

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С МАЛЫМ СДВИГОМ И УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

© 2024 г. Д. И. Борисов^{1,*}, Д. М. Поляков^{1,2,**}

Представлено академиком РАН Н.Ю. Лукояновым

Получено 20.02.2024 г.

После доработки 15.05.2024 г.

Принято к публикации 15.05.2024 г.

Рассматривается несамосопряженный оператор Шрёдингера на единичном отрезке с краевыми условиями Дирихле, возмущённый оператором малого сдвига. Основной результат — трехчленная асимптотика собственных значений по номеру, равномерная по малому сдвигу. Также показано, что система собственных и присоединенных функций рассматриваемого оператора образует базис Бари в пространстве функций, квадратично интегрируемых на рассматриваемом единичном отрезке.

Ключевые слова: малый сдвиг, нелокальный оператор, краевое условие Дирихле, спектральная асимптотика

DOI: 10.31857/S2686954324030089, **EDN:** YBDOJJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению асимптотики собственных значений по номеру для дифференциально-разностного оператора Шрёдингера на единичном отрезке с условиями Дирихле. Основная особенность данного оператора — наличие малого сдвига в свободном члене, который мы рассматриваем как возмущение классического дифференциального оператора Шрёдингера на отрезке.

Краевые задачи для дифференциально-разностных и функционально-дифференциальных уравнений — предмет изучения большого количества работ, мы упомянем только книги [1] и [2] и отдельные статьи [3], [4], [5], а также цитируемую там литературу. Имеющиеся результаты посвящены вопросам существования, единственности, а также гладкости решений. Отметим также исследования по эволюционным дифференциально-разностным уравнениям [6] и [7]. Спектральные вопросы для дифференци-

ально-разностных операторов рассматривались крайне мало, нам известна лишь одна работа [3].

Асимптотические разложения собственных значений по номеру для одномерных дифференциальных операторов Шрёдингера, или кратко спектральные асимптотики — это классическая и очень хорошо исследованная тематика, которая рассматривалась в различных постановках во многих задачах, см., например, книги [8], [9]. Вместе с тем, данные асимптотики выписываются для заданных операторов и оценки остаточных членов в них неявно зависят от выбора оператора, например, от коэффициентов его дифференциального выражения. Если же рассматриваемые операторы зависят от какого-то параметра, то при изменении данного параметра упомянутые асимптотики могут существенно меняться, а оценки остаточных членов могут даже разрушаться. Поэтому для дифференциальных операторов, зависящих от параметра, естественно возникает гораздо более сложная задача о получении спектральных асимптотик, равномерных по малому параметру. Нам известны лишь отдельные работы, см. [10], [11] и содержащиеся там ссылки, в которых такая задача была решена для классического дифференциального оператора Шрёдингера с малым параметром при старшей производной и конкретным потенциалом.

В настоящей работе рассматривается спектральная задача для одномерного оператора

¹ Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа, Россия

² Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия

*E-mail: borisovdi@yandex.ru

**E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Шрёдингера на единичном отрезке $[0,1]$ с малым сдвигом в свободном члене. На концах промежутка ставятся краевые условия Дирихле. При определенных условиях гладкости на коэффициенты выписывается трехчленная асимптотика собственных значений по номеру, равномерная по малому сдвигу. Данная асимптотика содержит дополнительные члены по сравнению с классическими асимптотиками из книг [8], [9]. Кроме того, доказывается свойство базисности системы собственных и присоединённых функций. Отметим ещё, что вопросы равномерной резольвентной сходимости для общих многомерных дифференциально-разностных операторов произвольного порядка с малыми сдвигами в младших членах были изучены в недавней статье [12]. Настоящая работа является одним из естественных продолжений цитированной статьи.

2. ЗАДАЧА И РЕЗУЛЬТАТЫ

Через $\dot{W}_2^j(0,1)$, $j \geq 1$, обозначим подпространство пространства Соболева $W_2^j(0,1)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на концах отрезка. Пусть $V = V(x)$ — комплекснозначная функция, заданная на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемая на нём. В пространстве $L_2(0,1)$ определим оператор $\mathcal{H}^0$ с областью определения $\dot{W}_2^2(0,1)$, действующий по правилу

$$\mathcal{H}^0 y = -y'' + Vy.$$

Данный оператор m -секториален. Напомним, что оператор секториален, если множество значений его квадратичной формы (на нормированных функциях) содержится в некотором секторе в комплексной плоскости вида $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - a)| < \theta\}$, где a — вещественно, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. И оператор m -секториален, если дополнительно его резольвентное множество содержит некоторую полуплоскость вида $\operatorname{Re} z \leq b < a$, см. [13, Гл. V, 3.10].

Оператор $\mathcal{H}^0$ обладает компактной резольвентой. Поэтому его спектр состоит из счётного числа дискретных собственных значений [13, Гл. III, 6.8]. Далее этот оператор будем называть предельным.

Оператор $\mathcal{H}^0$ мы возмущаем оператором малого сдвига. Для строгого описания последнего введём в рассмотрение два вспомогательных оператора. Через $\mathcal{L} : L_2(0,1) \rightarrow L_2(R)$ обозна-

чим оператор продолжения нулем вне интервала $(0,1)$, а через $\mathcal{R} : L_2(R) \rightarrow L_2(0,1)$ — оператор сужения на $(0,1)$. Данные операторы действуют следующим образом:

$$\mathcal{L}y := \begin{cases} y & \text{в } (0,1), \\ 0 & \text{вне } (0,1), \end{cases} \quad \mathcal{R}y := y \text{ на } (0,1).$$

Через ε обозначим малый положительный параметр и в пространстве $L_2(R)$ зададим оператор малого сдвига T^ε по правилу

$$(T^\varepsilon y)(x) = y(x + \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть S — комплекснозначная функция, заданная на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемая на нём. В пространстве $L_2(0,1)$ определим ещё один оператор:

$$B^\varepsilon y = S(\mathcal{R}T^\varepsilon \mathcal{L}y - y).$$

На произвольной функции $y \in L_2(0,1)$ данный оператор действует следующим образом:

$$(B^\varepsilon y)(x) = S(x)(y(x + \varepsilon) - y(x)),$$

где функция y считается продолженной нулём вне отрезка $[0,1]$, а результат действия сужается на этот отрезок. Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ оператор B^ε оказывается нулевым.

Основным объектом исследования работы является оператор $\mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{H}^0 + B^\varepsilon$. Этот оператор действует в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon) = \mathfrak{D}(\mathcal{H}^0) = \dot{W}_2^2(0,1).$$

На произвольной функции $y \in \dot{W}_2^2(0,1)$ его действие выглядит следующим образом

$$(\mathcal{H}^\varepsilon y)(x) = -y''(x) + V(x)y(x) + S(x)(y(x + \varepsilon) - y(x)),$$

где функция y считается продолженной нулём вне отрезка $[0,1]$, а результат действия сужается на этот отрезок. При $\varepsilon = 0$ данный оператор совпадает с $\mathcal{H}^0$.

Основная цель настоящей работы — исследовать спектр оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следующий предварительный результат описывает основные свойства оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ является m -секториальным и соответствующая ему секториальная замкнутая форма в пространстве $L_2(0,1)$ задается равенством*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^\varepsilon(u, v) &= (u', v')_{L_2(0,1)} + (Vu, v)_{L_2(0,1)} + \\ &+ (S\mathcal{R}T^\varepsilon \mathcal{L}u - Su, v)_{L_2(0,1)} \end{aligned}$$

на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon) = W_2^1(0,1)$. Существует число Λ , не зависящее от ε , такое что полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \leq \Lambda$ попадает в резольвентные множества операторов $\mathcal{H}^\varepsilon$ для всех $\varepsilon \geq 0$. Операторы $\mathcal{H}^\varepsilon$ имеют компактную резольвенту и их спектры состоят из счетного числа собственных значений с единственной точкой накопления в бесконечности.

Доказательство этой теоремы следует из общих результатов статьи [12, §5], первой теоремы о представлении [13, Гл. VI, §2.1, Теор. 2.1], а также теоремы об операторе с компактной резольвентой [13, Гл. III, §6.8, Теор. 6.29].

По теореме 1 собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \Lambda$. Обозначим их через λ_n , $n \in \mathbb{N}$, и упорядочим в порядке возрастания модулей.

Наш первый основной результат касается асимптотики собственных значений оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при больших номерах n . Через $\chi_I = \chi_I(x)$ обозначим характеристическую функцию отрезка I на вещественной прямой.

Теорема 2. Для собственных значений λ_n оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \pi^2 n^2 + 2 \int_0^1 V(x) \sin^2 \pi n x dx \\ &+ K_n^{\varepsilon,1} + K_n^{\varepsilon,2} + K_n^{\varepsilon,3} + O(n^{-2}), \end{aligned} \quad (1)$$

при $n \rightarrow +\infty$, где

$$\begin{aligned} K_n^{\varepsilon,1} &:= 2 \int_0^1 S(x) \sin \pi n x \times \\ &\times (\chi_{[0,1-\varepsilon]}(x) \sin \pi n(x + \varepsilon) - \sin \pi n x) dx, \\ K_n^{\varepsilon,2} &:= -\frac{\sin \pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^1 (S(x) - V(x)) \times \\ &\times \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) dt - \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(t) dt \right) dx, \\ K_n^{\varepsilon,3} &:= \frac{\sin 2\pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^{1-\varepsilon} S(x) \times \\ &\times \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{1-\varepsilon} S(t) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Оценка остаточного члена в (1) равномерна по ε .

Наш второй основной результат описывает базисность Бари собственных и присоединенных (корневых) функций оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ в $L_2(0,1)$. Напомним, что базисы, которые порождаются системами проекторов, квадратично близкими к полным и минимальным системам ортогональных проекторов, называются базисами Бари.

Теорема 3. Система корневых функций оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ образует базис Бари в пространстве $L_2(0,1)$.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Кратко обсудим задачу и результаты. Изучается дифференциальный оператор второго порядка на единичном отрезке с краевыми условиями Дирихле. Основная особенность — свободный член содержит сдвиг, который является малым параметром. На коэффициенты оператора накладывается только условие достаточной гладкости. Первый основной результат даёт асимптотику собственных значений по номеру и сформулирован в теореме 2. Так как оператор зависит от малого параметра, причём достаточно нетривиальным образом, асимптотика собственных значений зависит от этого параметра и главное её основное достоинство в том, что оценка остатка в ней равномерна по малому параметру. А именно, остаточный член оценивается величиной Cn^{-2} с константой C , не зависящей от ε и n .

При $\varepsilon = 0$ в асимптотике (1) пропадают члены $K_n^{\varepsilon,j}$, $j = 1, 2, 3$, и она превращается в классическую (см. [9])

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + 2 \int_0^1 V(x) \sin^2 \pi n x dx + O(n^{-2}). \quad (2)$$

Поэтому члены $K_n^{\varepsilon,j}$ порождаются непосредственно оператором малого сдвига. Остановимся на них подробнее.

Множители $\sin \pi n \varepsilon$ и $\sin 2\pi n \varepsilon$ дают явное описание взаимодействия малого параметра ε и большого номера n в $K_n^{\varepsilon,2}$ и $K_n^{\varepsilon,3}$, так как оставшиеся интегралы зависят только от малого параметра. Оценки

$$\begin{aligned} |K_n^{\varepsilon,2}| &\leq \frac{\varepsilon |\sin \pi n \varepsilon|}{\pi n} \|S\|_{C[0,1]} (\|S\|_{C[0,1]} + \|V\|_{C[0,1]}), \\ |K_n^{\varepsilon,3}| &\leq \frac{3\varepsilon |\sin 2\pi n \varepsilon|}{4\pi n} \|S\|_{C[0,1]}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

характеризуют поведение слагаемых $K_n^{\varepsilon,2}$ и $K_n^{\varepsilon,3}$.

Наиболее нетривиально поведение слагаемого $K_n^{\varepsilon,1}$. Подходящим интегрированием по частям его можно привести к виду

$$K_n^{\varepsilon,1} = \cos \pi n \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(x) dx - \int_0^1 S(x) dx + O(n^{-1}),$$

где оценка остатка равномерна по ε . Эта формула и (3) позволяют переписать асимптотику (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \pi^2 n^2 + \int_0^1 V(x) dx + \\ & + \cos \pi n \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(x) dx - \int_0^1 S(x) dx + O(n^{-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

где оценка остатка равномерна по ε . Таким образом, при достаточно больших n собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ локализуются вдоль осциллирующей кривой в комплексной плоскости:

$$\Gamma_\varepsilon := \{z = t^2 + a + a_\varepsilon \cos t\varepsilon, t \in R_+\} \subset \mathbb{C},$$

где

$$\begin{aligned} a &:= \int_0^1 V(x) dx - \int_0^1 S(x) dx, \\ a_\varepsilon &:= \int_0^{1-\varepsilon} S(x) dx. \end{aligned}$$

А именно, собственные значения располагаются вблизи точек на этой кривой, соответствующих $t = \pi n$. Подобный эффект схож с эффектом “спектрального галстука” для собственных значений из работ [10], [11], которые локализовались вблизи кривой на комплексной плоскости, напоминающей галстук, а возмущением было наличие малого параметра при старшей производной. Вместе с тем, наш случай качественно отличается природой возмущения, что приводит к зависимости упомянутой кривой от малого параметра. В частности отметим, что при уменьшении малого параметра период осцилляций кривой увеличивается, а сами осцилляции уменьшаются. Это ни в коем случае не означает, что кривую можно заменить на какую-то иную, не зависящую от ε . Причина в том, что при значениях n порядка $O(\varepsilon^{-1})$ (или больше) функция $\cos \pi n \varepsilon$ в (4) начинает принимать конечные значения, отличные от единицы и в асимптотике возникают дополнительные слагаемые порядка

$O(1)$ по сравнению с классической асимптотикой (2). Кроме того, подчеркнём, что общие результаты статьи [12], применённые к оператору $\mathcal{H}^\varepsilon$, утверждают сходимость резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ к резольвенте предельного оператора $\mathcal{H}^0$. Данная сходимость верна в норме ограниченных операторов, действующих из $L_2(0,1)$ в $W_2^1(0,1)$. Это означает, что оператор малого сдвига является относительно малым возмущением. Вместе с тем, подобное малое возмущение сдвигает собственные значения с большими номерами на величину порядка $O(1)$, порождая тем самым нетривиальный высокочастотный эффект.

Для наглядности на рисунке ниже мы приводим вид кривой Γ_ε в предположении, что $a = 1 + i$, $a_\varepsilon = 2 + 3i$. Таких значений можно легко добиться, предполагая, что функции V и S финитны и обращаются в нуль на отрезке $[1/2, 1]$. В качестве ε мы выбираем два значения $\varepsilon = 0.4$ и $\varepsilon = 0.1$. На рисунках приведена кривая Γ_ε для таких значений ε и указаны две серии точек. Первая серия, отмеченная черными кружками, показывает значения суммы первых двух членов классической асимптотики (2). Вторая серия точек отмечена черными ромбами и показывает сумму первых трех членов асимптотики (4). Как было уже отмечено выше, при уменьшении ε осцилляции кривой также уменьшаются, и это явно демонстрируют наши рисунки. Кроме того, они показывают, что при указанных значениях ε имеется существенный разрыв между членами классической асимптотики (2) и членами асимптотики (4), что является проявлением описанного выше нетривиального высокочастотного эффекта.

Вторым нашим основным результатом является базисность Бари в $L_2(0,1)$ системы корневых функций для оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$. Заметим, что для рассматриваемого класса операторов не было установлено даже классической базисности Рисса. Известные результаты касались только вопросов полноты и минимальности системы корневых функций. Используя теорему Бари-Маркуса, в настоящей статье нам удалось установить значительно более общий результат.

4. МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Кратко поясним доказательство основных результатов. Оно основано на применении метода подобных операторов, который ранее успешно использовался при получении спектральных асимптотик как для классических, так и нело-

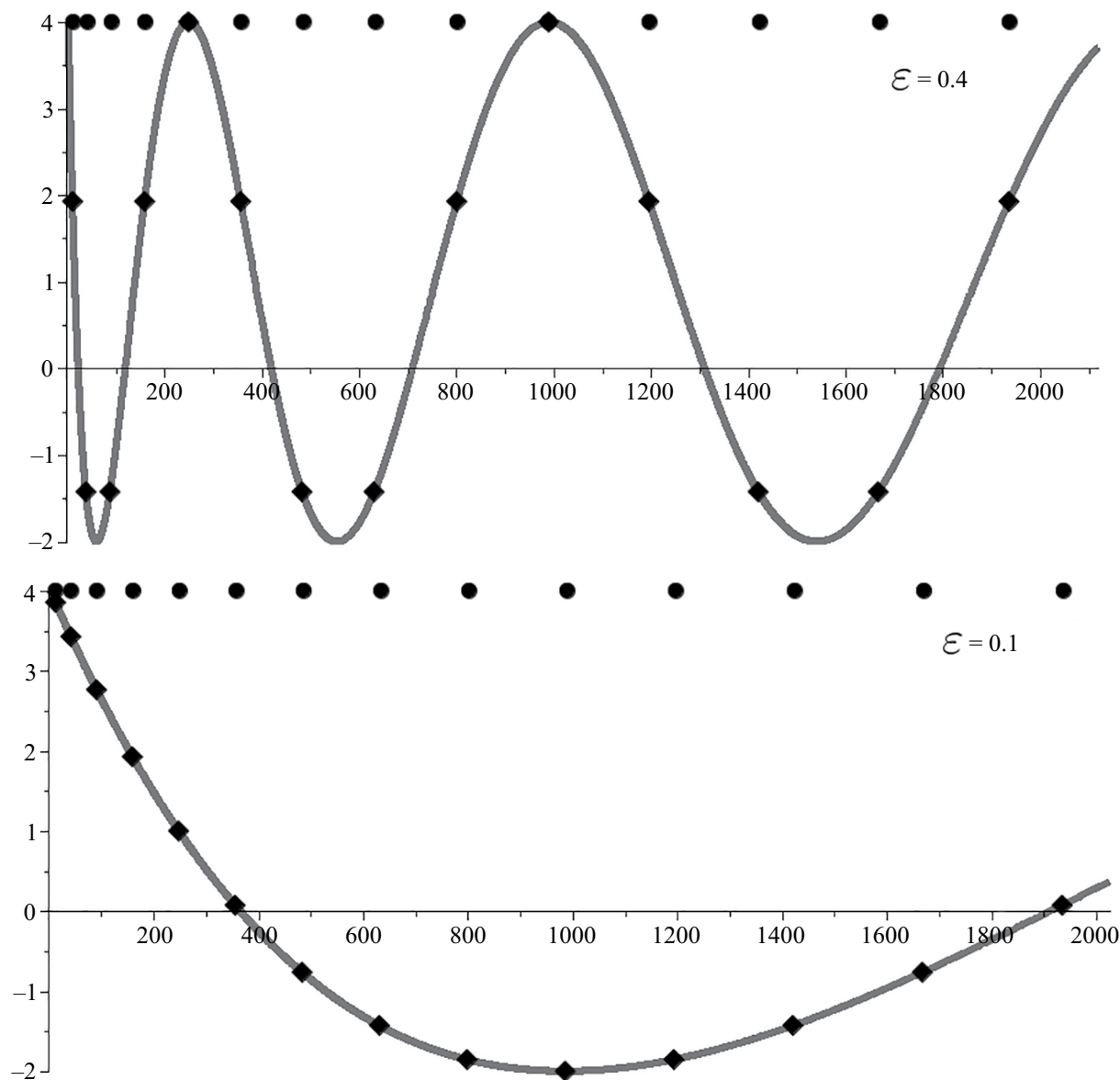


Рис. 1. Примеры кривой Γ_ε с $a = 1 + i$, $a_\varepsilon = 2 + 3i$. Черными кругами обозначены точки, соответствующие первым членам классической асимптотики (случаю $\varepsilon = 0$). Черными ромбами обозначены точки, соответствующие первым членам асимптотики (4). Верхний рисунок соответствует случаю $\varepsilon = 0.4$, нижний – случаю $\varepsilon = 0.1$.

кальных дифференциальных операторов, см., например, [14], [15], [16]. Основная идея этого метода заключается в использовании преобразования подобия. Как известно, такое преобразование сохраняет спектр, а значит необходимо подобрать его наиболее подходящим образом. В нашем случае используется преобразование подобия оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ к оператору, (бесконечная) матрица которого имеет блочно-диагональный вид. Причем большинство полученных блоков

имеют структуру, которую сравнительно не сложно анализировать.

Опишем чуть подробнее эту схему. Все операторы описываются в терминах их матриц для исходно заданного стандартного базиса $\sin \pi l x$, $l \in N$. Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ представляется в виде разности невозмущенного оператора и возмущения. При этом в качестве невозмущенного оператора выступает оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ с $V = S = 0$, $\varepsilon = 0$; такой оператор обозначим через $\mathcal{A}$. Ука-

занный выше базис является набором собственных функций оператора $\mathcal{A}$ и этот оператор имеет диагональную матрицу. Преобразование подобия оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ осуществляется в два этапа. На первом этапе оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ преобразуется в оператор вида $\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$, где $\tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$ имеет нулевую главную (блочную) диагональ и очень хорошее убывание внедиагональных элементов. На втором этапе мы строим преобразование, которое дает подобие между $\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$ и $\mathcal{A} - \mathcal{Q}^\varepsilon$, и матрица оператора $\mathcal{Q}^\varepsilon$ является уже блочно-диагональной. Асимптотику собственных значений оператора $\mathcal{A} - \mathcal{Q}^\varepsilon$ после этого уже сравнительно несложно вычислить. Схема построения операторов, осуществляющих преобразование подобия, заимствована из уже цитированных выше работ [14], [15], [16]. Асимптотика собственных значений $\mathcal{A} - \mathcal{Q}^\varepsilon$ получается достаточно громоздкой, однако с помощью применения дополнительной техники эту асимптотику удастся существенно упростить до вида (1).

Дополнительно был проведен анализ проекторов, соответствующих исходному оператору и подобного ему, что дало возможность получить определенную оценку на их разность. Далее непосредственное применение теоремы Бари–Маркуса немедленно дает результат теоремы 3 о базисности Бари системы собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант № 23-11-00009), <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. Basel: Birkhauser Verlag, 1997. 304 p.
2. Kamenskii G.A. Extrema of nonlocal functional and boundary value problems for functional differential equations. New York: Nova Science Publishers, 2007. 225 p.
3. Скубачевский А.Л. // УМН. 2016. Т. 71. № 5(431). С. 3–112.
4. Скубачевский А.Л., Иванов Н.О. // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2021. Т. 500. С. 74–77.
5. Скубачевский А.Л., Адхамова А.Ш. // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 490. С. 81–84.
6. Muravnik A.B. // Discr. Contin. Dyn. Syst. 2006. V. 16. P. 541–561.
7. Rossovskii L.E. // J. Math. Sci. 2017. V. 223. P. 351–493.
8. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Гл. ред. физ.-мат. литер, 1970. 671 с.
9. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977. 330 с.
10. Шкаликов А.А. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 950–953.
11. Туманов С.Н., Шкаликов А.А. // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 4. С. 177–204.
12. Borisov D.I., Polyakov D.M. // Mathematics. 2023. V. 11. № 20. 4260.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М: Мир, 1972. 740 с.
14. Поляков Д.М. // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 5. С. 117–152.
15. Баскаков А.Г., Поляков Д.М. // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 1. С. 3–47.
16. Поляков Д.М. // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 1. С. 14–21.

ASYMPTOTICS FOR EIGENVALUES OF SCHRÖDINGER OPERATOR WITH SMALL SHIFT AND DIRICHLET CONDITION

D.I. Borisov^a, D.M. Polyakov^{a,b}

^a*Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center,
Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*

^b*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia*

Presented by Academician of the RAS N.Yu. Lukoyanov

We consider a non-self-adjoint Schrödinger operator on the unit segment with the Dirichlet condition perturbed by an operator of small translation. The main result is the three-terms asymptotics for the eigenvalues with respect to their index and this asymptotics is uniform in the small translation. We also show that the system of eigenfunctions and associated functions of the considered operators forms a Bari basis in the space of functions square integrable on the considered unit segment.

Keywords: small translation, nonlocal operator, Dirichlet condition, spectral asymptotics