в присоединенном представлении группы G . Размерность пространства G/H равна $2n-4$, где $n = p+q$.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x, y] = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = xy^*,$$

где $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = -1$, $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 1$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ — векторы из $\mathbb{R}^n$, $y^* = Iy'$, штрих означает транспонирование, $I = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Пусть $G = \text{SO}_0(p, q)$ — связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с определителем 1, сохраняющих форму $[x, y]$, так что для $g \in G$ выполняется

$$g' = Ig^{-1}I. \quad (2.1)$$

Мы будем считать, что G действует линейно в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p > 1$, $q > 1$.

Напомним представления группы G , связанные с конусом. Пусть $\mathcal{C}$ — конус $[x, x] = 0$, $x \neq 0$, в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Возьмем в конусе две точки

$$s^- = (1, 0, \dots, 0, -1), \quad s^+ = (1, 0, \dots, 0, 1).$$

Рассмотрим следующие сечения конуса (проходящие через эти точки соответственно):

$$\Gamma^- = \{x_1 - x_n = 2\}, \quad \Gamma^+ = \{x_1 + x_n = 2\}.$$

Они пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе порождает соответствующие дробно-линейные действия на сечениях:

$$x \mapsto \tilde{x} = -\frac{2}{[xg, s^+]} \cdot xg, \quad x \in \Gamma^-, \quad (2.2)$$

$$x \mapsto \hat{x} = -\frac{2}{[xg, s^-]} \cdot xg, \quad x \in \Gamma^+. \quad (2.3)$$

Введем на Γ^- и Γ^+ координаты с помощью векторов ξ и η из $\mathbb{R}^{n-2}$, а именно, для точек $u \in \Gamma^-$ и $v \in \Gamma^+$ положим:

$$u = u(\xi) = (1 + \langle \xi, \xi \rangle, 2\xi, -1 + \langle \xi, \xi \rangle), \quad (2.4)$$

$$v = v(\eta) = (1 + \langle \eta, \eta \rangle, 2\eta, 1 - \langle \eta, \eta \rangle), \quad (2.5)$$

где $\langle \varphi, \psi \rangle$ обозначает билинейную форму в $\mathbb{R}^{n-2}$ с матрицей $I_1 = \text{diag}\{\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$.

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathcal{C})$ пространство функций f класса C^∞ на конусе $\mathcal{C}$, однородных «степени σ, ε »:

$$f(tx) = t^{\sigma, \varepsilon} f(x), \quad x \in \mathcal{C}, \quad t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Представление $T_{\sigma, \varepsilon}$ группы G действует в $\mathcal{D}_{\sigma, \varepsilon}(\mathcal{C})$ сдвигами:

$$(T_{\sigma, \varepsilon}(g)f)(x) = f(xg).$$

Реализуем его в функциях на сечениях $\Gamma^\pm$ конуса $\mathcal{C}$. В координатах ξ, η представление $T_{\sigma, \varepsilon}$ группы G действует по формулам

$$(T_{\sigma, \varepsilon}(g)f)(\xi) = f(\tilde{\xi}) \left\{ -\frac{1}{2}[ug, s^+] \right\}^{\sigma, \varepsilon}, \quad (2.6)$$

$$(T_{\sigma, \varepsilon}(g)f)(\eta) = f(\hat{\eta}) \left\{ -\frac{1}{2}[vg, s^-] \right\}^{\sigma, \varepsilon}, \quad (2.7)$$

где $u = u(\xi)$, $v = v(\eta)$ определены в (2.4), (2.5), действия $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ и $\eta \mapsto \hat{\eta}$ порождаются действиями (2.2), (2.3).

Определим оператор $A_{\sigma, \varepsilon}$:

$$(A_{\sigma, \varepsilon} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} N(\xi, \eta)^{2-n-\sigma, \varepsilon} f(\eta) d\eta,$$

где

$$N(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} [u, v] = -\frac{1}{2} uv^* = 1 - 2\langle \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle.$$

Функция $N(\xi, \eta)$ есть многочлен от ξ, η . Оператор $A_{\sigma, \varepsilon}$ сплетает представления $T_{\sigma, \varepsilon}$ и $T_{2-n-\sigma, \varepsilon}$. Эти представления действуют в функциях на *разных* сечениях.

Реализуем пространство G/H как множество Ω матриц:

$$z = \frac{y^* x}{[x, y]} = \frac{y^* x}{xy^*}, \quad x, y \in \mathcal{C}.$$

Ранг и след этих матриц равны 1. Присоединенное действие $z \mapsto g^{-1}zg$ сохраняет Ω . Возьмем в качестве x, y векторы $u = u(\xi)$ и $v = v(\eta)$, (см. (2.4), (2.5)). Получаем вложение $\Gamma^- \times \Gamma^+ \rightarrow \Omega$, задаваемое формулой

$$z = z(\xi, \eta) = \frac{v^* u}{[u, v]} = \frac{v^* u}{uv^*}, \quad u = u(\xi), \quad v = v(\eta) \quad (2.8)$$

(определенное почти всюду: $N(\xi, \eta) \neq 0$). Поэтому ξ, η являются локальными координатами на Ω . Присоединенное действие группы G на Ω сводится к ее действию на ξ и на η .

Фиксируем σ, ε . Как в п. 1.1, в качестве исходного класса операторов мы берем класс операторов $T_{\sigma, \varepsilon}(g)$, $g \in G$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{-\sigma-1, \varepsilon}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi, \eta) = \Phi_{\sigma, \varepsilon}(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)^{\sigma, \varepsilon}. \quad (2.9)$$

Ковариантный символ и контравариантный символ оператора $T_{\sigma, \varepsilon}(g)$ определяются в точности формулами (1.6) и (1.7), но в (1.7) надо вместо $-\sigma - 1$ взять $2 - n - \sigma$. Будучи функциями от ξ, η , они являются функциями на Ω .

Теорема 2.1. *Ковариантный и контравариантный символы оператора $T_{\sigma, \varepsilon}(g)$, $g \in G$, — это следующие функции на пространстве Ω , соответственно:*

$$F_g(z) = (\text{tr}(zg))^{\sigma, \varepsilon} \quad (2.10)$$

$$= \left(\frac{ugv^*}{uv^*} \right)^{\sigma, \varepsilon} \quad (2.11)$$

$$F_g^\natural(z) = (\text{tr}(g^{-1}z))^{2-n-\sigma, \varepsilon} \quad (2.12)$$

$$= \left(\frac{ug^{-1}v^*}{uv^*} \right)^{2-n-\sigma, \varepsilon}. \quad (2.13)$$

Доказательство. Сначала докажем (2.10), (2.11). По (1.6), (2.9), (2.6) получаем:

$$\begin{aligned} F_g(\xi, \eta) &= \frac{1}{N^{\sigma, \varepsilon}} \left(\frac{[ug, v]}{[ug, s^+]} \right)^{\sigma, \varepsilon} \left(-\frac{1}{2}[ug, s^+] \right)^{\sigma, \varepsilon} \\ &= \left(\frac{[ug, v]}{[u, v]} \right)^{\sigma, \varepsilon} \\ &= \left(\frac{ugv^*}{uv^*} \right)^{\sigma, \varepsilon}. \end{aligned}$$

Это доказывает (2.11). По (2.8) имеем

$$\mathrm{tr}(zg) = \mathrm{tr} \frac{v^*ug}{uv^*} = \frac{ugv^*}{uv^*}, \quad (2.14)$$

откуда следует (2.10).

Теперь докажем (2.12), (2.13). По (1.7), (2.9), (2.7) получаем:

$$\begin{aligned} F_g^\natural(\xi, \eta) &= \frac{1}{N^{2-n-\sigma, \varepsilon}} \left(\frac{[u, vg]}{[vg, s^-]} \right)^{2-n-\sigma, \varepsilon} \left(-\frac{1}{2}[vg, s^-] \right)^{2-n-\sigma, \varepsilon} \\ &= \left(\frac{[u, vg]}{[u, v]} \right)^{2-n-\sigma, \varepsilon} \\ &= \left(\frac{u(vg)^*}{uv^*} \right)^{2-n-\sigma, \varepsilon}. \end{aligned}$$

В силу (2.1) имеем $(vg)^* = g^{-1}v^*$. Это дает (2.13). Теперь по (2.14) получаем (2.12). $\square$

References

- [1] В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова, С. В. Цыкина, О. В. Гришина, “Полиномиальное квантование”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:6-3 (2009), 1443–1474. [V. F. Molchanov, N. B. Volotova, S. V. Tsykina, O. V. Grishina, “Polynomial quantization”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:6-3 (2009), 1443–1474 (In Russian)].
- [2] С. В. Цыкина, “Символы в полиномиальном квантовании: явные формулы”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 838–845. [S. V. Tsykina, “Symbols in polynomial quantization: explicit formulas”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 838–845 (In Russian)].
- [3] V. F. Molchanov, “Quantization on para-Hermitian symmetric spaces”, *Contemporary Mathematical Physics*, American Mathematical Society. Translations: Series 2, **175**, eds. R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, A. M. Vershik, 1996, 81–95.
- [4] V. F. Molchanov, N. B. Volotova, “Finite-dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **3**:1 (1998), 65–78.

Информация об авторах

Молчанов Владимир Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: v.molchanov@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4065-2649>

Information about the authors

Vladimir F. Molchanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: v.molchanov@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4065-2649>

Цыкина Светлана Викторовна, старший преподаватель кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: tsykinasv@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4511-8710>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Молчанов Владимир Федорович
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Поступила в редакцию 30.07.2021 г.
Поступила после рецензирования 28.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Svetlana V. Tsykina, Senior Lecturer of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: tsykinasv@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4511-8710>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Vladimir F. Molchanov
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Received 30.07.2021
Reviewed 28.08.2021
Accepted for press 10.09.2021