

УДК 513.63

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОТОКОВ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ТЕРМОЭДС ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛ ПО ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Г. Г. Лазарева^{1, *}, В. А. Попов^{1, **},
В. А. Окишев^{1, ***}, А. В. Бурдаков^{2, ****}

Поступило 31.03.2024 г.
После доработки 06.05.2024 г.
Принято к публикации 08.05.2024 г.

В работе рассмотрена модель распределения тока в образце вольфрама и испаряемом веществе при нагреве поверхности электронным пучком. Модель основана на решении уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для расчета температуры в области образца в цилиндрической системе координат. На основе распределения температуры в расчетной области рассчитаны электрическое сопротивление и термоЭДС через интеграл по энергии электронов в каждом узле сетки. Конфигурация электромагнитного поля является причиной вращения вещества, которое наблюдается в эксперименте. Результаты проведенного моделирования показали роль термоэмиссии и пути развития модели. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН.

Ключевые слова: математическое моделирование, эрозия вольфрама, задача Стефана, уравнения электродинамики, электрическое сопротивление, термоЭДС, термоэмиссия

DOI: 0.31857/S2686954324030101, EDN: YBAICW

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение расплава является одним из самых разрушительных последствий развития неустойчивостей на современных установках для изучения термоядерной плазмы. При оплавлении и дальнейшем разогреве материала стенок, лимитера или дивертора они начинают испаряться. Место контакта расплава и испарённого газа приводит в движение расплав под действием термоэлектрических эффектов из-за большого магнитного поля, необходимого для удержания плазмы. Взаимодействие плазмы с поверхностью является одним из важнейших проблем при выборе материала дивертора конструируемых термоядерных реакторов. Возможное облечение

нейтронами высоких энергий и высокие тепловые нагрузки накладывают серьезные ограничения на свойства материала. Ожидаемые высокие тепловые нагрузки приводят к эрозии и плавлению материала. Быстрое плавление приводит к изменению формы поверхности материала дивертора в результате движения расплава. Такое движение может быть инициировано гравитацией, влиянием газа или плазмы на процесс плавления и силой Лоренца. Движение под действием этих сил активно изучается [26]. Неоднородность температуры в расплаве приводит к возникновению течения тока. В областях с перепадами температуры возникает электродвижущая сила. Важно, что в газе и в расплаве электродвижущая сила отличается. Поэтому возникает ненулевое ускоряющее напряжение на замкнутом контуре через газ и расплав, которое порождает ток по этому контуру. Величина проводимости зависит от температуры. Сила Лоренца оказывает наибольшее влияние [27], так как управляемый термоядерный синтез с магнитным удержанием плазмы связан с сильным магнитным полем. Сильное магнитное поле увеличивает силу Лоренца, которая провоцирует движение расплава. Подробное моделирование поможет разобраться в механизмах развития термоотоков и позволит

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики имени Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

* E-mail: lazareva-gg@rudn.ru

** E-mail: apsolodov@mail.ru

*** E-mail: okishev-va@rudn.ru

**** E-mail: a.v.burdakov@mail.ru

разработать методы их подавления. На экспериментальном стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН [28] проводились эксперименты, в которых влияние силы Лоренца рассматривалось среди других причин вращения расплава. В работе [29] описано состояние газа над поверхностью образца и сделаны оценки влияния испаряемого вещества на видимое движение расплава. Предполагается, что при нагреве образуется замкнутый ток по разнице температур на границе раздела газ/расплава. Ток обтекает разогретую область. Натурный эксперимент постоянно сопровождается численным [30]. Модель нагрева вольфрама основана на решении двухфазной задачи Стефана в области образца с учетом испарения. Учет процесса испарения гарантирует ограничение роста температуры в образце, что соответствует экспериментальным данным. Рассмотрена и модифицирована для стационарного случая в цилиндрической системе координат система уравнений Максвелла для расчета тока. Система уравнений замкнута при помощи материального уравнения, в нашем случае обобщения закона Ома. Процесс распространения тока можно считать стационарным, так как характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи. С учетом особенностей постановки для описания тока достаточно только одной угловой компоненты векторного потенциала тока, описывающей “завихренность” тока. При расчёте токов без учёта испаряющегося газа [31] граничные условия являлись решающей характеристикой для определения токов. В данной начально-краевой задаче решение определяется правой частью уравнения, так как рассматриваемая область содержит источники тока за счёт учёта термоэмиссии. В работе [32] проведен анализ и валидация представленной модели в упрощенной постановке задачи. Расчеты проводились для постоянных параметров материала и модельного распределения температуры, различных в металле и парах над образцом. Проведена регуляризация уравнения для токов [32, 33]. В работе [33] рассматриваемая математическая модель была апробирована для случая расчета удельной проводимости и термоЭДС в газе в упрощенном виде. В парах вольфрама термоЭДС выражен через оценку коэффициента Зеебека. Выражение для удельного сопротивления в газе определено как величина обратно пропорциональная степени ионизации. Степень ионизации определяется как положительный корень уравнения Саха. В данной ра-

боте удельное сопротивление и термоЭДС рассчитываются как зависимости через интеграл по энергии электронов. Удельная проводимость в газе считается зависящей только от его температуры. При этом требуется определить среднее время между столкновениями, энергию и функцию распределения электронов через химический потенциал электрона и массу электрона. Будем считать, что распределение скоростей электронов сферически симметрично и дисперсионное соотношение соответствует случаю идеального газа. Время между столкновениями определяется по правилу Матиссена через концентрации атомов и ионов, степени ионизации. Концентрации атомов на этом этапе моделирования определено как плотность насыщенных паров. Степень ионизации определяется как положительный корень уравнения Саха через длину волны де Бройля и энергию ионизации вольфрама. Поперечные сечения переноса импульса атомов и ионов вычисляются через кулоновский логарифм, записанный с использованием приближения бинарных столкновений. Это приближение хорошо описывает слабо неидеальную плазму, поскольку оно также учитывает случай, когда число Дебая немного больше единицы. Математическая модель разработана для изучения свойств вольфрама, но результаты работы могут представлять интерес для исследования других металлов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В экспериментах на установке BETA образцы прокатанного вольфрама подвергались воздействию осесимметричного электронного пучка. Плотность мощности на нагреваемой поверхности по радиусу имеет распределение, близкое к нормальному, что определяет выбор аксиально-симметричной постановки задачи. На каждом временном шаге численного моделирования плотность мощности берется из файла экспериментальных данных. Распределение плотности мощности нагрева по поверхности измеряли с помощью рентгеновской визуализации. Электроны с энергией $80 \div 90$ кэВ нагревают материал в слое, который является тонким по сравнению с характерной глубиной нагрева материала. Тепло, поглощенное поверхностью, распространяется в материал. Образец имеет размеры $25 \text{ мм} \times 25 \text{ мм}$ и типичную толщину 4 мм . Поскольку за такое короткое время образец нагревается на глубину нескольких сотен микрон, область моделирования представляла собой поперечное сечение образца (толщина об-

разца 3 мм) и тонкого слоя паров (толщина слоя 3 мм): область 12 мм×6 мм. Численная модель распределения тока пучка в нагреваемом образце и в парах вольфрама сводится к совместному решению задачи Стефана и уравнения для токов, полученного из системы уравнений Максвелла.

Расплав вращается во время нагрева электронным пучком, что наблюдается в ходе экспериментов после серии выстрелов электронным пучком в одно и то же место [34]. Пучок движется к мишени в магнитном поле, так что магнитное поле на мишени имеет значительную (до 0.3 Тл) нормальную к поверхности компоненту. По ускоряющему напряжению, провалу потенциала в пучке, току в диоде и на мишени устанавливаются ток и мощность нагрева. По отпечатку на люминофоре в калибровочном выстреле устанавливается пространственное распределение пучка (поперечный размер), что в итоге даёт возможность узнать изменение во времени плотности мощности пучка и плотности тока на мишень. Плотности мощности достаточно, чтобы нагреть вольфрам до кипения и заметно больше. Видимое движение расплава похоже на вращение под действием силы Лоренца на ток $j \times B$ направлении на внешнюю часть расплава, но не совпадает по с характерной скоростью.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Для расчета распространения температуры с нагреваемой поверхности вглубь образца решается задача Стефана:

$$\left\{ \begin{aligned} c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} + \\ &+ \frac{\rho^*(T)}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho^*(T)}{\rho_0}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}, \\ (n,\nabla T)|_\gamma &= \frac{W(t,r) - N(t,r)}{\lambda(T)}, \\ (n,\nabla T)|_{\Gamma \setminus \gamma} &= 0, \\ T|_{t=0} &= T_0, \\ \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial t} \right] &= L_m v_n, [T]|_S = 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где $T(r, z, t)$ – температура, $c(T)$ – удельная теплоемкость, $\rho^*(T)$ – плотность (график), $\rho_0 = \rho(T)$ – плотность в начальный момент времени, $\lambda(T)$ – теплопроводность, $W(t, r)$ – распределение мощности по поверхности теплового потока γ , $N(t, r)$ – испарение на поверхности, n – нормаль к поверхности, Γ – вся граница расчетной области, T_0 – началь-

ная температура, S – свободная граница, L_m – энтальпия фазового перехода, v_n – скорость границы фазового перехода. Температура плавления $T_m = 3695^\circ K$.

Для расчетов можно использовать известные данные о градиенте температуры испаряющегося вольфрама над поверхностью [35]. Расчеты проведены в предположении, что температура газа постоянно на расстоянии 3 мм при удалении от поверхности, что качественно соответствует расчетным данным. При этом полученная в результате решения задачи Стефана зависимость температуры от радиуса сохраняется.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ОБРАЗЦЕ И ГАЗЕ

Полученное распределение температуры позволяет рассчитать удельное сопротивление в образце и в газе. Если удельное сопротивление ρ_e в образце задается [31] в виде экспериментально полученной зависимости от температуры (см. рис. 1а), то удельную проводимость в газе необходимо вычислить. Найдем удельную электропроводность газа $\sigma = 1 / \rho_e$ как интеграл по энергии электронов¹[36]:

$$\sigma = -\frac{A}{T} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \tau(\varepsilon) \varepsilon^{(3/2)} d\varepsilon, \quad (2)$$

где константа A определена в [29], $\tau(\varepsilon)$ – это среднее время между столкновениями. Энергию ε и функцию распределения электронов f можно получить из выражений:

$$\varepsilon = \frac{m_e \vec{v}^2}{2}, f = \left(1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T} \right) \right)^{-1}. \quad (3)$$

Здесь μ – это химический потенциал электрона, m_e – масса электрона. Уравнение (3) выражает предположение, что распределение скоростей электронов \vec{v} сферически симметрично и дисперсионное соотношение соответствует случаю идеального газа. Время между столкновениями определяется по правилу Матиссена [37]:

$$\tau^{-1}(\varepsilon) = n_a v(\varepsilon) \sigma_{tr,a} + n_i v(\varepsilon) \sigma_{tr,i}(\varepsilon), n_i = \alpha n_a,$$

Здесь n_a, n_i – это концентрации атомов и ионов, α – степень ионизации. Концентрации атомов на этом этапе моделирования определяется как плотность насыщенных паров:

$$n_a = \frac{1}{kT} \exp\left(26.19104 - \frac{83971.3K}{T} \right) 10^{-12} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2 \cdot \text{мкс}},$$

¹ Интеграл является сходящимся, так как подынтегральная функция непрерывна и ограничена.

где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж / К – постоянная Больцмана. Степень ионизации определяется как положительный корень уравнения Саха:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{2}{\lambda_d^3 n_a} \exp\left(-\frac{I_t}{T}\right),$$

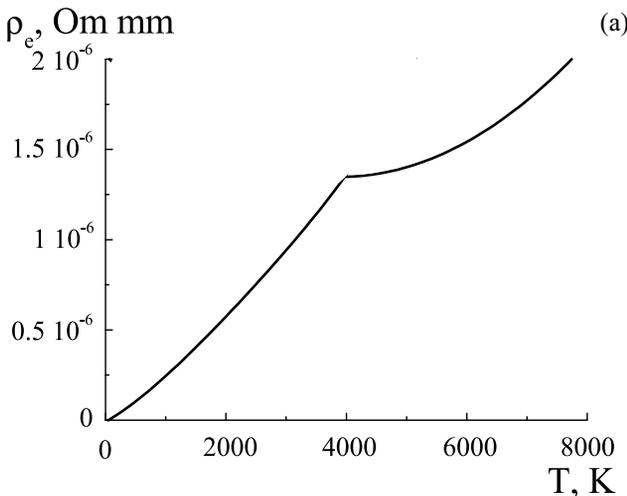
где λ_d^3 – длина волны де Бройля, $I_t = 92604$ К – энергия ионизации вольфрама. Транспортное сечение $\sigma_{tr,a}(\varepsilon)$ рассчитано в [38] и равно $\sigma_{tr,a} = 10^{-18}$ м². Транспортное сечение $\sigma_{tr,i}(\varepsilon)$ ионов вычисляется через кулоновский логарифм, записанный в виде [39, 29] с использованием приближения бинарных столкновений:

$$\sigma_{tr,i}(\varepsilon) = \frac{\pi e^4}{2\varepsilon^2} \ln\left(1 + \frac{e^2}{4\pi T n_e}\right).$$

Это приближение хорошо описывает слабо неидеальную плазму, поскольку оно также учитывает случай, когда число Дебая немного больше единицы. Удельное сопротивление ρ_e обратно величине удельной электропроводности газа (рис. 1б).

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОТОКОВ В ОБРАЗЦЕ И ГАЗЕ

Процесс распространения тока можно считать стационарным, так как характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи [40]. Учет процесса испарения гарантирует ограничение роста температуры в образце, что соответствует экспериментальным данным [41]. Введем векторный потенциал тока $F = (F_r, F_\phi, F_z)$:



$$\vec{j} = \nabla \times \vec{F} \quad (4)$$

и запишем систему уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) . Производные по углу ϕ будут равны нулю в силу симметрии задачи относительно поворота [42, 43]. Выразим ток через векторный потенциал тока, учитывая нулевую производную по углу. Так как отсутствует вихревое электрическое поле, то ток течет только по осевому и радиальному направлениям, и $E_\phi = 0$. Отсюда следует, что $j_\phi = 0$:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\phi \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r F_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\phi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r F_\phi}{\partial r} \end{pmatrix},$$

Таким образом, для описания тока достаточно только одной функции F_ϕ , описывающей “завихренность” тока. Рассмотрим обобщенный закон Ома [37]

$$\vec{j} = (\vec{E} - S \nabla T - \nabla \mu / e) / \rho_e.$$

Здесь μ – химический потенциал электронов, S – термоЭДС и e заряд электрона. Применим к левой и правой частям уравнения (4) векторный оператор $\nabla \times$:

$$\nabla \times (\rho_e \vec{j}) = \nabla \times (\vec{E} - S \nabla T - \nabla \mu / e) = \nabla S \times \nabla T.$$

С учетом нулевой производной по углу ϕ и отсутствия вихревого электрического поля $j_\phi = 0$ из получено уравнение для одной нетривиальной компоненты F_ϕ :

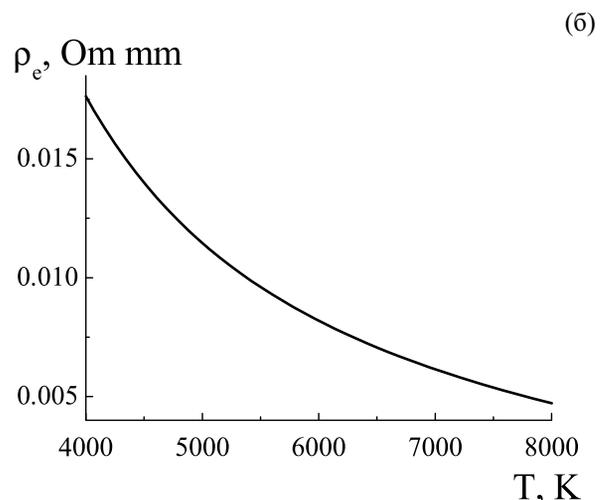


Рис. 1. График зависимости от температуры электрического сопротивления в образце (а) и в газе (б).

$$\frac{\partial^2 F_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} + F_\phi \left(\frac{1}{r \rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

После введения полного тока $I(r, z) = 2\pi r F_\phi$ уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z} = \frac{2\pi r}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим ортогональную систему координат (r, z) , в которой можно записать оператор дифференцирования ∇ . Обозначив $\Phi = \ln(\rho_e / r)$ можно записать задачу в виде:

$$\begin{cases} \rho_e \nabla^2 I + \rho_e \nabla I \nabla \Phi = 2\pi r \nabla S \nabla T, \\ 0 < r < r_{\max}, 0 < z < z_{\max}, \\ \Phi = \ln(\rho_e / r), I|_{r=0} = 0, \\ I|_{(0,z)} = 0, \frac{\partial I}{\partial r}|_{(r_{\max},z)} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial z}|_{(r,z_{\max})} = 0, \\ I|_{(r,0)} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭДС

В краевой задаче (6) решение определяется правой частью уравнения, так как рассматриваемая область содержит источники тока за счет учета термоэмиссии. Отсутствие возмущений на границах расчетной области упрощают проведение численных расчетов. ТермоЭДС S в газе (см. рис. 2а) вычисляется [36] аналогично (2):

$$S = -\frac{1}{ekT} \frac{\int_0^\infty (\varepsilon - \mu) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \tau(\varepsilon) \varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \tau(\varepsilon) \varepsilon^{3/2} d\varepsilon}.$$

В металле термоЭДС S известна только при небольших температурах (см. рис. 2б). В расчётах использована зависимость $S(T)$, построенная [32] по данным [44]. При высоких температурах использовано значение термоЭДС при $T = 1350K$. Известные зависимости термоЭДС от температуры для других металлов показывают, что функция термоЭДС возрастающая и имеет скачок в момент плавления [45].

Характерные значения параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Parameter	Typical value	Units
r_0	10^{-1}	мм
t_0	10^2	мкс
λ_0	10^{-1}	Вт/мм×К
ρ_0	10^{-5}	кг/м ²
c_0	10^8	Вт×мкс/кг×К
T_0	10^3	К
W_0	10^3	Вт/мм
σ_0	10^2	1/Ом×мм
S_0	10^2	В/К
μ_0	10^{-1}	Вт/мм×К
f_0	10^{-5}	кг/м ³
ε_0	10^8	Вт×мкс/кг×К
$\sigma_{r,a}, \sigma_{r,i}$	10^{-12}	2
T_0	10^3	Вт/мм ²
n_a, n_i	10^{14}	1/мм ³
v	1	мм/мкс
ρ_{e0}	10^2	Ом×мм
I_0	10^3	А

7. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача Стефана реализована конечно-разностным неявным методом со вторым порядком аппроксимации. Для использования схем сплошного счета в дифференциальное уравнение (1) внесен учет условий на границе между фазами расплав – твердая фаза [46]. В уравнении (1) в множителе при производной по времени появляется слагаемое, содержащее теплоту плавления, действующую на интервале сглаживания [47]. Интересные результаты расчетов в работе [30] показали полное совпадение динамики расчетного и экспериментального радиуса расплава в случае учета испарения на границе пластинки вольфрама.

Задача определения токов (6) только в области образца была решена ранее [28]. Решить задачу только в области паров в настоящее время невозможно, так как постановка граничных условия для термоток в газе над поверхностью металла вызывает большие трудности. В рассматриваемой постановке проблема постановки граничных условий снята, но возникает ряд сложностей. Амплитуду тока нельзя определить точно для непрерывной задачи с любой степенью упрощения, так как производные в точке разрыва принимают бесконечное значение. Без регуляризации нельзя приступить к численному

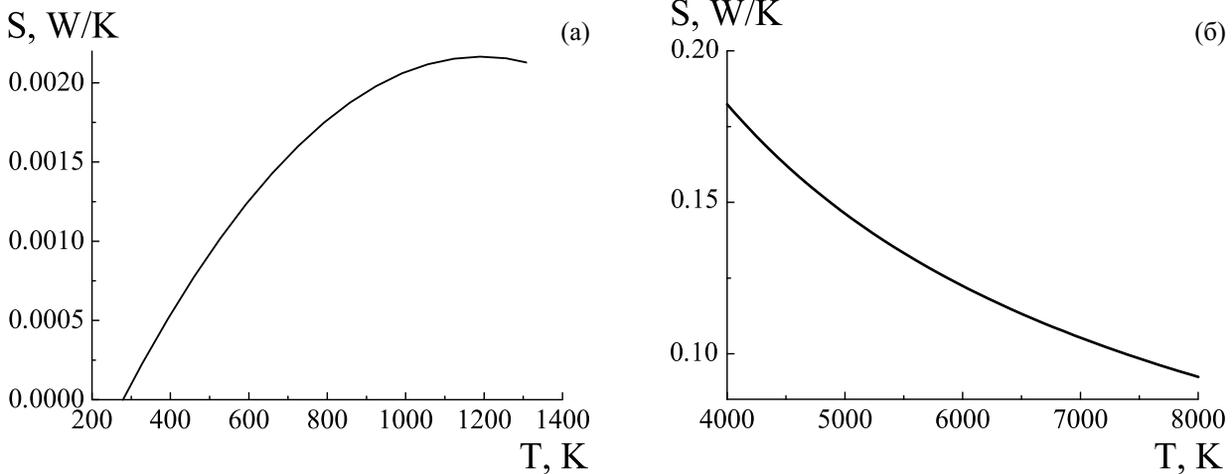


Рис. 2. График зависимости от температуры термоЭДС в газе (а) и в образце (б).

решению задачи, так как можно получить решение, зависящее от шага h расчетной сетки.

Для использования схем сплошного счета учет условий на границе между материалом пластинки и парами необходимо преобразовать

уравнение (5). В слагаемом $\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z}$ оба

множителя терпят разрыв на поверхности образца. Производная тока по нормали к поверхности меняет знак, так как на границе металл-газ токи имеют максимум. При этом решение уравнения (5) имеет положительные вторые производные всюду вне поверхности образца. Производная по нормали к поверхности удельной проводимости “– это производная от разрывной функции, так как удельная проводимость металла на два порядка выше проводимости газа, не зависимо от способа ее определения. Аналогично, слагаемое $\frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r}$ в правой части уравнения (5) содержит производную от разрывной функции термо-

ЭДС. Производные по z от разрывных функций вычисляются с использованием дельта-функции Дирака. Предложенная [48] замена производной в точке разрыва на непрерывную функцию $\delta(z - z_0)$, умноженную на число, равное скачку термоЭДС на промежутке $[z_0 - 2h, z_0 + 2h]$ адаптирована к рассматриваемой задаче. Так как производная терпит разрыв в точке максимума (при фиксированном r) функции I на границе раздела сред, слагаемое $\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z}$ требует

сглаживания $\frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z}$. В результате получаем уравнение, дающее адекватное решение на границе раздела сред:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial r} + \\ & + \frac{\partial I}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\ln(\rho_e / r)) \right\}_{z \neq z_0} + \\ & + \frac{\partial I}{\partial z} \left\{ \frac{\partial P(r, \rho_e)}{\partial z} \right\}_{z=z_0} = \frac{2\pi r}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} \left\{ \frac{\partial S}{\partial z} \right\}_{z \neq z_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial T}{\partial r} \delta(z - z_0) [S]_{z=z_0} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\varepsilon = 0.05$ мм, $P((r, \rho_e)) = \ln(\rho_e^{\text{met}} / r) \times$
 $\times \frac{1}{1 - \exp((z - z_0) / \varepsilon)} + \ln(\rho_e^{\text{gas}} / r)$ – сигмоида.

Для решения полной системы уравнений Максвелла в многомерном случае известны [49, 50] численные методы решения задач электродинамики с учетом нелинейных эффектов, приводящих к значительному изменению характеристик электромагнитного поля. Решение краевой задачи (6) методом верхней релаксации на каждом шаге по времени позволяет построить экономичный алгоритм при параметре релаксации $\omega = 2 - O(h)$. Уравнение (7) и алгоритм решения содержит деление на радиус только в аргументе функции логарифма в расчете коэффициента $\Phi_{i,k}$. Так как функция логарифма при росте аргумента возрастает медленно, то деление на величины порядка $h/2$ при расчетах в окрестности оси симметрии не приводит к возникновению особенностей решения.

8. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В результате численных расчетов получены замкнутые изолинии токов с максимальными

значениями на поверхности пластинки. Пик значений на границе сред металл-газ возникает в результате учета термоэмиссии. Наибольшее влияние на расчет термотока оказывает профиль температуры. В [32] показано, что при постоянных значениях удельной проводимости и термоЭДС (близких к данным для температуры 6 000К) можно получить качественно различные максимальные значение токов на поверхности пластинки. Для заданных на поверхности пластинки линейном, нормальном и расчетном радиальном распределении температуры (рис. 3а), получены существенно различающиеся амплитуды тока (рис. 3б). Это обусловлено тем, что особенности распределения температуры задают ток. Сильный эффект усиления амплитуды тока наблюдается в результате учета неоднородности расчетного распределения температуры, которое обусловлено влиянием свободной границы расплав-металл.

Определим влияние удельной проводимости и термоЭДС на токи, возникающие в пластинке и испаряющемся газе. Возможно, термоЭДС и проводимость металла и паров при высоких температурах отличаются от рассматриваемых нами значений, но данных о свойствах вещества при высоких температурах мало. Наиболее важным является уточнение значений проводимости пара, который обратно пропорционально влияет на амплитуду тока. На рис. 4а показано радиальное распределение тока на поверхности пластинки для случаев удельной проводимости и термоЭДС определенных как постоянные [32], через степень ионизации и оценку коэффициента Зеебека и через энергию электронов. Постоянные значения удельной проводимости и термоЭДС близки к данным для температуры 8 000К и равны $\rho_e^{\text{met}} = 2.1 \cdot 10^{-4}$, $\rho_e^{\text{gas}} = 4.6 \cdot 10^{-4}$, $S_e^{\text{met}} = 1.5 \cdot 10^{-5}$, $S_e^{\text{gas}} = 9.2 \cdot 10^{-4}$. Постоянные

значения коэффициентов дают профиль тока с сильным пиком при радиусе, соответствующем неоднородностям температуры. Использование переменных коэффициентов приводит к решениям, которые отличаются только амплитудой. Этот результат показывает, что приближения для функций коэффициентов были достаточно хорошими.

Результаты показали, что требуется уточнение постановки задачи. Рассмотрим профили температуры и тока на границе раздела сред (см. рис. 4б), полученные в результате методического расчета в области большого радиуса. На большом расстоянии от области нагрева токи не возникают. Детальное рассмотрение показывает, что области слабого и сильного роста тока, а также область его убывания, полностью соответствует областям графика температуры с разными углами наклона. В области нагрева температура достигает режима насыщения и соответствующий термоток не высокий, так как слабо влияние термоЭДС за счет небольшого градиента температуры. На рис. 4б заштрихован подграфик температуры в области расплава. Максимальные значения токов лежат вне области расплава. В расплаве токи не высоки и могут быть не достаточными для инициации вращения вещества. В модели не было учтено магнитное поле, так как его влияние в металле и плотных парах (в центре области нагрева) не значительно. При введении в задачу учета магнитного поля сопротивление будет расти начиная с определенного радиуса и можно предполагать, что максимальные значения термотоков переместятся в область расплава. Изолинии термотоков замкнуты, термотоки распространяются лучше в металле, среде с большей проводимостью, чем газ, что согласуется с теорией. При этом картина изолиний термотоков почти симметрична относительно границы металл – газ. Уточнение модели предполагает учет зависимости параметров

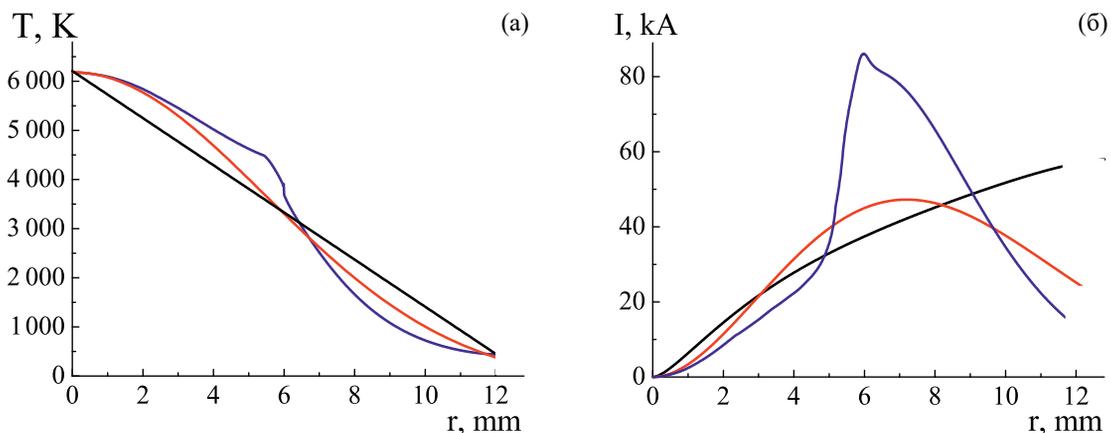


Рис. 3. Графики радиального распределения на поверхности пластинки температуры (а) и соответствующего тока (б). Линейное (черный), нормальное (красный) и расчетное (синий) распределение.

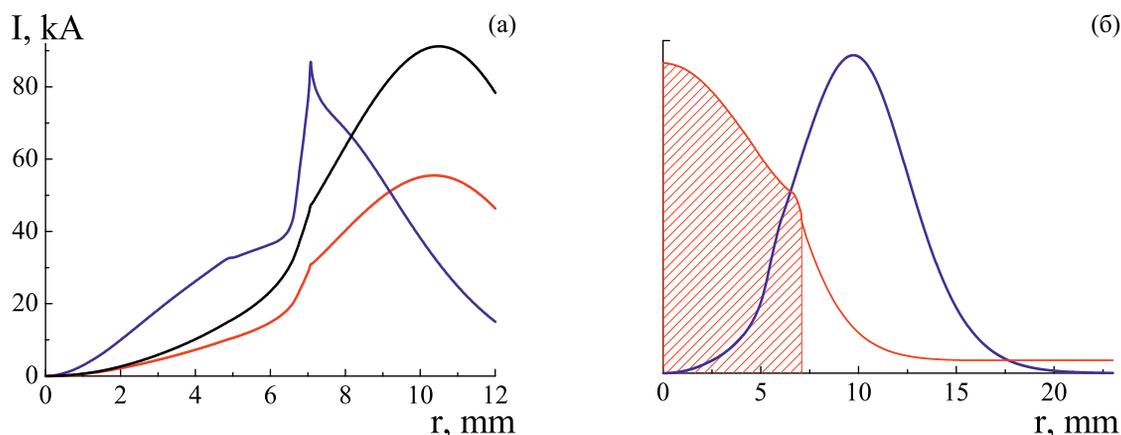


Рис. 4. Графики радиального распределения на поверхности пластинки тока (а) для постоянных (синий), рассчитанных по приближенным оценкам (черный) и по энергии электронов (красный) удельной проводимости и термоЭДС. Профиль температуры (красный) и тока (синий) на границе раздела сред (б).

возникновения термотоков не только от температуры, но и от плотности вещества над поверхностью. В работе [29] предложена теоретическая модель слабо ионизованной плазмы испарённого вольфрама, которая может объяснить возникновение тока на неравномерно нагретой границе газа и расплава. Для создания модели слабой ионизации потребуется введение в модель газодинамического блока. Влияние силы ампера на возникающие токи с учетом внешнего магнитного поля позволит качественно объяснить наблюдавшееся вращение расплава на установке ВЕТА. Соответствующая математическая модель должна отражать динамику частично ионизованного газа с мгновенным установлением ионизационного равновесия. В таком случае будет возможен расчёт проводимости и термоЭДС испаряемого вещества в релаксационном приближении в модели слабо неидеальной трёхкомпонентной плазмы. Результаты моделирования позволят объяснить механизмы возникновения новых особенностей движения и эрозии тугоплавких металлов, наблюдаемых в эксперименте.

9. ВЫВОДЫ

Проведено математическое моделирование возникновения термотоков в образце вольфрама, основанное на решении уравнений электродинамики в области образца и над ним. Температура в области образца получена в результате решения двухфазной задачи Стефана в цилиндрической системе координат. Использовано модельное распределение температуры испаряемого вольфрама в рассматриваемом тонком слое паров, повторяющее температуру поверхности. Представлены зависимости от температуры электрического сопротивления и термоЭДС, основанные на экспериментальных данных для металла и рас-

считанные для газа через энергию электронов. Проведено сравнение результатов с расчетами задачи с постоянными и полученными с помощью оценки значениями электрического сопротивления и термоЭДС в газе и металле. Расчеты показывают существенное влияние особенностей температуры, важность определения электрического сопротивления и термоЭДС в газе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 23-21-00134 <https://rscf.ru/project/23-21-00134>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thorén E., Ratynskaia S., Toliás P., Pitts R.A.* The MEMOS-U code description of macroscopic melt dynamics in fusion devices // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2021. V. 63.
2. *Zhu D., Li C. et al.* Characterization of the in situ leading-edge-induced melting on the ITER-like tungsten divertor in EAST // *Nuclear Fusion*. 2019. V. 60. P. 016036.
3. *Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A.* Novel electron beam-based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // *AIP Conference Proceedings*. 2016. V. 1771. P. 060004.
4. *Popov V.A., Arakcheev A.S., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Trunev Yu. A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N.* Theoretical simulation of the closed currents near non-uniformly strongly heated surface of tungsten due to thermo-emf // *Phys. Plasmas*. 2022. V. 29. P. 033503.
5. *Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N.* Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting

- under pulsed electron beam // *Fusion Engineering and Design*. 2018. V. 132. P. 13–17.
6. Lazareva G.G., Popov V.A., Arakcheev A.S., Burdakov A.V., Shwab I.V., Vaskevich V.L., Maksimova A.G., Ivashin N.E., Oksogoeva I.P. Mathematical simulation of the distribution of the electron beam current during pulsed heating of a metal target // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2021. V. 24. № 2. P. 97–108.
 7. Лазарева Г.Г., Попов В.А., Окишев В.А. Математическая модель динамики распределения тока электронного пучка в вольфрамовой пластинке в тонком слое его паров при импульсном нагреве с учетом электродвижущей силы // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2024. Т. 27. № 1.
 8. Lazareva G.G., Popov V.A. Effect of Temperature Distribution on the Calculation of the Thermal Current in the Mathematical Model of Pulsed Heating of a Tungsten // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44. № 10. P. 4449–4460.
 9. Vasilyev A.A., Arakcheev A.S., Bataev I.A., Bataev V.A., Burdakov A.V., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Mekler K.I., Popov V.A., Shoshin A.A., Skovorodin D.I., Trunev Y.A., Vyacheslavov L.N. Observation of the tungsten surface damage under ITER-relevant transient heat loads during and after electron beam pulse // *AIP Conference Proceedings*. 2016. V. 1771. P. 060013.
 10. Lazareva G.G., Maksimova A.G. Numerical Simulation of the Propagation of Tungsten Vapor above a Heated Surface // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2022. V. 16. № 3. P. 472–480.
 11. Askerov B.M. Electron Transport Phenomena in Semiconductors. WORLD SCIENTIFIC. 1994. <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/1926>.
 12. Filippov A.V., Starostin A.N., Gryaznov V.K. Coulomb Logarithm in Nonideal and Degenerate Plasmas // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2018. V. 126. P. 430–439.
 13. Аксеров Б.М. Кинетические эффекты в полупроводниках. Л.: Наука, 1970.
 14. Blanco F., da Silva F.F., Limão-Vieira P., García G. Electron scattering cross section data for tungsten and beryllium atoms from 0.1 to 5000 eV // *Plasma Sources Science and Technology*. 2017. V. 26. P. 085004.
 15. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
 16. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam // *Fusion Engineering and Design*. 2018. V. 132. P. 13–17.
 17. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М.: Иностранная литература, 1961.
 18. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная литература, 1954.
 19. Abadlia L., Gasser F., Khalouk K., Mayoufi M., Gasser J.G. New experimental methodology, setup and LabView program for accurate absolute thermoelectric power and electrical resistivity measurements between 25 and 1600 K: Application to pure copper, platinum, tungsten, and nickel at very high temperatures // *Review of Scientific Instruments*. 2014. V. 85. № 9. P. 095121.
 20. Fflis P., Kirsch L., Andruczyk D., Curreli D., Ruzic D.N. Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная литература, 1954.
 21. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача М.: Едиториал УРСС, 2003.
 22. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Popov V.A. Mathematical modeling of melting tungsten exposed to pulsed laser beam // *Dokl. Math*. 2023. V. 107. № 1. P. 83–87.
 23. Walden J. On the approximation of singular source terms in differential equations // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 1999. V. 15. № 4. P. 503–520.
 24. Загонов В.П. Математическое моделирование электромагнитного воздействия импульсных полей на сложные технические системы. Функционирование и развитие сложных народнохозяйственных, технических, энергетических, транспортных систем, систем связи и коммуникаций. М.: МГФ “Знание”, 1998. С. 392–394.
 25. Жуковский М.Е. Самосогласованная квазитрехмерная модель радиационного возбуждения электромагнитных полей // *Математическое моделирование*. 1996. Т. 8. № 4. С. 3–20.

MATHEMATICAL MODEL OF THERMOCURRENTS BASED ON CALCULATION OF ELECTRICAL RESISTANCE AND THERMOPOWER AS AN INTEGRAL OVER ELECTRON ENERGY

Corresponding member of the RAS G. G. Lazareva^a, V. A. Popov^a, V. A. Okishev^a, A. V. Burdakov^b

^aRUDN University, Moscow, Russia

^bBudker Institute of Nuclear Physics of Siberian Branch Russian Academy of Sciences (BINP SB RAS), Novosibirsk, Russia

In this paper current distribution model in the tungsten sample and vapor at surface under electron beam heat was considered. The model is based on the solutions of electrodynamic equations and the two-phase Stefan problem in cylindrical coordinates. Based on the temperature distribution in the computational domain, the electrical resistance and thermopower were calculated through the integral over the electron energy at each grid node. Current is considered as a possible source of rotation of matter, which is observed in experiment. The results of the simulation showed the role of thermal emission and the development path of the model. The model parameters are taken from the experiments on the Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA) stand, created at the BINP SB RAS.

Keywords: mathematical modeling, tungsten erosion, Stefan problem, electrodynamic equations, electrical resistance, thermopower, thermionic emission.