ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233
УДК 517.922, 517.927.4

О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка

Сарра БЕНАРАБ

Лаборатория прикладной математики и моделирования,
Университет 8 Мая 1945 г. – Гельма
24000, Алжир, г. Гельма, п.я. 401

Аннотация. Рассматривается задача Коши для неявного дифференциального уравнения n-го порядка

$$g(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n)})=0, \quad t\in[0,T], \quad x(0)=A.$$

Предполагается, что $A=(A_0,\ldots,A_{n-1})\in\mathbb{R}^n$, функция $g:[0,T]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ измерима по первому аргументу $t\in[0,T]$, а при фиксированном t функция $g(t,\cdot):\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ непрерывна справа и монотонна по каждому из первых n аргументов, а по последнему $n+1$-му аргументу непрерывна. Также предполагается, что для некоторых достаточно гладких функций η,ν справедливы неравенства

$$\nu^{(i)}(0)\ge A_i\ge\eta^{(i)}(0), \quad i=\overline{0,n-1}, \quad \nu^{(n)}(t)\ge\eta^{(n)}(t), \quad t\in[0,T];$$
$$g\big(t,\nu(t),\dot{\nu}(t),\ldots,\nu^{(n)}(t)\big)\ge 0, \quad g\big(t,\eta(t),\dot{\eta}(t),\ldots,\eta^{(n)}(t)\big)\le 0, \quad t\in[0,T].$$

Получены достаточные условия разрешимости и оценки решений рассматриваемой задачи Коши, кроме того, при выполнении этих условий множество решений, удовлетворяющих неравенствам $\eta^{(n)}(t)\le x^{(n)}(t)\le\nu^{(n)}(t)$, не пусто, и в этом множестве содержатся решения с наибольшей и наименьшей n-й производной. Это утверждение аналогично классической теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Метод доказательства использует результаты о разрешимости уравнений в частично упорядоченных пространствах. Приведены примеры применения полученных результатов к исследованию неявных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение n-го порядка, наибольшее и наименьшее решения, оценки решений, теорема Чаплыгина о дифференциальном неравенстве

Для цитирования: *Бенараб С.* О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 225–233. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233

On Chaplygin's theorem for an implicit differential equation of order n

Sarra BENARAB
Applied Mathematics and Modeling Laboratory,
University 8 May 1945 – Guelma
B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

Abstract. We consider the Cauchy problem for the implicit differential equation of order n

$$g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = A.$$

It is assumed that $A = (A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,$ the function $g : [0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ is measurable with respect to the first argument $t \in [0, T],$ and for a fixed t, the function $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ is right continuous and monotone in each of the first n arguments, and is continuous in the last $n+1$-th argument. It is also assumed that for some sufficiently smooth functions η, ν, there hold the inequalities

$$\nu^{(i)}(0) \geq A_i \geq \eta^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad \nu^{(n)}(t) \geq \eta^{(n)}(t), \quad t \in [0, T];$$
$$g\big(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \ldots, \nu^{(n)}(t)\big) \geq 0, \quad g\big(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \ldots, \eta^{(n)}(t)\big) \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

Sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem are derived as well as estimates of its solutions. Moreover, it is shown that under the listed conditions, the set of solutions satisfying the inequalities $\nu^{(n)}(t) \leq x^{(n)}(t) \leq \nu^{(n)}(t)$ is not empty and contains solutions with the largest and the smallest n-th derivative. This statement is similar to the classical Chaplygin theorem on differential inequality. The proof method uses results on the solvability of equations in partially ordered spaces. Examples of applying the results obtained to the study of second-order implicit differential equations are given.

Keywords: implicit differential equation of order n, largest and smallest solutions, estimates of solutions, Chaplygin's theorem on differential inequality

Mathematics Subject Classification: 34A09, 34A40, 34B10.

For citation: Benarab S. O teoreme Chaplygina dlya neyavnogo differentsial'nogo uravneniya n-go poryadka [On Chaplygin's theorem for an implicit differential equation of order n]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 225–233. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В теореме Чаплыгина (см. [1], а также [2]) утверждается, что если функция $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна и для некоторой функции ϑ выполнено $\dot\vartheta(t)>f(t,\vartheta(t)),\quad t\geq 0,$ то любое решение уравнения $\dot x=f(t,x),\quad t\geq 0,$ с начальным условием $x(0)\leq\vartheta(0)$ удовлетворяет неравенству $x(t)<\vartheta(t),\quad t>0.$ Распространению теоремы Чаплыгина на задачу Коши и краевые задачи для систем дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, использованию полученных неравенств в теории таких уравнений посвящены многочисленные работы. Значимые результаты получены Н.В. Азбелевым, М.А. Красносельским, Я.Д. Мамедовым, А.И. Перовым, З.Б. Цалюком (см. статьи из собрания сочинений Н.В. Азбелева [3, раздел 1] и имеющуюся там библиографию). До недавнего времени недостаточно изученными оставались вопросы о неравенствах типа Чаплыгина для неявных (не разрешенных относительно производной) дифференциальных уравнений. Новые возможности в исследовании неявных дифференциальных уравнений появились благодаря работам А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского и др. авторов (см. [4–9]) об уравнениях с накрывающими отображениями, действующими в частично упорядоченных пространствах. С использованием этих результатов в работах [10–12] были получены утверждения типа теоремы Чаплыгина для скалярных неявных дифференциальных уравнений первого порядка и интегральных уравнений. В работе [13] были получены результаты об абстрактных неравенствах, порожденных отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество, и на этой основе доказаны теоремы типа Чаплыгина о решениях краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений первого порядка (причем, в предположениях, ослабляющих «стандартные» условия непрерывности и монотонности по фазовым переменным на функций, порождающих уравнения). Это исследование было продолжено в [14], где для периодической задачи было показано существование наибольшего и наименьшего относительно специального порядка решений. В данной работе результаты [13] используются для исследования неявного дифференциального уравнения n-го порядка.

Статья разделена на три секции. В секции 1. приведены необходимые обозначения. В секции 2. сформулировано утверждение о разрешимости и оценке решения системы неявных дифференциальных уравнений первого порядка, распространяющее результаты [13, теорема 2] на случай более общего отношения порядка в пространстве векторных измеримых функций. На основании этого утверждения в секции 3. получено утверждение типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для неявного дифференциального уравнения n-го порядка и приведены иллюстративные примеры.

1. Основные обозначения

Обозначим через M пространство измеримых (по Лебегу) на $[0,T]$ вещественных функций, и через L его подпространство суммируемых на $[0,T]$ вещественных функций. Определим в M (и соответственно, в L) «естественный» порядок:

$$\forall u,v\in M\quad u\leq v\ \Leftrightarrow\ u(t)\leq v(t)\ \text{ при п.в. }\ t\in[0,T].$$

Обозначим через AC пространство определенных на $[0,T]$ абсолютно непрерывных вещественных функций, а через AC_m — пространство $m-1$ раз дифференцируемых на $[0,T]$ функций, имеющих абсолютно непрерывную $m-1$-ю производную, таким образом, для $x \in AC_m$ выполнено

$$x^{(m)} \in L \ \text{ и } \ x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}x^{(m-1)}(0) + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^t (t-s)x^{(m)}(s)ds.$$

Для обозначения декартова произведения n множеств стандартно используем верхний индекс n (например, M^n, AC^n). В произведении M^n порядок будем задавать следующим образом. Пусть множества I_+ и I_- осуществляют разбиение множества $I := \{1, 2, \ldots, n\}$. Для $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in M^n$ полагаем

$$y \preceq z \ \Leftrightarrow \ \big(y_i \le z_i \text{ при } i \in I_+ \text{ и } y_i \ge z_i \text{ при } i \in I_- \big). \tag{1.1}$$

2. Система дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

где $f_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, некоторые заданные функции. Под решением системы (2.1) понимаем функцию $x \in AC^n$, удовлетворяющую всем уравнениям этой системы при п.в. $t \in [0, T]$.

Сформулируем достаточно очевидное распространение результатов [13, теорема 2] на случай более общего отношения порядка (1.1) в пространстве M^n векторных измеримых функций.

Теорема 2.1. *Пусть при всех $i = \overline{1, n}$ выполнено условие*

(F↓) *при п.в. $t \in [0, T]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $f_i(\cdot, x, v, y_i) : [0, T] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f_i(t, \cdot, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна справа по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$ и $v_1, \ldots, v_n$, а также убывает в случае $i \in I_+$ и возрастает в случае $i \in I_-$, функция $f_i(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Пусть для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что $\nu(0) \ge \eta(0)$ и $\dot{\nu} \ge \dot{\eta}$, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \ge 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \le 0, \quad t \in [0, T], \quad i = I_+; \\ &f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \le 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \ge 0, \quad t \in [0, T], \quad i = I_-. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тогда для любого $A = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\eta_i(0) \le A_i \le \nu_i(0)$, $i = \overline{1, n}$, существует решение $x \in AC^n$ задачи Коши для системы (2.1) с начальным условием

$$x(0) = A, \tag{2.3}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta}_i(t) \le \dot{x}_i(t) \le \dot{\nu}_i(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 2.1 полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы 2 из работы [13], если на множестве M^n задать отношение порядка (1.1). Также теорема 2.1 может быть выведена из [13, теорема 2], для этого достаточно применить [13, теорема 2] к следующей системе, которая равносильна исходной системе (2.1):

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i \in I_+; \quad -f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i \in I_-.$$

З а м е ч а н и е 2.1. В отличие от большинства исследований дифференциальных уравнений в теореме 2.1 и в [13, теорема 2] функции f_i, $i = \overline{1, n}$, по второму и третьему аргументам не предполагаются непрерывными, т. е. эти функции не удовлетворяют условиям Каратеодори. Но так как выполнено условие (F↓), композиция $f_i(\cdot, x(\cdot), u(\cdot), y_i)$ является измеримой при любых $x, u \in M^n$. Это свойство суперпозиционной измеримости следует из результатов [15].

П р е д л о ж е н и е 2.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 во множестве решений задачи (2.1), (2.3), удовлетворяющих неравенствам (2.4), существуют решения с наименьшей и наибольшей производной (и поэтому соответствующие решения являются наименьшим и наибольшим в этом множестве).*

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения о решениях периодической краевой задачи в работе [14] и основано на результатах [13] о минимальном / максимальном решениях операторных уравнений и свойствах оператора Немыцкого.

3. Дифференциальное уравнение n-го порядка

Пусть задана функция $g : [0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим неявное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

«Стандартной подстановкой» $x_1 = x$, $x_{i+1} = \dot{x}_i$, $i = \overline{1, n-1}$, уравнение (3.1) записывается в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - x_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{n-1} - x_n = 0, \\ g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_n) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

к которой можно применить вышеизложенные результаты. В определении порядка на множестве M^n положим $I_+ = I$, $I_- = \emptyset$. Таким образом, из теоремы 2.1 и предложения 2.1 получаем следующее утверждение типа теоремы Чаплыгина для уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть при любом* $(x_1, \ldots, x_n, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *функция* $g(\cdot, x_1, \ldots, x_n, v) : [0, T] \to \mathbb{R}$ *измерима, а при п.в.* $t \in [0, T]$ *функция* $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *по каждому из первых* n *аргументов* $x_1, \ldots, x_n$ *убывает и непрерывна справа, а по последнему аргументу* v *является непрерывной. Пусть для функций* $\nu, \eta \in AC_n$ *выполнены неравенства*

$$\nu^{(i)}(0) \geq \eta^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad \nu^{(n)}(t) \geq \eta^{(n)}(t), \quad t \in [0, T];$$
$$\nu^{(i+1)}(t) \geq \nu^{(i)}(t), \quad i = \overline{0, n-2}, \quad g\big(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \ldots, \nu^{(n)}(t)\big) \geq 0, \quad t \in [0, T];$$
$$\eta^{(i+1)}(t) \leq \eta^{(i)}(t), \quad i = \overline{0, n-2}, \quad g\big(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \ldots, \eta^{(n)}(t)\big) \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда для любого $A = (A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $\eta^{(i)}(0) \le A_i \le \nu^{(i)}(0)$ *при всех* $i = \overline{0, n-1}$, *существует решение* $x \in AC_n$ *задачи Коши для уравнения* (3.1) *с начальным условием*

$$x(0) = A_0, \ \ldots, \ x^{(n-1)}(0) = A_{n-1}, \tag{3.3}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\eta^{(n)}(t) \le x^{(n)}(t) \le \nu^{(n)}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Кроме того, во множестве решений задачи (3.1), (3.3), *удовлетворяющих неравенствам* (3.4), *существуют решения с наименьшей и наибольшей производной* n *-го порядка.*

Сформулируем частный случай теоремы 3.1 — утверждение о разрешимости неявного уравнения второго порядка

$$g(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

Следствие 3.1. *Пусть при всех* $(x_1, x_2, v) \in \mathbb{R}^3$ *функция* $g(\cdot, x_1, x_2, v) : [0, T] \to \mathbb{R}$ *измерима, при п.в.* $t \in [0, T]$ *функция* $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *по первому и второму аргументам* x_1, x_2 *убывает и непрерывна справа, а по третьему аргументу* v *является непрерывной. Пусть для функций* $\nu, \eta \in AC_2$ *выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} &\nu(0) \ge \eta(0), \ \ \dot{\nu}(0) \ge \dot{\eta}(0), \quad \ddot{\nu}(t) \ge \ddot{\eta}(t), \ \ t \in [0, T]; \\ &\dot{\nu}(t) \ge \nu(t), \qquad g\big(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \ddot{\nu}(t)\big) \ge 0, \quad t \in [0, T]; \\ &\dot{\eta}(t) \le \eta(t), \qquad g\big(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \ddot{\eta}(t)\big) \le 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Тогда для любых $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$ *таких, что* $\eta(0) \le A_0 \le \nu(0)$, $\dot{\eta}(0) \le A_1 \le \dot{\nu}(0)$, *существует решение* $x \in AC_2$ *задачи Коши для уравнения* (3.5) *с начальным условием*

$$x(0) = A_0, \quad \dot{x}(0) = A_1, \tag{3.6}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\ddot{\eta}(t) \le \ddot{x}(t) \le \ddot{\nu}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.7}$$

Кроме того, во множестве решений задачи (3.5), (3.6), *удовлетворяющих неравенствам* (3.7), *существуют решения с наименьшей и наибольшей второй производной.*

Проиллюстрируем полученные утверждения исследованием конкретных дифференциальных уравнений.

П р и м е р 3.1. Пусть заданы неотрицательные числа $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Рассмотрим на полуоси $t \ge 0$ задачу Коши для уравнения

$$\ddot{x}^2 = \bar{a}\dot{x} + \bar{b}x + \bar{c} \tag{3.8}$$

с начальным условием

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1 \tag{3.9}$$

(частный случай уравнения (3.8) см. [17, с. 521, уравнение 6.236]). Покажем, что для этой задачи выполнены условия следствия 3.1.

Выберем произвольное $T > 0$. Определим функцию

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(t, x_1, x_2, v) := v^2 - \bar{a}x_1 - \bar{b}x_2 - \bar{c}.$$

Эта функция измерима по первому аргументу, непрерывна по остальным трем аргументам, убывает по второму и третьему аргументам. Определим также функции $\nu, \eta \in AC_2$ формулами

$$\eta(t) := 1, \quad \nu(t) := \mathcal{A}\exp(t), \quad \text{где} \quad \mathcal{A} = \max\Big\{1, \frac{1}{2}\big(\bar{a} + \bar{b} + \sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2 + 4\bar{c}}\,\big)\Big\}.$$

Непосредственными вычислениями легко проверяется, что эти функции удовлетворяют требованиям следствия 3.1. Таким образом, в силу следствия 3.1, можно утверждать, что существует решение $x \in AC_2$ задачи (3.8), (3.9), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \le \ddot{x}(t) \le \mathcal{A}\exp(t), \quad t \in [0,T],$$

и во множестве решений задачи (3.8), (3.9), удовлетворяющих этим неравенствам, есть решения с наименьшей и наибольшей второй производной. А так как число $T > 0$ может быть любым, то соответствующее утверждение справедливо при $t \in [0, \infty)$.

Отметим, что полученное утверждение справедливо и для более общего уравнения

$$\ddot{x}^2 = a(t)\dot{x} + b(t)x + c(t)$$

с переменными коэффициентами — измеримыми неотрицательными функциями, удовлетворяющими неравенствам

$$a(t) \le \bar{a}, \quad b(t) \le \bar{b}, \quad c(t) \le \bar{c}. \tag{3.10}$$

П р и м е р 3.2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}^2 = \bar{a}\chi(\dot{x}) + \bar{b}\chi(x) + \bar{c}, \quad t \ge 0, \tag{3.11}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{3.12}$$

Здесь $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \ge 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$ Для исследования этого неявного дифференциального уравнения многие известные методы не применимы еще и потому, что правая часть является разрывной по x и $\dot{x}$ функцией.

Для произвольного $T > 0$ определим функцию

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(t, x_1, x_2, v) := v^2 - \bar{a}\chi(x_1) - \bar{b}\chi(x_2) - \bar{c}.$$

Эта функция измерима по первому аргументу, непрерывна справа и убывает по второму и третьему аргументам, непрерывна по третьему аргументу. Определим функции $\nu, \eta \in AC_2$ формулами

$$\eta(t) := 0, \quad \nu(t) := \exp(\lambda t), \quad \text{где} \quad \lambda = \max\big\{1, \sqrt{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}\,\big\}.$$

Определенные здесь функции удовлетворяют требованиям следствия 3.1. Поэтому, согласно следствию 3.1, существует решение $x \in AC_2$ задачи (3.11), (3.12), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \le \ddot{x}(t) \le \lambda^2 \exp(\lambda t),$$

во множестве решений задачи (3.8), (3.9), удовлетворяющих этим неравенствам, есть решения с наименьшей и наибольшей второй производной. Данное утверждение также справедливо и для более общего уравнения

$$\ddot{x}^2 = a(t)\chi(\dot{x}) + b(t)\chi(x) + c(t),$$

где измеримые неотрицательные функциями a, b, c удовлетворяют неравенствам (3.10).

References

[1] С. А. Чаплыгин, "Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений", *Собрание сочинений.* Т. I, Гостехиздат, М., 1948, 348–368. [S. A. Chaplygin, "Foundations of a new method of approximate integration of differential equations", *Collected Works.* V. I, Gostekhizdat, Moscow, 1948, 348–368 (In Russian)].

[2] Н. Н. Лузин, "О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина", *УМН*, **6**:46 (1951), 3–27. [N. N. Luzin, "On the method of approximate integration of academician S. A. Chaplygin", *Uspekhi Mat. Nauk*, **6**:46 (1951), 3–27 (In Russian)].

[3] *Избранные труды Н. В. Азбелева*, ред. В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2012. [V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Selected Works of N. V. Azbelev*, Institute for Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2012 (In Russian)].

[4] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств", *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On the cardinality of the set of coincidence points of mappings in metric, normed and partially ordered spaces", *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[5] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On coincidence points of mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.

[6] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:6 (2013), 595–598; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 727–729.

[7] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **201** (2016), 330–343.

[8] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13-33.

[9] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, И. Д. Серова, "Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств", *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:132 (2020), 345–358. [T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, I. D. Serova, "Some questions of the analysis of mappings of metricand partially ordered spaces", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 345–358 (In Russian)].

[10] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина", *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities", *St. Petersburg Math. J.*, **30**:1 (2019), 73–94.

[11] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах", *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On Ordered-Covering Mappings and Implicit Differential Inequalities", *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[12] Т. В. Жуковская, И. Д. Серова, "Об оценке решения краевой задачи для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом", *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, № 186, 38–44. [T. V. Zhukovskaya, I. D. Serova, "On estimates of solutions of boundary-value problems for implicit differential equations with deviating argument", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 2020, № 186, 38–44 (In Russian)].

[13] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2021), 1471–1482; англ. пер.:S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Functional and differential inequalities and their applications to control problems”, *Differential Equations*, **56**:11 (2021), 1440–1451.

[14] С. Бенараб, “Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 216–220. [S. Benarab, “Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 216–220 (In Russian)].

[15] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superpositional measurability under generalized caratheodory conditions”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[16] Н. В. Азбелев, “Как это было (Об основных этапах развития современной теории функционально дифференциальных уравнений)”, *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*, **9**:1(17) (2003), 1–22. [N. V. Azbelev, “How it was (On the main stages of development of modern theory of functional differential equations)”, *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, **9**:1(17) (2003), 1–22 (In Russian)].

[17] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976, 589 с. [E. Kamke, *Ordinary Differential Equations Handbook*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian), 589 pp.]

Информация об авторе

Бенараб Сарра, аспирант, Лаборатория прикладной математики и моделирования. Университет 8 мая 1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.
Поступила после рецензирования 21.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the author

Sarra Benarab, Post-Graduate Student. Applied Mathematics and Modeling Laboratory. University May 8, 1945 – Guelma, Guelma, Algeria. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Received 15.06.2021
Reviewed 21.08.2021
Accepted for press 10.09.2021