

ПРЕОДОЛЕНИЕ МНОГОНОГИМ РОБОТОМ ШИРОКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ

© 2024 г. Ю. Ф. Голубев^{1, *}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 16.04.2024 г.

После доработки 19.05.2024 г.

Принято к публикации 28.05.2024 г.

Найдена аналитическая оценка сверху максимальной ширины зоны, запрещенной для наступания, которую многоногий шагающий робот может преодолеть в режиме статической устойчивости. Используя математические модели шестиногого и четырехногого роботов с продольным расположением точек подвеса ног, показано, что полученная оценка является не улучшаемой. С этой целью сформированы следовые последовательности постановки ног робота, обеспечивающие достижение значения оценки. Для модели шестиногого робота найдена зависимость максимальной ширины зоны от длины корпуса.

Ключевые слова: шагающие роботы, преодоление препятствий

DOI: 10.31857/S2686954324040078, **EDN:** YZENA0

1. ВВЕДЕНИЕ

Шагающие машины опираются на подстилающую поверхность, оставляя дискретные следы [1–3]. Они во многих случаях имеют возможность проходить над препятствием, не наступая на него. Ниже рассматривается вопрос о преодолении n -ногим шагающим аппаратом экстремально широкого и протяженного препятствия. С этой целью робот может применять методы основанные на анализе способности робота дотянуться до точек опоры на противоположной стороне препятствия [3], и если это возможно, то пройти над препятствием, не обязательно соблюдая при этом регулярность походки. Прыжки и бег [4] в данной работе не рассматриваются.

Указанная проблема представляет интерес как с математической, так и с прикладной точек зрения. Математические трудности связаны с тем, что ширина препятствия, которое робот может преодолеть, зависит как от расположения точек опоры, так и от последовательности переноса и постановки ног, а вариантов таких последовательностей даже для случая $n = 6$ чрезвычайно много [3]. С прикладной точки зрения важно понимать, какая конструктивная схема и

параметры робота должны быть, чтобы его применение было наиболее эффективным при движении по неподготовленной местности.

В литературных источниках чаще всего встречается анализ путевой проходимости либо для уже построенных шагающих машин с конкретными техническими решениями, либо анализ, основанный на необходимых условиях статической устойчивости [5]. В предлагаемой работе применяются достаточные условия продольной статической устойчивости, а для простоты исследования выбрана упрощенная кинематическая схема шагающего аппарата, учитывающая основные особенности принципа передвижения с помощью ног. Оказалось, что даже такая простая схема позволяет сделать выводы относительно целесообразной конструкции робота. Результаты компьютерного моделирования подтверждают полученные аналитические оценки [6].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем иметь в виду изолированные препятствия, которые можно заключить в область между двумя вертикальными плоскостями, перпендикулярными направлению движения корпуса таким образом, что вне этой области в достаточно большой её окрестности отсутствуют точки, запрещённые для наступания. На опорной поверхности указанные плоскости выделяют

¹ Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail: golubev@keldysh.ru

полосу, называемую зоной препятствия, внутри которой нельзя помещать следовые точки. Ширина d зоны зависит от соотношения размеров препятствия и несущих свойств опорной поверхности.

Пусть робот имеет $n \geq 4$ ног [3] и корпус в качестве твердого тела. Точки подвеса идентичных весомых ног расположены по боковым сторонам прямоугольной несущей рамы, жестко связанной с корпусом, симметрично относительно продольной (вдоль предполагаемого направления движения) и поперечной вертикальных строительных плоскостей корпуса, содержащих его центр масс. Тогда число ног робота $n = 2k$ — чётное. Такая конструкция удобна с точки зрения простоты её модульного наращивания секциями, содержащими дополнительную пару ног. Робот подходит к препятствию передней или задней стороной несущей рамы. Контакт стоп с опорной поверхностью предполагается точечным. При перешагивании через препятствие робот сохраняет направление движения корпуса перпендикулярным границам зоны препятствия. Возникает задача о нахождении максимально возможной ширины зоны препятствия, которое робот может преодолеть. Требуется также указать логическую последовательность постановки ног (следовое расписание) и соответствующее расположение точек опоры, позволяющие аппарату безопасно перешагнуть через такую зону.

Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ — неподвижная декартова система координат. Плоскость $O_1\xi\eta$ горизонтальна. Ось $O_1\xi$ направлена перпендикулярно зоне препятствия. Ось $O_1\zeta$ направлена вертикально вверх. Ось $O_1\eta$ дополняет систему координат $O_1\xi\eta\zeta$ до правой тройки. Начало O_1 расположим со стороны подхода робота к препятствию, так что $\xi = \xi_m$ — уравнение ближней (по отношению к роботу) границы зоны препятствия, а $\xi = \xi_M$ — уравнение её дальней границы, ξ_m и ξ_M — постоянные, причём $0 < \xi_m < \xi_M = \xi_m + d$.

Декартову право-ориентированную систему координат $Oxyz$ жестко свяжем с несущей рамой корпуса аппарата так, чтобы плоскость Oxy содержала точки подвеса всех ног, её начало O совпало с проекцией центра масс корпуса на плоскость Oxy , ось Ox была ориентирована по скорости движения корпуса параллельно боковой стороне несущей рамы, ось Oy была направлена в сторону точек подвеса ног, расположенных с левой стороны корпуса, если смотреть в направлении оси Ox .

Точкам подвеса (и, соответственно, ногам), расположенным справа (если смотреть вперёд в направлении движения) от плоскости Oxz , напишем, начиная с задних ног, последовательные нечетные номера, а ногам, расположенным слева от указанной плоскости, — последовательные четные. Пусть $x_{2j}, y_{2j}, z_{2j} = 0$ — координаты точек подвеса ног левой стороны, а $x_{2j-1}, y_{2j-1}, z_{2j-1} = 0$ — координаты точек подвеса ног правой стороны ($j = 1, k$) в системе координат $Oxyz$. Потребуем, чтобы $y_i = (-1)^i b$, $b > 0$, $i = 1, n$. Геометрически это означает, что точки подвеса ног расположены на прямых, лежащих в плоскости Oxy симметрично относительно плоскости Oxz , и равно отстоят от оси Ox на расстояние b . Кроме того, предположим, что $x_{2j-1} = x_{2j} = a[j - (k + 1) / 2]$. Величины a, b постоянны и определяют габариты рамы, так что $(k - 1)a$ — длина несущей рамы и $2b$ — её ширина. Будем считать, что корпус шагающего аппарата движется поступательно, сохраняя в любой момент времени сонаправленную взаимную ориентацию осей координат $O_1\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$.

Положения (x_i^f, y_i^f, z_i^f) стоп ног относительно корпуса определяются соотношениями

$$x_i^f = x_i + q_{xi}, \quad y_i^f = y_i + q_{yi}, \quad z_i^f = z_i + q_{zi}, \quad (1)$$

где величины q_{xi}, q_{yi}, q_{zi} определяют положение i -й стопы относительно точки подвеса и зависят от конструкции соответствующей ноги, например, как в [7].

Обозначим (ξ_0, η_0, ζ_0) абсолютные координаты точки O . Тогда абсолютные координаты стоп ног примут вид

$$\begin{aligned} \xi_i^f &= \xi_0 + x_i + q_{xi}, \\ \eta_i^f &= \eta_0 + y_i + q_{yi}, \quad \zeta_i^f = \zeta_0 + z_i + q_{zi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Потребуем, чтобы при перешагивании через зону препятствия было выполнено ограничение

$$|\eta_i^f - \eta_0| \geq c', \quad i = 1, n, \quad (3)$$

где c' — постоянная. В дальнейшем предполагается, что точки опоры ног каждой из сторон принадлежат соответственно левой и правой прямолинейным следовым колеям, параллельным боковым сторонам корпуса.

Вертикальные проекции точек опоры на плоскость $O_1\xi\eta$ образуют плоский выпуклый опорный многоугольник D , как минимальное множество точек на плоскости $O_1\xi\eta$, содержащее проекции всех точек опоры робота.

Позиция робота называется статически устойчивой [3], если его центр масс, рассчитан-

ный с учетом массивности корпуса и всех ног, проектируется строго внутрь опорного многоугольника D :

$$C_{\xi\eta} \in (D \setminus \partial D), \quad (4)$$

где $C_{\xi\eta}$ — проекция центра масс аппарата на плоскость $O_1\xi\eta$, ∂D — граница множества D .

При движении по равнинной и в среднем горизонтальной местности для выполнения условия статической устойчивости необходимо, чтобы в число вершин опорного многоугольника входили опорные точки ног каждой из сторон [3].

Зону препятствия Z можно выразить формулой

$$Z = \{(\xi, \eta) : \xi_m < \xi < \xi_M\}, \quad d = \xi_M - \xi_m, \quad (5)$$

так что

$$(\xi_i^f, \eta_i^f) \notin Z. \quad (6)$$

Рассмотрим ситуацию, когда робот вплотную подошёл к ближней границе ξ_m зоны препятствия, и должен переправиться на другую сторону зоны. Это означает, что в начале переправы будет выполнено $\xi_0 + a(k-1)/2 \leq \xi_m$, а в конце переправы должно быть выполнено: $\xi_M \leq \xi_0 - a(1-k)/2$. Из множества G всех последовательностей постановки и точек размещения опорных стоп ног, а также движений корпуса требуется указать последовательность, которая позволит роботу достичь

$$\max_G(d) \quad (7)$$

при выполнении условий (3), (4) и (6).

3. ЗАПАС СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Оценим величину отклонения вдоль оси $O_1\xi$ центра масс шагающего робота от центра масс его корпуса. Координата ξ_c центра масс робота с учётом симметрии расположения точек повеса ног определяется формулой

$$\xi_c = \xi_0 + \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c, \quad (8)$$

где q_{xi}^c — координаты центров масс ног относительно их точек подвеса, m — масса одной ноги, M — масса всего аппарата.

По положению центра рамы корпуса можно надёжно судить о критичности положения центра масс аппарата, если центр масс аппарата и центр масс корпуса достаточно близки по x -координате. Близость указанных центров масс с заданной

точностью ε в критических для потери статической устойчивости случаях обеспечивается посредством надлежащей балансировки позы аппарата.

Определение 1. Позу аппарата назовём продольно ε -сбалансированной, если выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n q_{xi}^c \right| \leq \varepsilon \frac{M}{m}. \quad (9)$$

Например, для шестиногого аппарата любая поза, удовлетворяющая соотношениям

$$q_{x1} = q_{x2} = -q_{x5} = -q_{x6}, \quad q_{x3} = q_{x4} = 0 \quad (10)$$

является абсолютно продольно ε -сбалансированной для любого ε и любой массы ног. Ещё один пример абсолютно продольно ε -сбалансированной позы доставляется равенствами

$$q_{x3} = q_{x4} = -q_{x5} = -q_{x6}, \quad q_{x1} = q_{x2} = 0.$$

Другой пример выглядит так:

$$q_{x1} = q_{x2} = -q_{x3} = -q_{x4}, \quad q_{x5} = q_{x6} = 0.$$

Формула (9) представляет собой условие, при выполнении которого для оценки возможности сохранения продольной статической устойчивости можно пользоваться критерием близости центра рамы к критической границе опорного многоугольника при заданном запасе статической устойчивости ε .

Определение 2. Движение робота считается продольно статически устойчивым с запасом ε , если в любой момент времени выполнено условие (9) и

$$\{(\xi, \eta_0) : \xi_0 - \varepsilon \leq \xi \leq \xi_0 + \varepsilon\} \in D, \quad (11)$$

где ξ — некоторая точка на оси $O\xi$. Геометрически это означает, что проекция центра корпуса робота на плоскость $O_1\xi\eta$ должна быть погружена внутрь опорного многоугольника, а проекция центра корпуса на ось $O_1\xi$ должна отстоять от передней и задней границ опорного многоугольника не меньше, чем на ε . Ясно, что критерий будет физически осмысленным для достаточно малых ε . При использовании критерия (11) предполагается, что ξ_c -координата центра масс робота из-за движения ног может оказаться в любой точке отрезка $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$, и заранее неизвестно в какой.

4. МАКСИМАЛЬНАЯ ШИРИНА ЗОНЫ ПРЕПЯТСТВИЯ

Расстояние между последовательными точками опоры в координатах Ox_{yz} , связанных с

корпусом, будем называть длиной относительного шага. Возможное положение стопы относительно точки подвеса соответствующей ноги стеснено неравенством (3) и описывается соотношениями

$$q_{xi}^2 + q_{yi}^2 + q_{zi}^2 = \rho_i^2 \leq l^2, \quad (-1)^i q_{yi} > c = c' - b \geq 0, \quad (12)$$

где l — максимальная длина ноги. Из формул (12) и (1) следует, что проекция i -й стопы на ось Ox может быть выражена формулой

$$x_i^f = x_i + q_{xi} = x_i \pm L_{xi}, \quad L_{xi} = \sqrt{\rho_i^2 - q_{yi}^2 - q_{zi}^2}, \quad (13)$$

где выбор знака зависит от положения соответствующей точки опоры. Рассмотрим случай, когда шагающий аппарат преодолевает препятствие, двигаясь в положительном направлении оси Ox . Тогда вопрос о возможности опоры i -й стопы о какую-либо точку на грунте с абсциссой ξ связан с анализом справедливости включения

$$(\xi - \xi_0 - x_i) \in [-L_i, L_i], \quad L_i = \max_{\rho_i, q_{yi}, q_{zi}} L_{xi}. \quad (14)$$

Если включение (14) справедливо, то указанную точку можно оставить в качестве предположительно возможной точки опоры. Если же это включение не выполнено, то на такую точку опереться не получится.

В соответствии с выбором системы координат $Oxuz$ имеем $q_{zi} = \zeta_i^f - \zeta_0$. Если ζ_i^f — высота предполагаемой точки опоры, то тогда $q_{zi} < 0$ характеризует необходимый клиренс аппарата, то есть свободный просвет между корпусом и опорной поверхностью, которым шагающий аппарат может управлять в определенных пределах. Пусть опорная поверхность задана формулой $\zeta = F(\xi, \eta)$. Обозначим

$$\bar{\zeta}_0 = \max_{\xi, \eta \in E} F(\xi, \eta) + \delta$$

ζ -координату центра несущей рамы, допустимую с точки зрения безопасности движения, где постоянная δ учитывает минимально безопасную величину клиренса, E — ограниченная область плоскости $O\xi\eta$, содержащая следовые колеи, на которых планируются положения точек опоры робота. Ясно, что чем меньше эта область, тем аккуратнее будет выбран параметр $\bar{\zeta}_0$. Из формул (13) и (12) найдём

$$L(\xi_f, \eta^*) = \sqrt{l^2 - c^2 - [\bar{\zeta}_0 - F(\xi_f, \eta^*)]^2}, \quad (15)$$

$$\eta^* = \eta_0 + (-1)^i (b + c).$$

Это означает, что максимальная величина $L(\xi_f, \eta^*)$ выноса опорной стопы в направлении оси Ox зависит от координат точки предполагаемой опоры и достигается, когда нога предельно вытянута: $\rho_i = l$, предполагаемая точка опоры расположена на следовой колее, параллельной корпусу и отстоящей от него на предельно близкое допустимое расстояние c , а высота корпуса над предполагаемой точкой опоры настолько мала, насколько это соответствует допустимому пределу безопасного перемещения. Точное значение координаты ξ_f в формуле (15) для ноги с номером i можно найти из уравнения

$$\xi_f - \xi_0 - x_i = \pm L(\xi_f, \eta^*) = \pm \sqrt{l^2 - c^2 - [\bar{\zeta}_0 - F(\xi_f, \eta^*)]^2},$$

и это будут абсолютные ξ -координаты предельных точек на опорной поверхности, до которых нога может дотянуться из заданного положения корпуса. Если же наоборот задать значение ξ_f , то тогда можно легко найти значение ξ_0 , соответствующее положению корпуса, при котором в зависимости от знака перед радикалом эта точка окажется предельно достижимой либо спереди от соответствующей точки подвеса, либо позади неё.

Назовём передней границей опорного многоугольника отрезок прямой, образованный ближайшими к зоне препятствия двумя точками опоры ног, одна из которых находится с правой, а другая с левой стороны корпуса, если смотреть в направлении оси Ox . Обозначим ξ -координаты правой и левой точек опоры передней границы опорного многоугольника через ξ_r и ξ_l соответственно. Согласно принятым ограничениям на конфигурацию робота, обеспечивающим возможность выполнения шага максимальной длины для всех ног (см. формулу (15)), точка O проектируется в середину отрезка между следовыми колесами. Пусть прямая $\eta = \eta_l = \eta_0 - b - c$ — следовая колея для левых ног робота, а $\eta = \eta_r = \eta_0 + b + c$ — следовая колея для правых ног робота. Граница ξ_M достижима для передних ног, если на следовых колесях найдутся точки с координатой ξ_f , для которых выполнено неравенство

$$\xi_0 + a \frac{k-1}{2} + L(\xi_f, \eta^*) \geq \xi_M, \quad (16)$$

причём равенство достигается, когда $\xi_f = \xi_M$. Обозначим

$$L_M = \max(L(\xi_M, \eta_l), L(\xi_M, \eta_r)) \quad (17)$$

и учтём, что $\xi_M = \xi_m + d$. Равенство левой и правой частей формулы (16) для заданного зна-

чения ξ_0 обеспечивается, когда d принимает предельно большое значение $d = \bar{d}$. Следовательно

$$\xi_0 - \xi_m + a \frac{k-1}{2} + L_M = \bar{d}(\xi_0). \quad (18)$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 1. Максимум $\Delta = \max_{\xi_0} \bar{d}$ ширины зоны препятствия, преодолимого рассматриваемым многоногим статически устойчивым роботом, достигается, если непосредственно перед моментом постановки передних ног на линию $\xi = \xi_M$ передняя граница опорного многоугольника удовлетворяет условию

$$(\xi_r^m, \xi_l^m) =_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \left(\xi_m - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} \right). \quad (19)$$

Доказательство. Поскольку передняя граница опорного многоугольника линейна, то для выполнения условия статической устойчивости необходимо, чтобы было

$$\xi_c < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} \leq \xi_m \rightarrow \xi_c - \xi_m < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m \leq 0.$$

Отсюда ясно, что для возможности увеличения допустимой ширины зоны препятствия (18) следует, что в конце переноса передних ног через зону препятствия точки опоры для передней границы опорного многоугольника должны удовлетворять требованию (19). $\diamond$

Теорема 1. Максимальная ширина Δ зоны препятствия, преодолимого рассматриваемым роботом, ограничена неравенством

$$\Delta \leq \frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2} - \xi_m - \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c + a \frac{k-1}{2} + L_M, \quad (20)$$

то есть многоногий робот описанной выше конструкции не может преодолеть зону препятствия, ширина которой на момент окончания переноса передних ног превосходит сумму половины длины корпуса робота и максимально возможного выноса стоп передних ног в направлении оси Ox за вычетом минимально достижимого расстояния от середины передней границы опорного многоугольника до ближнего края зоны препятствия и x -координаты центра масс всех ног относительно корпуса робота.

Доказательство. До начала перешагивания через зону препятствия все точки опоры имеют ξ -координаты, меньшие ξ_m . Корпус робота ориентирован так, что ось Ox направлена к границе зоны $\xi = \xi_m$ и перпендикулярна к ней. Ясно, что такое расположение корпуса позволяет наилуч-

шим образом использовать его габариты для переправы через зону, потому что $a(k-1) > b$. Из формулы (18) следует, что

$$\xi_0 - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} + \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m + a \frac{k-1}{2} + L_M = \bar{d}(\xi_0). \quad (21)$$

Но согласно формуле (8) найдём

$$\xi_0 < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c. \quad (22)$$

Поэтому

$$\xi_0 - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} < -\frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c.$$

Кроме того, разность $(\xi_r + \xi_l) / 2 - \xi_m$ не положительна, поскольку рассматривается этап, когда робот еще не перенёс ноги через препятствие. Вместе с тем эта разность по модулю тем меньше, чем ближе расположены передние опорные точки к зоне препятствия. $\diamond$

5. СЛЕДОВОЕ РАСПИСАНИЕ

Походка “след в след” [3] возникает, когда точки опоры соседних ног одной стороны для последовательных шагов совпадают. Для того, чтобы походка “след в след” могла быть реализована при движении по всей поверхности $\zeta = F(\xi, \eta)$, должно быть выполнено общее конструктивное ограничение:

$$a \leq 2 \min_{\xi, \eta \in \mathcal{E}} L(\xi, \eta). \quad (23)$$

Заметим, что в реальности, когда ноги аппарата имеют конкретные физические размеры, а планируемая точка опоры ещё занята предыдущей ногой, походку “след в след”, строго говоря, практически реализовать невозможно без пересечения соседних ног одной стороны корпуса. Если всё же необходимо применить такую походку, то планируемую точку опоры следует смещать, если это возможно, по координате η в ту или другую сторону на расстояние, не меньшее, чем толщина ноги. Из-за этого изменится максимальная длина шага. В дальнейшем для оценок максимальной допустимой ширины препятствия будем пользоваться формулой (23), считая, что указанная походка при незначительном боковом смещении планируемых точек опоры не окажет ощутимого влияния на эти оценки.

Случай, когда точка опоры последующей ноги оказывается впереди предыдущей в дальнейшем

рассматриваться не будет в связи с тем, что тогда для робота рассматриваемой конструкции при переносе последующей ноги, очевидно, возникнет опасность взаимного пересечения соседних ног, что недопустимо.

Условие (23) без нарушения общности можно ослабить:

$$a \leq a_e, \quad (24)$$

где

$$a_e = 2 \min \left(\min_{\xi, \eta_r \in E} \mathcal{L}(\xi, \eta), \min_{\xi, \eta_l \in E} \mathcal{L}(\xi, \eta) \right). \quad (25)$$

Другими словами, нас будет интересовать возможность организации движения “след в след” только при расположении точек опоры на левой и правой следовых колеях. Ясно, что условие (24), является необходимым по отношению к условию (23).

Для простоты последующего анализа обратимся к варианту, когда движение происходит по горизонтальной плоскости. В таком случае максимальные длины относительных шагов будут одинаковы для всех точек опоры и для всех ног. Обозначим L длину максимально возможного относительного полушага для этого случая. Тогда условие (25) можно переписать в виде

$$a_e = 2L. \quad (26)$$

Для того, чтобы убедиться, что приведенные в предыдущем разделе верхние оценки ширины предельно допустимой зоны препятствия являются не улучшаемыми, следует указать следовое расписание, при котором они превращаются в равенство. Прделаем это для шестиногих и четырехногих аппаратов. Процесс преодоления зоны препятствия начинается в тот момент, когда робот подошёл вплотную к зоне препятствия.

1. Рассмотрим сначала процесс преодоления препятствия шестиногим аппаратом.

Лемма 2. Пусть выполнено условие (24), и средние ноги поставлены в точки опоры передних ног на ближней границе $\xi = \xi_m$ зоны препятствия. Тогда для преодоления шестиногим аппаратом зоны препятствия максимальной ширины передние ноги следует переносить через препятствие синхронно.

Доказательство. В данном случае при подъеме передних ног по очереди или одновременно будет выполнено.

$$\xi_0 = \xi_m - \varepsilon, \quad \frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2} = \xi_m.$$

Пусть передние ноги переносятся через препятствие последовательно. Тогда оставшаяся в

опоре передняя нога может ограничивать продвижение корпуса над зоной препятствия и тем самым будет мешать дотягиванию передних ног до точек опоры на границе $\xi = \xi_m$ зоны. С другой стороны, если обе ноги, стремясь сделать максимальный шаг, будут находиться в состоянии переноса, но с некоторым запаздыванием, то та нога, которая раньше попадет на дальнюю границу зоны препятствия, и определит достигнутую при этом максимальную ширину зоны. После этого для величины достигнутой ширины зоны уже не будет иметь значения, в каком порядке они будут поставлены на дальнюю границу зоны препятствия. Синхронный перенос передних ног лучше, так как обеспечивает наибольшую удалённость передней границы опорного многоугольника с поставленными на дальнюю границу передними ногами от центра корпуса. $\diamond$

Замечание 1. При одновременном переносе передних ног через препятствие передняя граница опорного многоугольника формируется средними ногами.

Замечание 2. Перед перешагиванием через предельно широкую зону препятствия точки опоры передних ног следует ставить, если это возможно, на ближнюю границу $\xi = \xi_m$ зоны.

Представим половину длины корпуса a в виде

$$a = a_e + \sigma. \quad (27)$$

Замечание 3. Если $\sigma \geq 0$ взаимное пересечение соседних ног в точках, не совпадающих со стопами, отсутствует. При произвольном значении $\sigma \in [-a_e, 0)$ точки подвеса соседних ног могут оказаться расположенными слишком близко, из-за чего будет существовать опасность взаимного пересечения звеньев соседних ног. Допустим, что найдется число μ , такое что $0 < \mu >$ позволяет уточнить неравенство (20).

Теорема 2. Пусть $-a_e < -\mu \leq \sigma \leq 0$, $\mu > 0$. Тогда, если применяется критерий (11), максимальная ширина Δ зоны препятствия, которую шестиногий робот может преодолеть при движении по плоскости, выражается равенством

$$\Delta = a_e + \sigma - \varepsilon + L, \quad (28)$$

где ε — запас статической устойчивости.

Доказательство. Как было установлено выше, перед началом перешагивания через зону препятствия точки опоры передних ног должны располагаться на прямой $\xi = \xi_m$. Условие (24), которое при $\sigma \leq 0$, очевидно, будет выполнено, обеспечивает возможность постановки сред-

них ног в точки опоры передних, когда корпус частично продвигается за ближнюю границу $\xi = \xi_m$ зоны препятствия на расстояние, при котором будет выполнено $\xi_0 = \xi_m - \varepsilon$. После этого передние ноги следует переносить в точки опоры на дальней границе $\xi = \xi_M$. В этом случае

$$\frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2} = \xi_m,$$

и правая часть формулы (20) превращается в правую часть формулы (28).

Покажем теперь, что существует следовое расписание, обеспечивающее преодоление зоны препятствия ширины (28) без нарушения статической устойчивости. Пусть робот находится в стандартной позиции перед препятствием в соответствии с определением 3. Прежде, чем начать перенос передних ног, надо продвинуть корпус по направлению к линии $\xi = \xi_M$ так, чтобы появилась возможность в том же направлении перенести задние ноги. Наиболее далеко корпус можно было бы продвинуть на расстояние максимального относительного полушага передних ног. Однако при этом проекция центра масс робота на горизонтальную плоскость должна всё же находиться внутри опорного многоугольника, образованного передними и средними ногами, с заданным запасом ε статической устойчивости. Тогда передние ноги ещё могут оставаться в опоре.

Теперь задние ноги могут одновременно сделать шаг величиной

$$L_{1,2} = \{a - L - \varepsilon, \quad L > \text{невозможно.}\}$$

Лемма 3. Пусть $\sigma > 0$. Тогда для преодоления шестиногим аппаратом зоны препятствия максимальной ширины передние ноги следует переносить через препятствие синхронно.

Доказательство. Максимальная ширина зоны препятствия достигается, если расстояние от центра рамы до ближней границе зоны препятствия минимально при переносе передних ног. В том случае, когда хотя бы одна передняя нога находится в опоре, центр рамы можно подвести к ближней границе зоны на расстояние не меньшее, чем $L + \sigma$, так что $\xi_0 = \xi_m - (L + \sigma)$, если хотя бы одна передняя нога находится в опоре на ближней границе зоны препятствия. Поэтому, если корпус аппарата максимально продвинут вперёд так, чтобы сохранить точки опоры передних ног на ближней границе зоны препятствия, то порядок переноса передних ног на удалён-

ную границу зоны не имеет значения. Всё равно, если хотя бы одна передняя нога находится в опоре на линии $\xi = \xi_m$, продвинуть корпус к ближней границе зоны по сравнению с указанным значением не удастся. Вместе с тем, синхронный перенос передних ног сокращает число переносов ног.

Справедлива теорема.

Теорема 3. Если применяется критерий (11) и $\sigma > 0$, то максимальная ширина зоны препятствия выражается формулой

$$\Delta = a_e + L - \varepsilon, \quad \sigma \geq 0. \quad (29)$$

Доказательство. Преодоление зоны препятствия начинается из стандартной позиции. Корпус продвигается в направлении границы $\xi = \xi_M$ на расстояние максимального относительного полушага передних ног. Потом сначала задние ноги делают относительный шаг длиной

$$a - \sigma - L - \varepsilon = L - \varepsilon,$$

а затем средние ноги — максимальный относительный шаг в том же направлении. Стопы всех ног и центр рамы будут иметь координаты

$$\xi_1(2) = \xi_2(2) = \xi_m - 2a + L - \varepsilon,$$

$$\xi_3(2) = \xi_4(2) = \xi_m - \sigma,$$

$$\xi_5(2) = \xi_6(2) = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - a + L.$$

Покажем, что если в полученной позе поднять хотя бы одну переднюю ногу, то робот не сможет изменить переднюю границу опорного многоугольника, образованную средними ногами. Действительно, в этой позиции смещение корпуса ни назад, ни вперед невозможно из-за того, что средние ноги, будучи в опоре, максимально вынесены вперёд, а передние ноги максимально вынесены назад. Продвижение корпуса вперёд возможно лишь, если сразу поднять обе передние ноги. В этом случае середина диагонали опорного многоугольника при обеих поднятых передних ногах будет иметь координату $\xi_d = \xi_m - \sigma - (a + L + \varepsilon) / 2$. Кроме того $\xi_0 = \xi_m - a + L$. Поэтому

$$\xi_0 - \xi_d = \frac{L + \sigma + \varepsilon}{2} > 0.$$

С другой стороны, если перенести по очереди задние ноги на максимально возможный полушаг вперёд, то середина диагонали сместится вперёд и станет равной.

$$\xi_{d'} = \xi_m - (a + \varepsilon) / 2 - \sigma \Rightarrow \xi_0 - \xi_{d'} = \frac{\sigma + \varepsilon}{2} > 0.$$

То есть получается, что при поднятых передних ногах перенос средних ног без потери статической устойчивости невозможен, даже если любым образом менять положение точек опоры задних ног, и, следовательно,

$$\xi_3(2) = \xi_4(2) = \xi_m - \sigma = \\ =_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} = \frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2}.$$

Тогда формула (20) дает

$$\Delta \leq a_e + \mathcal{L} - \varepsilon.$$

Но формула (20) была получена в предположении, что передние ноги робота, будучи предельно выпрямленными, ставятся на границу $\xi = \xi_m$. Допустим, что они уже там стоят. При этом центр несущей рамы проектируется внутрь опорного многоугольника, образованного задними и средними ногами и не доходит до передней границы этого многоугольника на заданный запас устойчивости ε :

$$\xi_1(3) = \xi_2(3) = \xi_m - 2a + \mathcal{L} - \varepsilon, \\ \xi_3(3) = \xi_4(3) = \xi_m - \sigma, \\ \xi_5(3) = \xi_6(3) = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_m - \sigma - \varepsilon.$$

Полученная позиция является ε -сбалансированной и центр рамы находится над опорным многоугольником образованным средними и задними ногами. Поэтому задние ноги одновременно поднимать невозможно. Невозможно также и сдвинуть корпус ни вперёд, ни назад. Теперь необходимо выполнить несколько подготовительных действий, которые зависят от величины σ .

а) Пусть $\sigma \geq \mathcal{L}$. Тогда робот должен перенести средние ноги на один полушаг $\mathcal{L}$ назад, переместить задние ноги в точки опоры с координатами $\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a - \sigma - \varepsilon$, затем поставить стопы средних ног в точки опоры $\xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma + \mathcal{L}$, после чего переместить корпус так, чтобы центр масс робота проектировался в точку, не доходящую до новых точек опоры средних ног на расстояние, равное запасу статической устойчивости ε , а потом перенести передние ноги на один относительный полушаг $\mathcal{L}$ в направлении от дальней границы зоны $\xi = \xi_M$. В итоге получится позиция, аналогичная той, что была получена на третьем шаге, но сдвинутая на один относительный полушаг $\mathcal{L}$ в сторону препятствия:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - \sigma' - a - \mathcal{L} - \varepsilon, \\ \xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma', \\ \xi_0 = \xi_m - \sigma' - \varepsilon, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_M + \mathcal{L},$$

где $\sigma' = \sigma - \mathcal{L}$.

б) Если окажется, что снова $\sigma' \geq \mathcal{L}$, то роботу придётся повторять процедуру а) до тех пор, пока в результате не окажется, что $\sigma' < \mathcal{L}$.

с) Пусть $\sigma' < \mathcal{L}$. Тогда роботу достаточно выполнить аналогичную волну переносов ног, переводящую его в позицию, при которой стопы средних ног находятся на ближней границе препятствия:

$$\xi_1(p) = \xi_2(p) = \xi_m - a, \\ \xi_3(p) = \xi_4(p) = \xi_m, \\ \xi_5(p) = \xi_6(p) = \xi_M + \sigma, \\ \xi_0(p) = \xi_m - \varepsilon,$$

где p — число шагов, необходимых для получения этой позиции.

Далее робот должен продвинуть корпус вперёд на расстояние $\mathcal{L} + \varepsilon$, оставив средние ноги в опоре на линии $\xi = \xi_m$. Затем следует перенести стопы задних ног, чтобы получить позицию

$$\xi_1(p+1) = \xi_2(p+1) = \xi_m - \sigma, \\ \xi_3(p+1) = \xi_4(p+1) = \xi_m, \\ \xi_5(p+1) = \xi_6(p+1) = \xi_M + \sigma, \\ \xi_0(p+1) = \xi_m + \mathcal{L}. \quad (30)$$

Теперь стопы средних ног можно переместить на дальнюю границу зоны препятствия с одновременным перемещением корпуса на расстояние $\mathcal{L} - \varepsilon$ и получить конфигурацию:

$$\xi_1(p+2) = \xi_2(p+2) = \xi_m - \sigma, \\ \xi_3(p+2) = \xi_4(p+2) = \xi_M, \\ \xi_5(p+2) = \xi_6(p+2) = \xi_M + \sigma, \\ \xi_0(p+2) = \xi_M - \mathcal{L},$$

симметричную позиции (30) относительно срединной линии зоны препятствия.

Следовательно, выполнив в обратном порядке действия, симметричные относительно срединной линии зоны препятствия, получим позицию:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_M, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_M + a, \\ \xi_0 = \xi_M + a + \varepsilon, \quad \xi_5 = \xi_6 = 2a,$$

что и доказывает теорему. $\diamond$

Следствие 1. Если длина корпуса позволяет выполнить движение “след в след” ($-\mu \leq \sigma \leq 0$), то предельно допустимая ширина зоны препятствия линейно возрастает при увеличении длины корпуса. Если движение “след в след” невыполнимо ($\sigma > 0$), то предельно допустимая ширина зоны препят-

ствия не зависит от длины корпуса и принимает максимальное значение

$$\max_a \Delta = 3L - \varepsilon. \quad (31)$$

Другими словами, при движении по ровной горизонтальной плоскости максимальная ширина преодолеваемой шагающим аппаратом зоны препятствия на запас ε статической устойчивости меньше утроенной максимальной длины относительного полушага или полтора полного относительного шага, и это не зависит от величины параметра $\sigma > 0$ (Рис. 1). Для преодоления зон, запрещённых для наступания, оптимальной является длина рамы корпуса, соответствующая $a \geq a_e = 2L$.

Доказательство. Если движение ША происходит по ровной горизонтальной плоскости ($F(\xi, \eta) \equiv 0$), то тогда $\mathcal{L}(\xi, \eta) \equiv L$. Теперь достаточно сопоставить формулы (26), (28) и (29). $\diamond$

II. Рассмотрим процесс преодоления зоны препятствия четырёхногим аппаратом, движущимся по горизонтальной плоскости. Для четырёхногого аппарата неравенство (20) принимает вид

$$\Delta < \max_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m - \varepsilon + \frac{a}{2} + L. \quad (32)$$

По-прежнему обозначим $a_e = 2L$, $a = a_e + \sigma$. Справедлива следующая теорема при возможности движения “след в след”

Теорема 4. Пусть применяется критерий (11) и

$$-a_e < -\mu \leq \sigma \leq -2\varepsilon, \quad \mu > 0, \quad a \geq 4\varepsilon, \quad L \geq 3\varepsilon.$$

Тогда максимальная ширина Δ зоны препятствия, которую четырёхногий робот может преодолеть при движении по плоскости, выражается равенством

$$\Delta = \frac{a_e + \sigma}{2} - \varepsilon + L, \quad (33)$$

Доказательство. Движение начнём со стандартной позиции перед препятствием, а именно:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \frac{a}{2}.$$

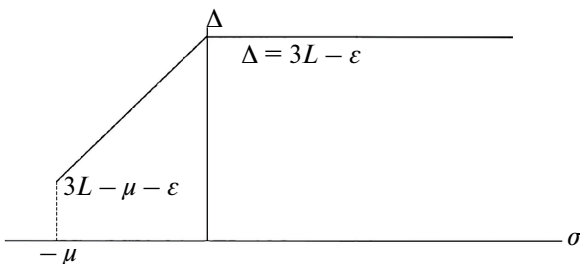


Рис. 1. Ширина преодолеваемой зоны препятствия для шестиногого аппарата.

Из этой позиции продвинем корпус по направлению к дальней границе препятствия так, чтобы центр корпуса не доходил до ближней границы зоны препятствия на расстояние ε :

$$\begin{aligned} \xi_1(1) = \xi_2(1) &= \xi_m - a, \\ \xi_3(1) = \xi_4(1) &= \xi_m, \quad \xi_0(1) = \xi_m - \varepsilon. \end{aligned}$$

Затем перенесём по очереди сначала левую заднюю, а затем правую заднюю ноги в новые точки опоры:

$$\begin{aligned} \xi_1(2) &= \xi_m, \quad \xi_2(2) = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon, \\ \xi_3(2) &= \xi_4(2) = \xi_m, \quad \xi_0(2) = \xi_m - \varepsilon. \end{aligned}$$

Полученная поза неплохо сбалансирована, поскольку смещения центров масс первой и четвертой ног почти компенсируют друг друга. Первую ногу можно поместить на ближнюю границу зоны, потому что $L > a/2 + \varepsilon$. Следовательно, передняя граница опорного многоугольника не изменилась, а задняя граница образуется первой и второй ногами, и её середина имеет координату $(\xi_1(2) + \xi_2(2))/2 = \xi_m - a/4 - \varepsilon$. Полученная координата из-за требования статической устойчивости должна быть меньше координаты центра корпуса по крайней мере на ε . Это будет выполнено при $a > 4\varepsilon$. Теперь можно начать перенос передних ног на дальнюю границу препятствия. Сначала переносим правую переднюю ногу:

$$\xi_1(3) = \xi_m, \quad \xi_2(3) = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon,$$

$$\xi_3(3) = \xi_m + \frac{a}{2} + L - \varepsilon = \xi_M,$$

$$\xi_4(3) = \xi_m, \quad \xi_0(3) = \xi_m - \varepsilon.$$

Далее можем перенести левую переднюю ногу, поскольку при ее переносе передняя граница опорного многоугольника будет образована третьей и второй ногами. Середина этой границы имеет координату $[\xi_2(3) + \xi_3(3)]/2 = \xi_m + L/2 - 3\varepsilon/2$, и эта координата должна быть больше, чем на ε , координаты центра корпуса. Поэтому должно быть $L > 3\varepsilon$. В итоге получится позиция

$$\xi_1(4) = \xi_m, \quad \xi_2(4) = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon,$$

$$\xi_3(4) = \xi_M = \xi_m + \frac{a}{2} + L - \varepsilon,$$

$$\xi_4(4) = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon.$$

В этой позиции центр масс системы смещён немного вперёд по сравнению с его положением в предыдущей позиции из-за выноса вперёд

передних ног. Поэтому ограничение на задний запас устойчивости ослабевает. Теперь надо поставить вторую ногу на переднюю границу препятствия. Во время её переноса задняя граница опорного многоугольника будет образована четвёртой и первой ногами, а её середина будет иметь координату

$$\frac{\xi_4(4) + \xi_1(4)}{2} = \xi_m + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon \right).$$

Для того, чтобы во время переноса второй ноги обеспечивалась статическая устойчивость, корпус следует продвинуть вперед на величину

$$\frac{1}{2} \left(a / 2 + \mathcal{L} + 3\varepsilon \right) < \mathcal{L} + \varepsilon.$$

Такое продвижение корпуса вперёд вполне возможно, так как максимальная длина полного шага в данном случае равна $a / 2 + L + 2\varepsilon \leq 2L + \varepsilon$. Выполнив указанное продвижение корпуса и последующий перенос второй ноги на ближнюю границу зоны препятствия, получим позицию:

$$\begin{aligned} \xi_1(5) = \xi_2(5) = \xi_m, \quad \xi_3(5) = \xi_4(5) = \xi_M, \\ \xi_0(5) = \xi_m + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \mathcal{L} + \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Теперь достаточно сдвинуть корпус назад на величину (-2ε) , чтобы получить симметричную позицию относительно средней линии зоны препятствия. После этого осталось выполнить все действия симметрично в обратном порядке для того, чтобы робот перебрался на другую сторону препятствия. $\diamond$

Замечание 4. В режиме статической устойчивости четырехногий аппарат не способен двигаться походкой “галоп”, успешно применённой для генерирования следовой последовательности шестиногого аппарата. Однако восьминогий аппарат уже обладает достаточным числом ног для возможности применения указанной походки.

Замечание 5. Сравнение проходимости четырехногих и шестиногих роботов удобно проводить, задав одинаковыми длины L их максимальных относительных полушагов и приняв $\sigma = 0$. В этом случае длина корпуса четырехногого робота составляет $a = 2L$, и без потери статической устойчивости он может преодолеть расщелину шириной $\Delta = 2L - \varepsilon$, то есть приблизительно равной длине корпуса. С другой стороны длина корпуса шестиногого робота составляет $2a = 4L$, и без потери статической устойчивости он может преодолеть расщелину шириной $\Delta = 3L - \varepsilon$, то есть приблизительно равную $3/4$ корпуса, но зато

корпус у него оказывается вдвое длиннее, чем у четырехногого. Таким образом при одинаковой длине шага шестиногий робот может преодолеть препятствие большей ширины, чем четырехногий, но длина корпуса четырехногого робота при этом используется более эффективно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдена верхняя не улучшаемая оценка ширины области, запрещённой для наступания, которую n -ногий робот может перешагнуть в режиме статической устойчивости. Полученная оценка выражает аналитическую зависимость предельной ширины препятствия от длины корпуса, требуемого запаса статической устойчивости и максимальной длины шага. Для шестиногого и четырехногого роботов построены следовые последовательности, доказывающие достижимость значений полученных оценок. Установлено, что предельная ширина препятствия, как функция от длины корпуса, имеет насыщение сверху, связанное с возможностью или невозможностью реализации движения “след в след”. По итогам исследования можно сделать следующие выводы

1. Оптимальное расстояние a между точками подвеса ног должно быть не меньше длины полного максимального шага. Увеличение параметра a по сравнению с указанным минимальным при сохранении числа ног не способствует увеличению ширины преодолимой зоны препятствия. Ширина преодолимой зоны препятствия может быть увеличена, если длину корпуса делать больше того значения, которое соответствует указанному минимальному значению параметра a , но вместе с увеличением числа ног.

2. Установлено, что при значительной массе ног использование роботом позиций, ε -сбалансированных по расположению ног относительно корпуса, позволяет уменьшить значение ε требуемого запаса статической устойчивости, за счёт чего увеличить ширину преодолимого препятствия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чебышев П.Л.* Научное наследие, вып. 2. Теория механизмов. М.: Изд. АН СССР, 1945.
2. *Ларкина В.А.* Шагающие роботы для спасательных операций. Обзор и анализ существующих моделей // Кибернетика и программирование. 2021. № 1. С. 35–73.
<https://doi.org/10.25136/2644-5522.2021.1.35862>
URL: https://nbpublish.com/library_read_article.php?id=35862

3. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. 312 с.
4. Эволюция роботов Boston Dynamics.
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=t3hPckJCx9s>
(дата обращения: 15.03.2022).
5. Павловский В.Е. О разработках шагающих машин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 101. 32 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013>
6. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. Преодоление шагающим роботом препятствий, характерных для равнины // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 21. 35 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-21>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-21>
7. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. Экстремальные локомоторные возможности инсектоморфных роботов. — М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. — 212 с. ISBN 978-5-98354-040-8.
<https://doi.org/10.20948/mono-2018-golubev>

GETTING OVER WIDE OBSTACLES BY THE MULTI-LEGGED ROBOT

Yu. F. Golubev^a

Presented by Academician of the RAS B. N. Chetverushkin

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia*

An upper estimate of the maximum width of the forbidden zone for foot fulcrums, which a walking robot with many legs can overcome in static stability mode, is presented. Using the mathematical models of six-legged and four-legged robots, it is shown that the obtained estimate can't be improved. For this purpose, the sequences of the robot's foot placement have been formed, ensuring the achievement of the estimation meaning. The dependence of the maximum width of the zone on the length of the body was found for the six-legged robot model.

Keywords: walking robots, overcoming obstacles