

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Рыбаков М.А., Трофимова А.С., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267>

УДК 517.951



Метод приближенного решения уравнений в частных производных

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ¹, Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ^{2,3},
Михаил Анатольевич РЫБАКОВ², Анна Сергеевна ТРОФИМОВА^{2,3}

¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106/5

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

³ ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. В статье рассматривается уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0,$$

относительно неизвестной функции u , определенной в области D пространственных переменных x, y и при $t \geq 0$. Предлагается метод нахождения приближенного решения. Рассматриваемое уравнение заменяется приближенным за счет введения оператора сдвига $S: D \rightarrow D$, позволяющего заменить на каждом шаге вычислений неизвестные значения функции $u(x, y, t)$ в правой части значениями $u(S(x, y), t)$, полученными на предыдущем шаге. Идея предлагаемого метода восходит к идее метода Тонелли, известного для дифференциальных уравнений относительно функций одной переменной (с обычными, а не частными производными). Достоинствами предлагаемого метода являются простота получаемого итерационного соотношения и возможности применений к широкому классу уравнений и краевых условий. В статье получены итерационные формулы решения краевой задачи с условием Дирихле по пространственным переменным и с начальным или с краевым условием по переменной t . На основании предложенного метода получено приближенное решение конкретной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадратной области.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, краевая задача, приближенное аналитическое решение, уравнение теплопроводности

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, <https://rscf.ru/project/23-11-45014/>).

Для цитирования: Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Рыбаков М.А., Трофимова А.С. Метод приближенного решения уравнений в частных производных // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 255–267. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267>

SCIENTIFIC ARTICLE

© T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovsky, M. A. Rybakov, A. S. Trofimova, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267>

Method of approximate solution of partial derivative equations

Tatyana V. ZHUKOVSKAYA¹, Evgeny S. ZHUKOVSKY^{2,3},
Mikhail A. RYBAKOV², Anna S. TROFIMOVA^{2,3}¹ Tambov State Technical University

106/5 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

³ V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The article considers a partial differential equation of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0,$$

with respect to an unknown function u , defined in a domain D of spatial variables x, y and for $t \geq 0$. A method for finding an approximate solution is proposed. The equation under consideration is replaced by an approximate one by introducing the shift operator $S : D \rightarrow D$, which allows replacing at each step of the calculations the unknown values of the function $u(x, y, t)$ on the right side with the values $u(S(x, y), t)$, obtained at the previous step. The idea of the proposed method goes back to the idea of the Tonelli method, known for differential equations with respect to functions of one variable (with ordinary, not partial derivatives). The advantages of the proposed method are the simplicity of the obtained iteration relation and the possibility of application to a wide class of equations and boundary conditions. In the article, iteration formulas are obtained for solving a boundary value problem with the Dirichlet condition for spatial variables and with an initial or boundary condition for the variable t . Based on the proposed method, an approximate solution is obtained for a specific initial-boundary value problem for the heat conductivity equation in a square domain.

Keywords: partial differential equation, boundary value problem, approximate analytical solution, heat equation

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, <https://rscf.ru/en/project/23-11-45014/>).

Mathematics Subject Classification: 65N22, 35A35, 35G30.

For citation: Zhukovskaya T.V., Zhukovsky E.S., Rybakov M.A., Trofimova A.S. Method of approximate solution of partial derivative equations. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 255–267.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных описываются многие физические процессы, в том числе процессы теплопроводности, диффузии, механики сплошных сред и другие процессы с распределенными параметрами (см. [1]). Точные аналитические решения таких задач возможны лишь для ограниченного класса уравнений и граничных условий. Приближенное определение решений уравнений в частных производных является более сложной проблемой, чем соответствующая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. Очевидно, что определить функцию нескольких переменных сложнее, чем функцию одного аргумента. Но, кроме этой очевидной трудности, приближенное нахождение решений уравнений в частных производных осложнено еще и некорректностью ряда задач математической физики (см. [2]).

Основы аналитических и численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных заложены в известной монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [3]. За прошедшие со времени издания этой книги годы приближенным решениям уравнений в частных производных были посвящены многочисленные работы. Значительные успехи достигнуты в развитии теории А. Н. Тихонова [4] решения некорректных задач (см., например, работы [5, 6] и их библиографические списки). В приложениях наиболее популярными являются различные сеточные методы (см., например, монографию [7] и работу [8]), методы представления решений в виде рядов (см., например, [9, главы X, XIII, XVII], методы сведения к дифференциально-разностным уравнениям (см., например, [10]).

Мы предлагаем метод иного типа, приводящий заданное уравнение к приближенному, аналитическое решение которого выписывается в явном виде. К достоинствам предлагаемого метода можно отнести простоту итерационного соотношения, а также возможности применений к широкому классу уравнений и краевых условий. Например, по переменной времени можно рассматривать не только начальную, но и краевые задачи.

Идея предлагаемого метода восходит к идее метода Тонелли (см., например, [11]), известного для дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений относительно функций одной переменной (с обычными, а не частными производными). Для получения методом Тонелли приближенного решения уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t > 0,$$

при заданном начальном условии $x(0) = \alpha_0$, это уравнение заменяют уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau)), \quad t > 0, \quad x(s) = \alpha(s), \quad s \in (-\tau, 0], \quad (0.1)$$

с достаточно малым запаздыванием $\tau > 0$. Здесь α — некоторая определенная на $(-\tau, 0]$ функция такая, что $\alpha(0) = \alpha_0$. Решение такого уравнения определяется последовательно на каждом полуинтервале $\mathfrak{J}_n = (t_{n-1}, t_n]$, где $t_0 = 0$, $t_n = n\tau$, $n = 1, 2, \dots$, следующими соотношениями. Положим $x_0(t) = \alpha(t)$, $t \in (-\tau, 0]$ и обозначим через $x_n : \mathfrak{J}_n \rightarrow \mathbb{R}$ решение рассматриваемой задачи Коши для уравнения (0.1) на полуинтервале $\mathfrak{J}_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда решением на следующем полуинтервале $\mathfrak{J}_{n+1}$ будет функция

$$x_{n+1}(t) = x_n(t_n) + \int_{t_n}^t f(s, x_n(s - \tau)) ds, \quad t \in \mathfrak{J}_{n+1}.$$

Для получения приближений к уравнению в частных производных мы предлагаем введение аналогов запаздывания — малого параметра не по переменной времени t , а по пространственным переменным.

1. Метод приближенного решения начально-краевой задачи

Для простоты будем рассматривать уравнение, содержащее частную производную первого порядка по времени t и частные производные не выше второго порядка по двум пространственным переменным x, y .

Будем обозначать через $|M|_{\mathbb{R}^2}$ норму вектора $M \in \mathbb{R}^2$, через $\mu(A)$ меру (площадь) множества $A \subset \mathbb{R}^2$ и через $\bar{A}$ замыкание этого множества в $\mathbb{R}^2$.

Пусть задана область D на плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющая границу Γ_0 . Положим $\bar{D} = D \cup \Gamma_0$. В области D рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}), \quad t > 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = \vartheta(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (1.2)$$

$$u|_{(x,y) \in \Gamma_0} = \varphi_0(t), \quad t > 0. \quad (1.3)$$

Здесь f, ϑ, φ_0 — заданные непрерывные функции.

Пусть задано $\tau > 0$. Определим отображение $S_\tau : \bar{D} \rightarrow D$, удовлетворяющее нижеперечисленным условиям:

- отображение $S_\tau : \bar{D} \rightarrow D$ инъективно;
- для любой точки $M \in D$ выполнено $|S_\tau M - M|_{\mathbb{R}^2} \leq \tau$;
- при любом $n = 1, 2, \dots$ множество $S_\tau^n(D)$ является областью с границей $S_\tau^n(\Gamma_0)$;
- при любом $n = 1, 2, \dots$ выполнено

$$S_\tau^{n+1}(D) \subsetneq S_\tau^n(D), \quad S_\tau^{n+1}(\Gamma_0) \cap S_\tau^n(\Gamma_0) = \emptyset \text{ и } \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_\tau^n(D)\right) = 0.$$

Обозначим $D_0 = D$, $D_n = S_\tau^n(D)$, $\Gamma_n = S_\tau^n(\Gamma_0)$, $n = 1, 2, \dots$. В силу принятых предположений отображение $S_\tau^n : \bar{D}_{n-1} \rightarrow \bar{D}_n$ биективно. Определим обратное к $S_\tau : \bar{D}_0 \rightarrow \bar{D}_1$ отображение $\Lambda_\tau = S_\tau^{-1} : \bar{D}_1 \rightarrow \bar{D}_0$.

Рассмотрим примеры множеств D и отображений S_τ , обладающих перечисленными свойствами.

Пример 1.1. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена, то есть

$$\exists r > 0 \quad \forall M \in D \quad |M|_{\mathbb{R}^2} \leq r,$$

а кроме того, еще выпукла и $0 \in D$. Выберем $k \in (0, 1)$ так, чтобы $(1 - k)r < \tau$. Положим $\lambda = \frac{1}{k}$. Очевидно, тогда $\lambda > 1$ и $(\lambda - 1)\frac{r}{\lambda} < \tau$. Определим операторы S_τ , $\Lambda_\tau = S_\tau^{-1}$ соотношениями

$$\forall M \in \bar{D} \quad S_\tau M = kM, \quad \forall M' \in \bar{D}_1 \quad \Lambda_\tau M' = \lambda M'.$$

Очевидно, при таком определении области $D_1 = S_\tau(D)$ и D подобны, и для отображения S_τ выполнены все требуемые условия. В частности, имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_\tau^n(D) = \{0\}$.

Пример 1.2. Пусть $r > 0$, $D = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < r\}$. Рассматриваемая область D представляет собой полосу на плоскости, а ее граница представляет собой две прямые: $\Gamma_0 = \{M = (x, y) : y = \pm r\}$. Выберем $k \in (0, 1)$ так, чтобы $(1 - k)r < \tau$, и положим $\lambda = \frac{1}{k}$. Определим операторы S_τ , $\Lambda_\tau = S_\tau^{-1}$ соотношениями

$$\forall M = (x, y) \in \bar{D} \quad S_\tau M = (x, ky), \quad \forall M' = (x', y') \in \bar{D}_1 \quad \Lambda_\tau M' = (x', \lambda y').$$

Очевидно, при таком определении выполнены все требуемые условия. В частности, $D_n = \{M = (x, y) : |y| \leq rk^n\}$, $\Gamma_n = \{M = (x, y) : y = \pm rk^n\}$, а множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\tau}^n(D)$ — это прямая $\{M = (x, y) : y = 0\}$, плоская мера которой равна нулю.

Пример 1.3. Пусть снова задано $r > 0$. Определим область $D \subset \mathbb{R}^2$ соотношением $D = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < r, x > 0\}$. Ее граница — это множество $\Gamma_0 = \{M = (x, y) : x = 0, y \in [-r, r] \text{ или } x > 0, y = \pm r\}$. Выберем $k \in (0, 1)$ так, чтобы $(1 - k)r < \tau$, и положим $\lambda = \frac{1}{k}$. Определим треугольники $\Delta = \{M = (x, y) \in \overline{D} : 1 - x \geq |y|\}$ и $\Delta' = \{M' = (x', y') \in \overline{D}_1 : 1 - x' \geq |y'|\}$ и зададим операторы S_{τ} , $\Lambda_{\tau} = S_{\tau}^{-1}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \forall M = (x, y) \in \overline{D} \quad S_{\tau}M &= \begin{cases} (x + 1 - k, ky), & \text{если } M \in \Delta, \\ (x + \frac{1-k}{x+1}, ky), & \text{если } M \in \overline{D} \setminus \Delta, \end{cases} \\ \forall M' = (x', y') \in \overline{D}_1 \quad S_{\tau}M' &= \begin{cases} (x' - 1 + k, \lambda y'), & \text{если } M' \in \Delta', \\ (\frac{1}{2}(x' - 1 + \sqrt{(x' + 1)^2 - 4(1 - k)}), \lambda y), & \text{если } M' \in \overline{D}_1 \setminus \Delta'. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, при таком определении выполнены все требуемые условия. В частности, $D_n = \{M = (x, y) : x > (1 - k)^n, |y| \leq k^n r\}$, $\Gamma_n = \{M = (x, y) : x = (1 - k)^n, y \in (-k^n r, k^n r) \text{ или } x > (1 - k)^n, y = \pm k^n r\}$, а множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\tau}^n(D)$ — это луч $\{M = (x, y) : x \geq 1, y = 0\}$, плоская мера которой равна нулю.

Теперь определим приближенное к (1.1) уравнение. Поскольку τ далее считаем неизменным, будем опускать соответствующий индекс в обозначениях отображений, то есть далее $S_{\tau} = S$, $\Lambda_{\tau} = \Lambda$. Пусть на $(\mathbb{R}^2 \setminus D) \times \mathbb{R}_+$ задана функция φ такая, что при любом $t \in \mathbb{R}_+$ функция $\varphi(\cdot, t)$ дважды дифференцируема и $\varphi|_{(x,y) \in \Gamma_0} = \varphi_0(t)$. Будем предполагать, что отображение $\Lambda : \overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}$ продолжено на все множество $\overline{D}$ таким образом, что $\Lambda(\overline{D} \setminus \overline{D}_1) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. При $t > 0$, $M = (x, y) \in D$ рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(M, t) &= f\left(t, M, u(\Lambda M, t), \frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M, t), \frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M, t), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\Lambda M, t)\right), \quad (1.4) \\ u(N, t) &= \varphi(N, t), \quad N \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Решение приближенного уравнения (1.4) с начально-краевыми условиями (1.2), (1.3) определяется при любом $t > 0$ последовательно на каждом множестве $\mathfrak{D}_n = D_{n-1} \setminus D_n$, $n = 1, 2, \dots$, следующими соотношениями. Положим $u_0(M, t) = \varphi(M, t)$, $M \in \mathbb{R}^2 \setminus D_0$, $t > 0$, и обозначим через $u_n(M, t)$ решение задачи (1.4), (1.2), (1.3) при $M \in \mathfrak{D}_n$, $n = 1, 2, \dots$, $t > 0$. Тогда решение при $M \in \mathfrak{D}_{n+1}$, $t > 0$ будет определяться формулой

$$\begin{aligned} u_{n+1}(M, t) &= \vartheta(M) \\ &+ \int_0^t f\left(s, M, u_n(\Lambda M, s), \frac{\partial u_n}{\partial x}(\Lambda M, s), \frac{\partial u_n}{\partial y}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}(\Lambda M, s)\right) ds. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что решение $u(M, t)$ в граничных точках $M \in \Gamma_n$ областей D_n , $n = 1, 2, \dots$, определяется следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} u(M, t)|_{M \in \Gamma_{n+1}} &= \vartheta(M) \\ &+ \int_0^t f\left(s, M, u(\Lambda M, s), \frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M, s), \frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\Lambda M, s)\right)|_{\Lambda M \in \Gamma_n} ds. \end{aligned}$$

2. Приближенное решение уравнения теплопроводности

Проиллюстрируем предлагаемый метод на примере решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пусть $D = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Границей этого квадрата является множество $\Gamma_0 = \{M = (x, y) : x = \pm\pi, y \in [-\pi, \pi] \text{ или } x \in (-\pi, \pi), y = \pm\pi\}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

при условиях

$$u|_{t=0} = \sin(x) \sin(y), \quad u|_{(x,y) \in \Gamma_0} = 0. \quad (2.2)$$

Заметим, что «точным» решением этой задачи является функция

$$u = \sin(x) \sin(y) e^{-t}.$$

Построим приближенное решение. Будем использовать операторы S, Λ из примера 1.1. Выберем коэффициент «подобия» $k \in (0, 1)$, положим $\lambda = \frac{1}{k}$. Теперь заменим рассматриваемое уравнение (2.1) приближенным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, t) \right). \quad (2.3)$$

Решение приближенной задачи (2.3), (2.2) будем находить последовательно на границах Γ_n , $n = 1, 2, \dots$, квадратов D_n . Для этих границ имеют место следующие равносильные соотношения

$$\Gamma_{n+1} = k\Gamma_n \Leftrightarrow \Gamma_n = \lambda\Gamma_{n+1}.$$

Сначала определим решение u в точках линии Γ_1 через известные заданные значения функции u в точках линии Γ_0 . Затем определим u в точках Γ_2 через уже найденные ее значения в точках линии Γ_1 , и т. д. Таким образом, при каждом $n = 1, 2, \dots$ получаем следующее соотношение для нахождения приближенного решения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)|_{(x,y) \in \Gamma_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, t) \right)|_{(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{(x,y) \in \Gamma_{n+1}} \\ = u(x, y, 0)|_{(x,y) \in \Gamma_{n+1}} + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, s) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, s) \right)|_{(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_n} ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Приведем результаты четырех шагов вычислений по итерационной формуле (2.4).

1) При $(x, y) \in \Gamma_1$ имеем $(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_0$, и в силу (2.2) выполнено $u(\lambda x, \lambda y, t) = 0$. Поэтому по формуле (2.4) здесь получаем

$$u = \sin(x) \sin(y) \text{ при } (x, y) \in \Gamma_1, \quad t > 0.$$

2) При $(x, y) \in \Gamma_2$ имеем $(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_1$. Воспользуемся значениями решения, найденными на предыдущем шаге. Получим $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, t) \right) = -\sin(\lambda x) \sin(\lambda y)$. Теперь по формуле (2.4) получаем

$$u = \sin(x) \sin(y) - \int_0^t \sin(\lambda x) \sin(\lambda y) ds = \sin(x) \sin(y) - \sin(\lambda x) \sin(\lambda y) t.$$

3) Теперь пусть $(x, y) \in \Gamma_3$ и поэтому $(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_2$. Тогда

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, t) \right) = -\sin(\lambda x) \sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x) \sin(\lambda^2 y) t,$$

и после подстановки этого выражения в (2.4) получаем

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) \sin(y) + \int_0^t (-\sin(\lambda x) \sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x) \sin(\lambda^2 y) s) ds \\ &= \sin(x) \sin(y) - \sin(\lambda x) \sin(\lambda y) t + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin(\lambda^2 x) \sin(\lambda^2 y) t^2. \end{aligned}$$

4) Пусть $(x, y) \in \Gamma_4$ и, соответственно, $(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_3$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, t) \right) \\ = -\sin(\lambda x) \sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x) \sin(\lambda^2 y) t - \frac{1}{2} \lambda^6 \sin(\lambda^3 x) \sin(\lambda^3 y) t^2. \end{aligned}$$

Поэтому согласно формуле (2.4) получаем

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) \sin(y) + \int_0^t (-\sin(\lambda x) \sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x) \sin(\lambda^2 y) s - \frac{1}{2} \lambda^6 \sin(\lambda^3 x) \sin(\lambda^3 y) s^2) ds \\ &= \sin(x) \sin(y) - \sin(\lambda x) \sin(\lambda y) t + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin(\lambda^2 x) \sin(\lambda^2 y) t^2 - \frac{1}{6} \lambda^6 \sin(\lambda^3 x) \sin(\lambda^3 y) t^3. \end{aligned}$$

Несложно заметить и показать (методом математической индукции), что на каждом n -м шаге решение определяется формулой

$$u = \sin(x) \sin(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} \lambda^{i^2-i} \sin(\lambda^i x) \sin(\lambda^i y) t^i, \quad (x, y) \in \Gamma_n, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

В следующих таблицах приведены результаты расчетов по формуле (2.5) для $k = 0, 99$, $\lambda = \frac{1}{0,99} \cong 1,0101$, $n = 10$ и, для сравнения, значения при же аргументах точного решения.

Табл. 1. $(x, y) \in \Gamma_1$, $x = 0,99\pi$, $y \in [-0,99\pi, 0,99\pi]$.

время t	точное решение $0,03141 \sin(y) e^{-t}$	приближенное решение $0,03141 \sin(y)$
0	$0,03141 \sin(y)$	$0,03141 \sin(y)$
1	$0,01156 \sin(y)$	$0,03141 \sin(y)$

Табл. 2. $(x, y) \in \Gamma_2$, $x = 0,9801\pi$, $y \in [-0,9801\pi, 0,9801\pi]$.

время t	точное решение $0,062477 \sin(y) e^{-t}$	приближенное решение $0,062477 \sin(y) - 0,031414 \sin(1,010101y) t$
0	$0,062477 \sin(y)$	$0,062477 \sin(y)$
1	$0,022984 \sin(y)$	$0,062477 \sin(y) - 0,031414 \sin(1,010101y)$

Табл. 3. $(x, y) \in \Gamma_3$, $x = 0,9703\pi$, $y \in [-0,9703\pi, 0,9703\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,093173 \sin(y)e^{-t}$	$0,093173 \sin(y) - 0,06248 \sin(1,010101y)t$ $+0,016027 \sin(1,020302y)t^2$
0	$0,093173 \sin(y)$	$0,093173 \sin(y)$
1	$0,034276 \sin(y)$	$0,093173 \sin(y) - 0,06248 \sin(1,010101y)$ $+0,016027 \sin(1,020302y)$

Табл. 4. $(x, y) \in \Gamma_4$, $x = 0,9606\pi$, $y \in [-0,9606\pi, 0,9606\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,123475 \sin(y)e^{-t}$	$0,123475 \sin(y) - 0,093176 \sin(1,010101y)t$ $+0,031876 \sin(1,020302y)t^2 - 0,005562 \sin(1,030607y)t^3$
0	$0,123475 \sin(y)$	$0,123475 \sin(y)$
1	$0,045424 \sin(y)$	$0,123475 \sin(y) - 0,093176 \sin(1,010101y)$ $+0,031876 \sin(1,020302y) - 0,005562 \sin(1,030607y)$

Табл. 5. $(x, y) \in \Gamma_5$, $x = 0,9510\pi$, $y \in [-0,9510\pi, 0,9510\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,153362 \sin(y)e^{-t}$	$0,153362 \sin(y) - 0,123478 \sin(1,010101y)t$ $+0,047535 \sin(1,020302y)t^2 - 0,011062 \sin(1,030607y)t^3$ $+0,001477 \sin(1,041016y)t^4$
0	$0,153362 \sin(y)$	$0,153362 \sin(y)$
1	$0,056419 \sin(y)$	$0,153362 \sin(y) - 0,123478 \sin(1,010101y)$ $+0,047535 \sin(1,020302y) - 0,011062 \sin(1,030607y)$ $+0,001477 \sin(1,041016y)$

Табл. 6. $(x, y) \in \Gamma_6$, $x = 0,9415\pi$, $y \in [-0,9415\pi, 0,9415\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,182812 \sin(y)e^{-t}$	$0,182812 \sin(y) - 0,153365 \sin(1,010101y)t$ $+0,062994 \sin(1,020302y)t^2 - 0,016496 \sin(1,030607y)t^3$ $+0,002937 \sin(1,041016y)t^4 - 0,00032 \sin(1,05153y)t^5$
0	$0,182812 \sin(y)$	$0,182812 \sin(y)$
1	$0,067253 \sin(y)$	$0,182812 \sin(y) - 0,153365 \sin(1,010101y)$ $+0,062994 \sin(1,020302y) - 0,016496 \sin(1,030607y)$ $+0,002937 \sin(1,041016y) - 0,00032 \sin(1,05153y)$

Табл. 7. $(x, y) \in \Gamma_7$, $x = 0,9321\pi$, $y \in [-0,9321\pi, 0,9321\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,211806 \sin(y)e^{-t}$	$0,211806 \sin(y) - 0,182815 \sin(1,010101y)t$ $+0,078241 \sin(1,020302y)t^2 - 0,02186 \sin(1,030607y)t^3$ $+0,00438 \sin(1,041016y)t^4 - 0,000637 \sin(1,05153y)t^5$ $+0,000059 \sin(1,062151y)t^6$
0	$0,211806 \sin(y)$	$0,211806 \sin(y)$
1	$0,077919 \sin(y)$	$0,211806 \sin(y) - 0,182815 \sin(1,010101y)$ $+0,078241 \sin(1,020302y) - 0,02186 \sin(1,030607y)$ $+0,00438 \sin(1,041016y) - 0,000637 \sin(1,05153y)$ $+0,000059 \sin(1,062151y)$

Табл. 8. $(x, y) \in \Gamma_8$, $x = 0,9227\pi$, $y \in [-0,9227\pi, 0,9227\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,240329 \sin(y)e^{-t}$	$0,240329 \sin(y) - 0,211809 \sin(1,010101y)t$ $+0,093265 \sin(1,020302y)t^2 - 0,02715 \sin(1,030607y)t^3$ $+0,005805 \sin(1,041016y)t^4 - 0,000949 \sin(1,05153y)t^5$ $+0,000117 \sin(1,062151y)t^6 - 0,00001 \sin(1,072879y)t^7.$
0	$0,240329 \sin(y)$	$0,240329 \sin(y)$
1	$0,088412 \sin(y)$	$0,240329 \sin(y) - 0,211809 \sin(1,010101y)$ $+0,093265 \sin(1,020302y) - 0,02715 \sin(1,030607y)$ $+0,005805 \sin(1,041016y) - 0,000949 \sin(1,05153y)$ $+0,000117 \sin(1,062151y) - 0,00001 \sin(1,072879y).$

Табл. 9. $(x, y) \in \Gamma_9$, $x = 0,9135\pi$, $y \in [-0,9135\pi, 0,9135\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,268363 \sin(y)e^{-t}$	$0,268363 \sin(y) - 0,240332 \sin(1,010101y)t$ $+0,108056 \sin(1,020302y)t^2 - 0,032364 \sin(1,030607y)t^3$ $+0,00721 \sin(1,041016y)t^4 - 0,001258 \sin(1,05153y)t^5$ $+0,000175 \sin(1,062151y)t^6 - 0,000019 \sin(1,072879y)t^7$ $+0,000001 \sin(1,083715y)t^8.$
0	$0,268363 \sin(y)$	$0,268363 \sin(y)$
1	$0,098725 \sin(y)$	$0,268363 \sin(y) - 0,240332 \sin(1,010101y)$ $+0,108056 \sin(1,020302y) - 0,032364 \sin(1,030607y)$ $+0,00721 \sin(1,041016y) - 0,001258 \sin(1,05153y)$ $+0,000175 \sin(1,062151y) - 0,000019 \sin(1,072879y)$ $+0,000001 \sin(1,083715y).$

Табл. 10. $(x, y) \in \Gamma_{10}$, $x = 0,9044\pi$, $y \in [-0,9044\pi, 0,9044\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,295895 \sin(y)e^{-t}$	$0,295895 \sin(y) - 0,268366 \sin(1,010101y)t$ $+0,122607 \sin(1,020302y)t^2 - 0,037497 \sin(1,030607y)t^3$ $+0,008594 \sin(1,041016y)t^4 - 0,001563 \sin(1,05153y)t^5$ $+0,000232 \sin(1,062151y)t^6 - 0,000028 \sin(1,072879y)t^7$ $+0,000003 \sin(1,083715y)t^8 - 0,0000002 \sin(1,0946602y)t^9.$
0	$0,295895 \sin(y)$	$0,295895 \sin(y)$
1	$0,108854 \sin(y)$	$0,295895 \sin(y) - 0,268366 \sin(1,010101y)$ $+0,122607 \sin(1,020302y) - 0,037497 \sin(1,030607y)$ $+0,008594 \sin(1,041016y) - 0,001563 \sin(1,05153y)$ $+0,000232 \sin(1,062151y) - 0,000028 \sin(1,072879y)$ $+0,000003 \sin(1,083715y) - 0,0000002 \sin(1,0946602y).$

3. Некоторые обобщения

Предложенный выше метод решения уравнений в частных производных достаточно универсален. Он без каких-либо значимых изменений распространяется на область D , принадлежащую пространству $\mathbb{R}^n$ при любом $n \geq 2$. Также метод применим к уравнению, полученному из (1.1) заменой в левой части производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ линейным дифферен-

циальным оператором первого порядка

$$\mathcal{L}_t u = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{P}u,$$

где $\mathcal{P}$ — некоторая функция, определенная на $D \times \mathbb{R}_+$. Также может рассматриваться и линейный дифференциальный оператор более высокого порядка. Кроме того, вместо начального условия (1.2) можно рассматривать краевое условие.

Для сокращения записи по-прежнему полагаем область D плоской. Рассмотрим краевую задачу вида

$$\mathcal{L}_t u = f\left(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right), \quad t \in [0, 1], \quad (x, y) \in D, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A}u(x, y, 0) + \mathcal{B}u(x, y, 1) = \vartheta(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (3.2)$$

$$u|_{(x, y) \in \Gamma_0} = \varphi_0(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Здесь f, ϑ, φ_0 — заданные непрерывные функции, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — заданные числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля.

Будем предполагать, что при всех $(x, y) \in D$ выполнено неравенство

$$\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x, y, s) ds} \neq 0,$$

которое необходимо и достаточно для однозначной разрешимости краевой задачи с условием (3.2) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{P}(x, y, t)u = f(x, y, t). \quad (3.4)$$

В этом случае решение задачи (3.4), (3.2) определяется формулой

$$u(t, x, y) = U(t, x, y)\vartheta(x, y) + \int_0^1 G(x, y, t, s)f(x, y, s)ds,$$

где

$$U(t, x, y) = \frac{e^{\int_0^t \mathcal{P}(x, y, s) ds}}{\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x, y, s) ds}}, \quad G(x, y, t, s) = \begin{cases} \frac{\mathcal{A}e^{\int_s^t \mathcal{P}(x, y, s) ds}}{\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x, y, s) ds}}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ -\frac{\mathcal{B}e^{\int_s^t \mathcal{P}(x, y, s) ds}}{\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x, y, s) ds}}, & 0 \leq t < s \leq 1, \end{cases}$$

это, соответственно, фундаментальное решение однородного уравнения и функция Грина краевой задачи.

Заменим уравнение (3.1) приближенным уравнением

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_t u(M, t) \\ &= f\left(t, M, u(\Lambda M, t), \frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M, t), \frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M, t), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\Lambda M, t)\right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$u(N, t) = \varphi(N, t), \quad N \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \quad t > 0.$$

Здесь функция φ определена на $(\mathbb{R}^2 \setminus D) \times \mathbb{R}_+$ так, что при любом $t \in \mathbb{R}_+$ она, как функция первого аргумента $\varphi(\cdot, t)$, дважды дифференцируема и $\varphi|_{(x,y) \in \Gamma_0} = \varphi_0(t)$. Решение приближенного уравнения (3.5) с краевыми условиями (3.2), (3.3) определяется при любом $t \in [0, 1]$ последовательно на каждом множестве $\mathfrak{D}_n = D_{n-1} \setminus D_n$, $n = 1, 2, \dots$, следующими соотношениями. Положим $u_0(M, t) = \varphi(M, t)$, $M \in \mathbb{R}^2 \setminus D_0$, $t > 0$, и обозначим через $u_n(M, t)$ решение задачи (1.4), (1.2), (1.3) при $M \in \mathfrak{D}_n$, $n = 1, 2, \dots$, $t > 0$. Тогда решение при $M \in \mathfrak{D}_{n+1}$, $t > 0$ будет определяться формулой

$$u_{n+1}(M, t) = U(M, t)\vartheta(M) + \int_0^t G(M, t, s) \cdot f\left(s, M, u_n(\Lambda M, s), \frac{\partial u_n}{\partial x}(\Lambda M, s), \frac{\partial u_n}{\partial y}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}(\Lambda M, s)\right) ds.$$

Соответственно, решение $u(M, t)$ в граничных точках $M \in \Gamma_n$ областей D_n , $n = 1, 2, \dots$, определяется следующими рекуррентными соотношениями

$$u(M, t)|_{M \in \Gamma_{n+1}} = U(M, t)\vartheta(M) + \int_0^t G(M, t, s) \cdot f\left(s, M, u(\Lambda M, s), \frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M, s), \frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M, s), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\Lambda M, s)\right)|_{\Lambda M \in \Gamma_n} ds.$$

References

- [1] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981. [V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].
- [2] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962. [M. M. Lavrent'ev, *On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Academy of Sciences Publ., Novosibirsk, 1962 (In Russian)].
- [3] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Методы приближенного решения уравнений в частных производных*, ОНТИ НКТП СССР, Главная редакция общетехнической литературы, Ленинград–Москва, 1936. [L. V. Kantorovich, V. I. Krylov, *Methods of Approximate Solution of Partial Differential Equations*, ONTI NKTP USSR, Main editorial board of general technical literature, Leningrad–Moscow, 1936 (In Russian)].
- [4] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].
- [5] M. Joachimiak, “Choice of the regularization parameter for the Cauchy problem for the Laplace equation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **30**:10 (2020), 4475–4492.
- [6] Е. Б. Лансеев, А. В. Климишин, “О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:146 (2024), 164–175. [E. B. Laneev, A. V. Klimishin, “On an approximate solution to an ill-posed mixed boundary value problem for the Laplace equation in a cylindrical domain with homogeneous conditions of the second kind on the lateral surface of the cylinder”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 164–175 (In Russian)].

- [7] В. Вазов, Дж. Форсайт, *Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных*, Издательство иностранной литературы, М., 1963. [V. Vazov, J. Forsythe, *Difference Methods for Solving Partial Differential Equations*, Foreign Literature Publishing House, Moscow, 1963 (In Russian)].
- [8] А. В. Родионов, “Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных”, *Чебышевский сб.*, **22**:3 (2021), 256–297. [A. V. Rodionov, “Some number-theoretic methods for solving partial derivatives”, *Chebyshevskii Sb.*, **22**:3 (2021), 256–297 (In Russian)].
- [9] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, М., 1970. [N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].
- [10] В. В. Провоторов, М. А. Рыбаков, “Решение начально-краевой задачи в символьном виде”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:142 (2023), 203–212. [V. V. Provotorov, M. A. Rybakov, “Solution of the initial boundary value problem in symbolic form”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 203–212 (In Russian)].
- [11] Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, “Численные методы решения эволюционных функционально-дифференциальных уравнений”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **17**:5 (2012), 1352–1359. [T. V. Zhukovskaya, E. A. Molokanova, “Numerical methods for solution of evolutionary functional differential equations”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17**:5 (2012), 1352–1359 (In Russian)].

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», профессор кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; ведущий научный сотрудник, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Рыбаков Михаил Анатольевич, старший преподаватель кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: mixail08101987@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8152-8357>

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Evgeny S. Zhukovsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Scientific and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”, Professor of Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Leading Researcher, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Mikhail A. Rybakov, Senior Lecturer Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: mixail08101987@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8152-8357>

Трофимова Анна Сергеевна, аспирант, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; научный сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: anna.trofimova.24.01.99@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-2747-8675>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Рыбаков Михаил Анатольевич
E-mail: mikhail08101987@mail.ru

Поступила в редакцию 28.05.2024 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Anna S. Trofimova, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation. E-mail: anna.trofimova.24.01.99@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-2747-8675>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Mikhail A. Rybakov
E-mail: mikhail08101987@mail.ru

Received 28.05.2024
Reviewed 02.09.2024
Accepted for press 13.09.2024