ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 518, с. 18–21

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ОБ УСЛОВИИ РАЗРУШЕНИЯ ТИПА ДИНИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

 А. А. Коньков[1, *], А. Е. Шишков[2, **]

Представлено академиком РАН В. В. Козловым
Поступило16.05.2024 г.
После доработки 05.07.2024 г.
Принято к публикации 05.07.2024 г.

Получено условие разрушения решений дифференциальных неравенств

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x,u) \ge g\left(|u|\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

где $m, n \ge 1$ — целые числа, а a_α и g — некоторые функции.

Ключевые слова: дифференциальные неравенства высокого порядка, нелинейность, разрушение решений

DOI: 10.31857/S2686954324040039, **EDN:** YZOCHS

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x,u) \ge g\left(|u|\right) \text{ в } \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $m, n \ge 1$ — целые числа, а a_α — каратеодориевы функции такие, что

$$\left|a_\alpha(x,\zeta)\right| \le A|\zeta|, \quad |\alpha| = m, \quad A = \text{const} > 0,$$

для почти всех $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и всех $\zeta \in \mathbb{R}$. Как это принято, под $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ мы подразумеваем мульти-индекс, причем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / (\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n})$. Предполагается также, что g — неубывающая выпуклая функция на промежутке $[0, \infty)$ такая, что $g(\zeta) > 0$ для всех $\zeta > 0$.

Обозначим через B_r^x открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x. В случае $x = 0$ будем писать B_r вместо B_r^0.

Функция $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ называется решением (1), если $g\left(|u|\right) \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m a_\alpha(x,u) \partial^\alpha \varphi dx \ge \int_{\mathbb{R}^n} g(|u|) \varphi dx \tag{2}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Отсутствие нетривиальных решений дифференциальных уравнений и неравенств или, другими словами, явление blow-up традиционно привлекает интерес многих математиков [1–15]. При этом большинство авторов имели дело с дифференциальными операторами второго порядка или ограничивались случаем степенной нелинейности $g(t) = t^\lambda$. Мы рассматривает неравенства высокого порядка с нелинейностью общего вида. В представленной вашему вниманию работе удалось получить условие blow-up типа Дини, которое усиливает результаты [8].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $n > m$ и при этом*

$$\int_1^\infty g^{-1/m}(\zeta) \zeta^{1/m-1} d\zeta < \infty \tag{3}$$

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

[2] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

*E-mail: konkov@mech.math.msu.su

**E-mail: aeshkv@yahoo.com

и

$$\int_0^1 \frac{g(r)dr}{r^{1+n/(n-m)}} = \infty. \qquad (4)$$

Тогда любое решение (*1*) *равно нулю почти всюду в* $\mathbb{R}^n$.

Замечание 1. *Случай* $n \le m$ *был рассмотрен в* [8, теорема 2.5]. *Именно, было показано, что при* $n \le m$ *и выполнении условия* (3) *любое решение* (1) *равно нулю почти всюду в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы 1 будет приведено в следующем разделе. Сейчас продемонстрируем ее применение.

Пример 1. *Рассмотрим неравенство*

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x,u) \ge c_0 |u|^\lambda \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad (5)$$

где $n > m$ λ — вещественное число. Согласно теореме 1, если

$$1 < \lambda \le \frac{n}{n-m} \qquad (6)$$

то любое решение (5) равно нулю почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что условие (6) неулучшаемо в классе степенных нелинейностей [9, 13].

Пример 2. *Будем исследовать случай критического показателя* $\lambda = n/(n-m)$ *в условии* (6). *Рассмотрим неравенство*

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x,u) \ge c_0 |u|^{n/(n-m)} \log^\mu\left(e + \frac{1}{|u|}\right) \qquad (7)$$

$$\text{в } \mathbb{R}^n, \quad c_0 = \text{const} > 0,$$

где $n > m$ и μ — вещественное число. При этом в случае $u = 0$ мы по непрерывности продолжаем правую часть (7) нулем.

В соответствии с теоремой 1, если

$$\mu \ge -1,$$

то любое решение (7) равно нулю почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В этом разделе через C и σ будем обозначать различные положительные постоянные, которые могут зависеть лишь от A, m и n. Нам потребуются следующие известные утверждения.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (3)*, тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^n} \int_{B_r} |u| dx = 0$$

для любого решения неравенства (1).

Лемма 1. *Пусть* u *— решение неравенства* (1), *тогда*

$$\int_{B_{r_2} \setminus B_{r_1}} |u| dx \ge C(r_2 - r_1)^m \int_{B_{r_1}} g(|u|) dx$$

для всех вещественных чисел $0 < r_1 < r_2$ *таких, что* $r_2 \le 2r_1$.

Доказательство теоремы 2 и леммы 1 приведено в [8, теорема 2.4 и лемма 3.1].

Начиная с этого момента, обозначим

$$E(r) = \int_{B_r} g(|u|) dx, \quad r > 0.$$

Лемма 2. *Пусть* u *— решение неравенства* (1), *тогда*

$$E(r) - E(r/2) \ge C r^n g\left(\frac{\sigma}{r^{n-m}} E(r/2)\right) \qquad (8)$$

для всех вещественных чисел $r > 0$.

Доказательство. Полагая $r_1 = r/2$ и $r_2 = r$ в лемме 1, получим

$$\frac{1}{\operatorname{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} |u| dx \ge \frac{\sigma}{r^{n-m}} \int_{B_{r/2}} g(|u|) dx.$$

Так как g — неубывающая функция, это приводит к оценке

$$g\left(\frac{1}{\operatorname{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} |u| dx\right) \ge g\left(\frac{\sigma}{r^{n-m}} \int_{B_{r/2}} g(|u|) dx\right).$$

Ввиду выпуклости g, имеем также

$$\frac{1}{\operatorname{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} g(|u|) dx \ge$$

$$\ge g\left(\frac{1}{\operatorname{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} |u| dx\right).$$

Таким образом, объединяя последние два неравенства, приходим к выводу что

$$\frac{1}{\operatorname{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} g(|u|) dx \ge g\left(\frac{\sigma}{r^{n-m}} \int_{B_{r/2}} g(|u|) dx\right)$$

для всех вещественных чисел $r > 0$, откуда немедленно следует (8). □

Доказательство теоремы 1. Предположим противное, пусть u — ненулевое решение (1). По лемме 1 справедливо неравенство

$$\frac{E(r)}{r^{n-m}} \le \frac{C}{r^n} \int_{B_{2r} \setminus B_r} |u| dx$$

для всех вещественных чисел $r > 0$, откуда в соответствии с теоремой 2 будем иметь

$$\lim_{r\to\infty} \frac{E(r)}{r^{n-m}} = 0.$$

Возьмем вещественное число $r_0 > 0$ такое, что $E(r_0) > 0$. Положим также $r_i = 2^i r_0$, $i = 1,2,\ldots$ Найдутся, очевидно, последовательности целых чисел $0 < s_i < l_i \le s_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{E(r_j)}{r_j^{n-m}} > \frac{E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}}$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$ и

$$\frac{E(r_j)}{r_j^{n-m}} \le \frac{E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}}$$

для всех $j \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$.

Поскольку E — неубывающая функция, получим

$$\frac{2^{n-m}E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}} \ge \frac{E(r_j)}{r_j^{n-m}} > \frac{E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}} \tag{9}$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$. Согласно лемме 1, справедлива оценка

$$E(r_{j+1}) - E(r_j) \ge C r_j^n g\left(\sigma r_j^{-n+m} E(r_j)\right),$$

из которой следует, что

$$\frac{E(r_{j+1}) - E(r_j)}{E^{n/(n-m)}(r_j)} \ge Ch\left(\sigma r_j^{-n+m} E(r_j)\right) \tag{10}$$

для всех $j = 1,2,\ldots$, где

$$h(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n/(n-m)}}.$$

Умножая (10) на неравенство

$$1 \ge \frac{r_j^{-n+m}E(r_j) - r_{j+1}^{-n+m}E(r_{j+1})}{r_j^{-n+m}E(r_j)},$$

имеем

$$\frac{E(r_{j+1}) - E(r_j)}{E^{n/(n-m)}(r_j)} \ge C\frac{h(\sigma r_j^{-n+m}E(r_j))}{r_j^{-n+m}E(r_j)} \times \\ \times\left(r_j^{-n+m}E(r_j) - r_{j+1}^{-n+m}E(r_{j+1})\right) \tag{11}$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$. Ввиду (9) и монотонности функции E можно утверждать, что

$$E(r_{j+1}) \ge E(r_j) > \frac{1}{2^{n-m}}E(r_{j+1})$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$. Тем самым, имеем

$$\int_{E(r_j)}^{E(r_{j+1})} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \ge C\frac{E(r_{j+1}) - E(r_j)}{E^{n/(n-m)}(r_j)}$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$. При этом (9) также приводит к оценке

$$\frac{h(\sigma r_j^{-n+m}E(r_j))}{r_j^{-n+m}E(r_j)}\left(r_j^{-n+m}E(r_j) - r_{j+1}^{-n+m}E(r_{j+1})\right) \ge \\ \ge C\int_{r_{j+1}^{-n+m}E(r_{j+1})}^{r_j^{-n+m}E(r_j)} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$, где

$$\tilde{h}(\zeta) = \inf_{(\zeta, 2^{n-m}\zeta)} h.$$

Таким образом, принимая во внимание (11), получим

$$\int_{E(r_j)}^{E(r_{j+1})} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \ge C\int_{r_{j+1}^{-n+m}E(r_{j+1})}^{r_j^{-n+m}E(r_j)} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$. Суммируя последнее выражение по всем $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty}[s_i, l_i)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E(r_{s_i})}^{E(r_{l_i})} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \ge C\sum_{i=1}^{\infty}\int_{r_{l_i}^{-n+m}E(r_{l_i})}^{r_{s_i}^{-n+m}E(r_{s_i})} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta}d\zeta,$$

откуда ввиду того, что $E(r_{s_{i+1}}) \ge E(r_{l_i})$ и $r_{l_i}^{-n+m}E(r_{l_i}) \le r_{s_{i+1}}^{-n+m}E(r_{s_{i+1}})$ для всех $i > 1$ и при этом

$$\lim_{i\to\infty} r_{l_i}^{-n+m}E(r_{l_i}) = 0,$$

приходим к оценке

$$\int_{E(r_{s_1})}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \ge C\int_0^{r_{s_1}^{-n+m}E(r_{s_1})} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta}d\zeta. \tag{12}$$

Согласно выбору вещественного числа r_0 и монотонности функции E имеем $E(r_{s_1}) \ge E(r_0) > 0$, поэтому

$$\int_{E(r_{s_1})}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} = \frac{m}{n-m}E^{-m/(n-m)}(r_{s_1}) < \infty.$$

В то же время, из монотонности функции g следует, что

$$\tilde{h}(\zeta) \ge \frac{1}{2^n}\frac{g(\zeta)}{\zeta^{n/(n-m)}}.$$

Тем самым, (12) приводит к неравенству

$$\int_0^{r_{s_1}^{-n+m}E(r_{s_1})} \frac{g(\sigma\zeta)d\zeta}{\zeta^{1+n/(n-m)}} < \infty,$$

которое противоречит (4). Доказательство завершено. □

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора поддержана Минобрнауки России в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по договору 075-15-2022-284 (критические показатели), и Российского научного фонда, проект 20-11-20272-П (оценки глобальных решений). Работа второго автора поддержана Российским научным фондом, проект 23-11-00056 (асимптотические свойства решений).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galaktionov V.A., Mitidieri E.L., Pohozaev S.I.* Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schroedinger equations. Monographs and Research Notes in Mathematics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2014.
2. *Filippucci R.* Nonexistence of positive entire weak solutions of elliptic inequalities // Nonlin. Anal. 2009. V. 70. P. 2903–2916.
3. *Filippucci R., Pucci P., Rigoli M.* Non-existence of entire solutions of degenerate elliptic inequalities with weights // Arch. Ration. Mech. Anal. 2008. V. 188. P. 155–179. Erratum: 2008. V. 188. P. 181.
4. *Ghergu M., Radulescu V.* Existence and nonexistence of entire solutions to the logistic differential equation, // Abstr. and Appl. Anal. 2003. V. 17. P. 995–1003.
5. *Keller J.B.* On solution of $\Delta u = f(u)$ // Comm. Pure. Appl. Math. 1957. V. 10. P. 503–510.
6. *Kondratiev V.A., Veron L.* Asymptotic behavior of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations // Asymp. Anal. 1997. V. 14. P. 117–156.
7. *Kon'kov A.A.* On properties of solutions of quasilinear second-order elliptic inequalities // Nonlin. Anal. 2015. V. 123–124. P. 89–114.
8. *Kon'kov A.A., Shishkov A.E.* Generalization of the Keller–Osserman theorem for higher order differential inequalities // Nonlinearity 2019. V. 32. P. 3012–3022.
9. *Kon'kov A.A., Shishkov A.E.* On blow-up conditions for solutions of higher order differential inequalities // Appl. Anal. 2019. V. 98:9. P. 1581–1590.
10. *Marcus M., Shishkov A.E.* Fading absorption in non-linear elliptic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire 2013. V. 30. P. 315–336.
11. *Naito Y., Usami H.* Entire solutions of the inequality $\mathrm{d}iv(A(|Du|)Du) = f(u)$ // Math. Z. 1997. V. 225. P. 167–175.
12. *Naito Y., Usami H.* Nonexistence results of positive entire solutions for quasilinear elliptic inequalities // Canad. Math. Bull. 1997. V. 40. P. 244–253.
13. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
14. *Osserman R.* On the inequality $\Delta u \ge f(u)$ // Pacific J. Math. 1957. V. 7. P. 1641–1647.
15. *Shishkov A.E., Veron L.* Admissible initial growth for diffusion equations with weakly superlinear absorption // Commun. Contemp. Math. 2016. V. 18. 05, 1550089.
16. *Veron L.* Comportement asymptotique des solutions d'equations elliptiques semi-lineaires dans R^n // Ann. Math. Pure Appl. 1981. V. 127. P. 25–50.

ON A DINI TYPE BLOW-UP CONDITION FOR SOLUTIONS OF NONLINEAR HIGHER ORDER DIFFERENTIAL INEQUALITIES

A. A. Kon'kov[a, b], A. E. Shishkov[a]

Presented by Academician of the RAS V. V. Kozlov

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

[b] *RUDN University, Moscow, Russian Federation*

We obtain a Dini type blow-up condition for solutions of the differential inequality

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x,u) \ge g\left(|u|\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

where $m, n \ge 1$ are integers and a_α and g are some functions.

Keywords: higher order differential inequalities, nonlinearity, blow-up