

СПОСОБЫ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖУЩИМСЯ В $\mathbb{R}^3$ ОБЪЕКТОМ В УСЛОВИЯХ ЕГО ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

© 2024 г. Академик РАН В. И. Бердышев^{1, *}

Поступило 14.06.2024 г.
После доработки 08.07.2024 г.
Принято к публикации 08.07.2024 г.

Предлагаются способы действия наблюдателя f при слежении за объектом t , движущимся в $\mathbb{R}^3$ по кратчайшей траектории $\mathcal{T}$, огибающей набор $\{G_i\}$ выпуклых множеств. Объект имеет скоростные мини-объекты, представляющие опасность для наблюдателя. Способы наблюдения зависят от геометрических свойств множеств G_i и траектории $\mathcal{T}$. Задача наблюдателя — отследить движение объекта на возможно большей части траектории $\mathcal{T}$.

Ключевые слова: навигация, движущийся объект, наблюдатель, локатор, видеоискатель, кратчайшая траектория

DOI: 10.31857/S2686954324030205, **EDN:** ZWOYDI

1. Траектория $\mathcal{T}$ движущегося объекта t огибает набор выпуклых множеств G_i с непустой внутренностью, соединяет пару точек t_0, t^0 , лежащих вне $\cup G_i$ и является кратчайшей в классе таких кривых.

Она состоит из дуг Λ_i и отрезков Δ_i (рис. 1)

$$\Lambda_i = \widehat{t_i, \bar{t}_i}, \quad \Delta_i = [\bar{t}_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, \dots, n),$$

соединяющих эти дуги. Длина дуги обозначается через $|\cdot|$.

Объект движется с постоянной по величине скоростью v_t . Он обладает набором автономных мини-объектов m , способных двигаться прямолинейно с постоянной скоростью v_m , видя перед собой наблюдателя. Далее предполагается, что объект имеет возможность запустить очередной мини-объект только через промежуток времени τ , больший, чем заданный $\tau_m > 0$. Наблюдатель изображается шаром $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса $\varepsilon \geq 0$ с локатором f в центре. Скорость v_f наблюдателя ограничена константой $K > 0$, при этом $|v_t| < |v_f| \leq K < |v_m|$. Попадание мини-объекта в открытый шар $V_\varepsilon(f)$ означает гибель наблюдателя. Задача наблюдателя — отследить лучом локатора движение объекта на возможно большей части траектории $\mathcal{T}$. Далее будем использовать обозначения

$$l(t)^+ = \{t + \eta \vec{v}(t) : \eta > 0\},$$

$$\text{где } \vec{v}(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow +0} \frac{t(\tau + \Delta\tau) - t(\tau)}{\Delta\tau} \quad (1)$$

— вектор скорости объекта в точке $t \in \mathcal{T}$, $l = l(t)$ — вектор, касательный к ∂G в точке $t \in \partial G$, $l \cap \overset{\circ}{G} = \emptyset$: если $q \in l$ и $q \rightarrow t$, то $\rho(q, G) = o(\|q - t\|)$, где ρ — расстояние. Для луча $l(t)$, касательного к ∂G в точке t , числа $r > 0$ и точки $f \in l(t)$ обозначим через $T = T(t, f, r)$ тор, полученный вращением вокруг луча $l(t)$ шара радиуса r , касающегося луча $l(t)$ в точке f .

2. Рассмотрим задачу слежения за объектом на дуге, образованной первой парой $[t_0, t_1] \cup \bar{t}_1, t_1$ (рис. 2). Указанная дуга является кратчайшей дугой на множестве $G^* = \text{conv}(t_0 \cup G)$, соединяющей точки t_0 и $\bar{t}_1$, где $\text{conv}(\cdot)$ — выпуклая оболочка множества $(\cdot)$, $G = G_1$.

Пусть $[\bar{t}_0, t^*] \subset \mathcal{T}$ — максимальный прямолинейный отрезок траектории $\mathcal{T}$, содержащий точку t_1 (рис. 2). Из теоремы 7 [4] следует, что t_1 либо гладкая точка на ∂G^* , либо она лежит на ребре поверхности ∂G^* , которое пересекается с $\mathcal{T}$ трансверсально. В первом случае, в соответствии с теоремой Бернулли (см. [5]), главная нормаль траектории $\mathcal{T}$ в точке t_1 есть нормаль к поверхности ∂G^* в точке t_1 , и плоскость $R = R(t_1)$, содержащая эту нормаль и касательную, является соприкасающей для траектории $\mathcal{T}$ в точке t_1 . Переобозначим $t_1 = t_1$.

¹ Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

*E-mail: bvi@imm.uran.ru

$$\{\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k+1}\} \cup [t_{2k+1}, t_{2(k+1)}] \subset [\tilde{t}_0, g]. \quad (3)$$

Движение объекта по первому отрезку пары контролируется наблюдателем, движение по второму выполняется вне наблюдения. При этом

$$\begin{aligned} \|\tilde{t}_{2k+1} - \tilde{t}_{2k}\| &= \|\tilde{t}_{2k} - g\| \frac{|v_t|}{|v_m|}, \\ \|\tilde{t}_{2k} - \tilde{t}_{2k-1}\| &= 2\varepsilon \frac{|v_t|}{K}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $[t_{2k+1}, t_{2k}] \subset [g, \tilde{t}_0]$ – ближайший к точке g контролируемый отрезок. Обозначим $t_* = \tilde{t}_{2k+1}$ (рис. 2). Изложенный способ наблюдения будем обозначать цифрой I. Его эффективность зависит от величин ε и $|v_m|$. Он не позволяет отследить движение объекта на отрезке $[t^*, g]$. В самом деле, допустив, что $t \in [f_1, g]$ и t виден с позиции f_1 , мы позволяем объекту посредством мини-объекта уничтожить наблюдателя, который не успевает укрыться в позиции $V_\varepsilon(f_1^0)$.

3. Задача слежения за движением на дуге
 $\Lambda = \widehat{t_1, t_1}$ усложняется при наличии длинных участков, близких к прямолинейным. Выпуклая поверхность ∂G называется строго выпуклой, если она не содержит прямолинейных отрезков. Для определения "степени" выпуклости ограниченного телесного множества в $\mathbb{R}^3$ введем характеристику $C(d)$, близкую к известному понятию модуля выпуклости (см. J. A. Clarkson [3]). Пусть $t \in \partial G$ и $l = l(t)$ – касательный к ∂G вектор в точке t , $f \in l$, $f \neq t$, P_f – ортогональная лучу l плоскость, $f \in P_f$, $r > 0$, $T = T(t, f, r)$ – тор, определенный в п. 1 (см. также (2)),

$$\left. \begin{aligned} P(t, f) &= \sup\{r : T(t, f, r) \cap G = \\ &= \emptyset, P_f \cap G \neq \emptyset\}, \\ C(d) &= C(G, d) = \inf\{P(t, f) : \|t - f\| \geq \\ &\geq d, t \in \Lambda, f \in l(t)\}, 0 < d < |\Lambda| \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Для построения алгоритма слежения за объектом, движущимся по дуге $\Lambda \subset T$, надо знать, что в d -окрестности $\{V_d(t) : t \in \Lambda\}$ дуги нет телесных множеств кроме $\cup_i G_i$, и часть поверхности ∂G , попавшая в указанную d -окрестность, является строго выпуклой. Далее d таково, что $C(d) > \varepsilon$.

Предлагаемый далее пошаговый способ II слежения за объектом (шаги 2, 3, ...), движущимся по дуге $\Lambda = \widehat{t_1, t_1} \subset \partial G$, позволяет отследить движение объекта на коротких участках (см. (7)) траектории.

По завершению алгоритма I, приступая к выполнению шага 1 алгоритма II слежения за объектом на дуге t_1, t_1 , имеем: объект t находится в позиции $t_* = t_{2k+1}$, определим позицию $V_\varepsilon(f_2)$ наблюдателя $f_2 \in l^+(t_1)$ (где $t_1 = t_1$) так, что

$$\begin{aligned} T(t_1, f_2, \varepsilon) \cap G &= \emptyset, \\ d = \|f_2 - t_1\| &= \gamma + \frac{\varepsilon |v_m|}{K}, \\ \text{где } \gamma &= \tau_m |v_m|, \end{aligned} \quad (6)$$

τ_m – заданный минимальный временной промежуток между очередными пусками мини-объектов, точка $e_1 \in [f_2, t_1]$ такова, что $\|e_1 - t_1\| = \gamma$. Определим шар $V_\varepsilon(f_2^0)$ из тора $T(t_1, f_2, \varepsilon)$, для которого $f_2^0 \in R^+(t_1)$, и точку $t_2 \in T$, ближайшую к точке f_2^0 .

Наблюдатель в позиции f_2 ждет прибытия объекта в точку t_1 .

В момент прибытия объекта в точку t_1 наблюдатель включает локатор, мини-объект стартует из точки t_1 по лучу $l^+(t_1)$, а объект продолжает движение по T . Наблюдатель следит за объектом с позиции f_2 в течение времени $\gamma / |v_m|$ – до прибытия мини-объекта из точки t_1 в точку e_1 . За это время объект проходит расстояние

$$\gamma \cdot \frac{|v_t|}{|v_m|}, \quad (7)$$

начиная с точки t_1 , но, ввиду неравенства $\gamma \leq \tau_m |v_m|$, он не может запустить мини-объект в сторону наблюдателя. Затем наблюдатель на скорости K перемещается из точки f_2 в точку f_2^0 (см. рис. 2). Мини-объект за это время проходит от точки e_1 по лучу $l(t_0)$ расстояние $\varepsilon |v_m| / K$, касается уже занявшего позицию $V_\varepsilon(f_2^0)$ наблюдателя, не разрушая его. Итак, объект на первом шаге проходит расстояние

$$\|t^* - f_2\| \frac{|v_t|}{|v_m|},$$

при этом начальный участок длины (7) преодолевается под наблюдением.

На шаге $n = 2$ в точке $t_2 \in T$, ближайшей к f_2^0 , строится касательный луч $l^+(t_2)$ и определяется точка $f_3 \in l^+(t_2)$, для которой

$$\begin{aligned} d = \|f_3 - t_2\| &= \gamma + \varepsilon \frac{|v_m|}{K}, \\ \gamma &= \|e_2 - t_2\|, \quad e_2 \in [t_2, f_3]. \end{aligned}$$

Среди шаров, образующих тор $T(t_2, f_3, \varepsilon)$, найдем шар $V_\varepsilon(f_3^0)$, для которого $f_3^0 \in R^+(t_2)$, и точку $t_3 \in T$, ближайшую к f_3^0 . Максимальная скорость K наблюдателя должна обеспечить ему возможность пройти расстояние $\|f_2^0 - f_3\|$ быстрее, чем объект проходит дугу $\widehat{t_1, t_2}$. Например, когда

$$\frac{\|f_2^0 - t\|_2 + d}{K} \leq \frac{\|t_2 - t_1\|}{|v_t|}.$$

Наблюдатель, находясь в позиции f_3 , ждет прибытия объекта в точку t_2 , затем включает локатор и, повторяя действия, выполненные на первом шаге, отслеживает движение объекта на участке траектории длины (7), начиная от t_2 , и переходит в позицию f_3^0 , и т. д.

Далее объект переходит на прямолинейный отрезок $[t_1, t_2]$. Пусть $t_n \in t_1, t_1$ и $\{t_n, f_{n+1}\}$ — последняя пара, удовлетворяющая условиям алгоритма II, тогда точка $t_{n+1} \in T$, ближайшая к f_{n+1}^0 , лежит на отрезке $[\bar{t}_1, t_2]$ (см. рис. 3). Движение объекта на отрезке $[\bar{t}_1, t_2]$, соединяющем G_1 и G_2 , будет контролироваться посредством алгоритма I. По завершению алгоритма II, объект занимает позицию t_n , а наблюдатель — f_{n+1} . По аналогии с предыдущим случаем (см. рис. 2) исходной позицией наблюдателя назначается точка $f_{n+2} \in l^+(\bar{t}_1)$. В начальной стадии алгоритма I объект движется по T от точки t_n , а наблюдатель — на максимальной скорости с позиции $V_\varepsilon(f_{n+1}^0)$ в позицию $V_\varepsilon(f_{n+2}^0)$. В этой позиции наблюдатель либо ждет прибытия объекта в точку $\bar{t}_1$, если еще $t \in t_n, \bar{t}_1$, либо включает радар, вызывая на себя мини-объект, если уже $t \in [t_1, t_2]$, и т. д.

Замечание. Из теоремы 7 [1] следует, что множество гладких точек кратчайшей траектории T всюду плотно на ней, поэтому на каждом шаге i , вместо ближайшей к f_i^0 точки t_i из T , можно взять близкую гладкую точку из T .

Теорема. Пусть для каждого i :

$$- |\Delta_i| > \frac{\varepsilon |v_m|}{K} = \|t_i - g_i\|, g_i \in \Delta_i,$$

— существует $d, 0 < d < |\Delta_i|$ такое, что d — окрестность $\{V_d(t) : t \in \Delta_i\} \cap \partial G_i$ является строго выпуклой поверхностью и $C(G_i, d) \geq \varepsilon$ (см. (5)).

Способ I наблюдения за движущимся по отрезку $[t_{i-1}, g_i]$ объектом t позволяет построить последовательность пар отрезков

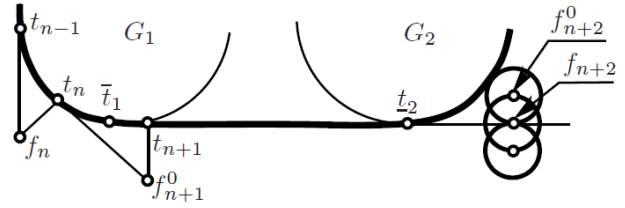


Рис. 3. Жирной линией изображена траектория T , окружности тора — тонкой.

$$\{[\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k+1}] \cup [\tilde{t}_{2k+1}, \tilde{t}_{2(k+1)}], k = 0, \dots\} \subset [\bar{t}_i, g_i],$$

движение по первому (ближнему к $\bar{t}_i$) отрезку каждой пары контролируется наблюдателем, а движение по второму отрезку происходит вне наблюдения; длины отрезков приведены в (4).

Способ II позволяет последовательно построить набор троек

$$\{t_n \in \Delta_i, f_{n+1} \in l^+(t_n), f_{n+1}^0\}_n,$$

где t_{n+1} — ближайшая к f_{n+1}^0 точка из Δ_i , $\|f_{n+1} - f_{n+1}^0\| = \varepsilon$, и наблюдатель, двигаясь по отрезку $[f_{n+1}, f_{n+1}^0]$, контролирует движение объекта на участке длины $\gamma |v_t| / |v_m|$ (см. (6), (7)), принадлежащем дуге Δ_i .

В частном случае $\varepsilon = 0$ наблюдатель может получить изображение объекта t на сколь угодно большой сетке $\{t_n \in \Delta\}$. Имеет место

Следствие. Пусть поверхность ∂G в окрестности дуги $\Delta \subset T \subset \partial G$ является строго выпуклой, наблюдатель f изображается точкой, т. е. $\varepsilon = 0$; $K > 2 |v_t|$ и задано число $\delta, 0 < \delta < |\Delta|$. Способ II позволяет построить набор пар $\{t_n \in \Delta, f_{n+1} \in l^+(t_n)\}_{n=1, \dots}$ таких, что точка t_n — ближайшая к f_n на T и $|\widehat{t_n, t_{n+1}}| \leq \delta$. Наблюдатель f_{n+1} снимает информацию, касающуюся объекта в точке $t = t_n$, и уходит к точке t_{n+1} , избегая встречи с мини-объектом, стартовавшим с позиции t_n в сторону точки f_{n+1} .

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.Б. Костоусову за обсуждение тематики исследования.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милка А.Д. Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях // Мат. заметки. 1984. Т. 35. Вып. 4. С. 617–635.
2. Люстерник Л.А. Геодезические линии. М.—Л.: Гос. изд-во технико-теорет. литературы, 1940. 50 с.
3. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 396–414.

METHODS FOR OBSERVING AN OBJECT MOVING IN $\mathbb{R}^3$ UNDER CONDITIONS OF ITS OPPOSITION

Academician of the RAS V. I. Berdyshev^a

^a*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

We propose ways of action of the observer f when tracking an object t moving in $\mathbb{R}^3$ along the shortest trajectory $\mathcal{T}$ enveloping the set $\{G_i\}$ of convex sets. The object has velocity mini-objects that pose a hazard to the observer. The means of observation depend on the geometric properties of the sets G_i and the trajectory $\mathcal{T}$. The observer's task – to track the motion of the object over as much of the $\mathcal{T}$ trajectory as possible.

Keywords: navigation, moving object, observer, locator, viewfinder