ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 517, с. 12–21

МАТЕМАТИКА

УДК 519.652+517.589

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА БЕРНШТЕЙНА–РИМАНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

© 2024 г. А. Н. Агаджанов[1], *

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым
Поступило 13.09.2023 г.
После доработки 10.04.2024 г.
Принято к публикации 26.04.2024 г.

В настоящей работе получена формула интерполяции для произвольных непрерывных функций на отрезке [0, 1], при известных значениях этих функций на некоторой равномерной сетке. Никаких дополнительных предположений о функциях не требуется. Построение такой формулы связано со свойствами локальных полиномов Бернштейна и дзета-функции Римана. Приведены численные результаты интерполирования функций типа Римана, Вейерштрасса, Безиковича и Такаджи.

Ключевые слова: интерполяция, локальные полиномы Бернштейна, биномиальные коэффициенты, гамма-функции Эйлера, мультипликативная формула Гаусса, дзета-функция Римана, функции типа Римана, функции типа Вейерштрасса, функции типа Безиковича, функции типа Такаджи

DOI: 10.31857/S2686954324030026, **EDN:** YBWKSB

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерполяция функций является одной из важнейших задач современной вычислительной математики [1]. Формулы, связанные с именами Ньютона, Гаусса, Чебышёва, Эрмита, Бернштейна и др., отражают тот факт, что эта задача привлекала внимание крупнейших математиков. Многочисленные примеры, связанные с приложениями интерполяций функций, приведены в [2].

Как известно, особую роль в теории интерполяции играют полиномы Лагранжа [1, 2, 3]. Фундаментальное значение таких многочленов проявляется на классе непрерывных функций с ограниченной вариацией на [–1, 1]. Из теоремы Крылова [4] следует, что последовательность полиномов Лагранжа, интерполирующих функцию f в узлах Чебышёва $x_{k,n} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\cdot\pi\right)$ $(k = \overline{0, n-1})$, сходится к значению функции f в любой точке $x \in [-1, 1]$. При дополнительном предположении об абсолютной непрерывности функции f сходимость к значению $f(x)$ является равномерной.

Из результатов Рунге, Бернштейна [5] следует, что даже для некоторых бесконечно дифференцируемых функций при равномерном распределении узлов, имеет место расходимость интерполяционных процессов по Лагранжу на множествах положительной лебеговой меры. Расходимость таких интерполяционных процессов заведомо сохраняется на классе непрерывных функций с ограниченной вариацией. Особо отметим, что на классе функций с ограниченной вариацией на отрезке [0, 1] существует множество второй категории по Бэру [6, 7] состоящее из функций, которые обладают “патологическими” свойствами с позиций классического дифференциального исчисления [8].

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $V_1(0, 1)$ *— класс непрерывных неубывающих функций с ограниченной вариацией на отрезке* $[0,1]$. *Существует множество второй категории по Бэру из* $V_1(0, 1)$, *состоящее из функций* f *для которых справедливы утверждения:*

а) множества точек, в которых производные числа Дини, соответствующие функциям f, *связаны равенствами* $D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty$, $D_+f(x) = D_-f(x) = 0$, *являются множествами второй категории на* $(0, 1)$ *и имеют нулевую меру Лебега;*

б) функции f *имеют производную равную* $+\infty$ *на нуль-множествах мощности континуума, тип этих множеств есть* $F_{\sigma\delta}$;

[1] *Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: ashot_ran@mail.ru*

в) функции f имеют конечные производные на множествах полной меры Лебега, содержащих всюду плотные G_δ-множества;

г) функции f не имеют ни конечных, ни бесконечных производных на нуль-множествах мощности континуума, представимых в виде объединения двух нуль-множеств типа G_δ и $G_{\delta\sigma}$ соответственно.

Существенно более сложной задачей является интерполяция по Лагранжу непрерывных функций с неограниченной вариацией на некотором конечном отрезке. В работах [11, 12, 13] показано, что существуют непрерывные функции с неограниченной вариацией на $[-1, 1]$, для которых интерполяционные процессы по Лагранжу расходятся всюду как в случаях выбора равностоящих узлов, так и в случаях выбора узлов Чебышева.

Эти факты не являются случайными, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *В пространстве $C_{[0,1]}$ существует множество мощности континуума, состоящее из функций, для которых при любом выборе равномерной системы узлов, множества точек расходимости интерполяционных процессов по Лагранжу совпадают (с точностью до некоторых нуль-множеств) со счетным объединением взаимно непересекающихся множеств гомеоморфных канторовому, среди которых, по крайней мере, одно имеет положительную меру Лебега.*

Далее под интерполяцией будем понимать нахождение неизвестных значений произвольной непрерывной функции в неузловых точках, по имеющимся значениям в узлах равномерной сетки.

Не нарушая общности, будем рассматривать непрерывные функции только на отрезке $[0, 1]$. Отметим, что свойства этих функций могут существенно различаться. А именно, можно выделить дифференцируемые всюду функции без интервалов монотонности [14], сингулярные по Лебегу функции, также не имеющие интервалов монотонности [9, 10], и, наконец, непрерывные функции, недифференцируемые всюду на заданном отрезке [15].

Перечисленные выше классы непрерывных функций далеко не исчерпывают всё множество непрерывных функций. Например, существуют строго возрастающие дифференцируемые всюду функции, у которых на множествах положительной лебеговой меры производные f' обращаются в нуль. Интерес представляют и непрерывные функции неограниченной вариации, у которых производные f' почти всюду (по мере Лебега) равны нулю [16].

Таким образом, актуальной является задача построения универсальной интерполяциионной формулы, применимой к произвольным непрерывным функциям на $[0, 1]$. Ее структура принципиально отличается от известных интерполяционных формул и, в частности, от интерполяционной формулы Лагранжа и ее модификаций. В основе этой формулы лежат функциональные конструкции, связанные с полиномами Бернштейна и дзета-функцией Римана [17]. Отметим, что при построении такой формулы известными считаются значения произвольной непрерывной функции в равноудаленных узловых точках, лежащих на отрезке $[0,1]$.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ЧЕРЕЗ ГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

Конструктивную версию теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении произвольной непрерывной функции из $C[0, 1]$ полиномами предложил С. Н. Бернштейн [3]. Им были введены многочлены вида

$$B_N(f;x) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k \cdot f\left(\frac{k}{N}\right) \cdot x^k \cdot (1-x)^{N-k},$$

где $C_N^k = \dfrac{N!}{k!(N-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Оказалась справедливой теорема [19].

Теорема 1 (Вейерштрасс–Бернштейн). *Для любой функции $f(x)$ непрерывной на отрезке* $[0, 1]$ *последовательность полиномов $B_N(f,x)$ при $N \to \infty$ равномерно сходится к $f(x)$ во всех точках данного отрезка.*

Некоторые теоретические аспекты применения полиномов Бернштейна имеются в [20].

Следует отметить, что использование полиномов Бернштейна в численном анализе наталкивается при больших значениях N на практически непреодолимые трудности, в связи с громадными значениями некоторых биномиальных коэффициентов C_N^k. Фактически это означает, что в представлениях полиномов Бернштейна присутствуют неприемлемые для практики численные значения коэффициентов таких многочленов.

В связи с этим для решения задачи интерполяции произвольных непрерывных функций в настоящей работе используются локальные полиномы Бернштейна, позволяющие, с одной стороны, преодолевать на практике вычислительные трудности (отсутствует необходимость вычисления биномиальных коэффициентов), а с другой — обеспечивать адаптивность предлагаемой формулы интерполяции как к конкретной функции f, так и к точке $x \in (0,1)$.

Пусть $x \in (a,b)$, причем $(a,b) \subset [0,1]$. Как известно, полиномы Бернштейна на интервале (a,b) задаются в виде [3] (в дальнейшем будем называть их локальными полиномами Бернштейна)

$$B_n(f;x,a,b) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-k}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Для локальных полиномов Бернштейна $B_n(f;x,a,b)$ при каждом $x \in (a,b)$ справедливо представление:*

$$B_n(f;x,a,b) = \frac{1}{2\pi \cdot (n+1)} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot A_{l,k} \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{l+k}, \tag{2}$$

где

$$A_{l,k} = \prod_{s=2}^{n+1} \frac{2\pi \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right)},$$

причем выполняются неравенства

$$\left|\frac{k+s-n-1}{n+1}\right| < 1, \quad \left|\frac{l+s-n-1}{n+1}\right| < 1, \quad \left|\frac{s-k-l-1}{n+1}\right| < 1. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $y = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. Имеют место следующие эквивалентные представления для локальных полиномов Бернштейна:

$$\begin{aligned} B_n(f;x,a,b) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot y^k \cdot (1-y)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) y^k \sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l \cdot (-y)^l = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot C_n^k \cdot C_{n-k}^l \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot y^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \cdot y^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!} \cdot y^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(l+1) \cdot \Gamma(n-k-l+1)} \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{k+l}. \end{aligned} \tag{4}$$

Пользуясь $(n+1)$ — мультипликативной формулой Гаусса для гамма-функций [18]

$$\Gamma((n+1)z) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{(n+1)z - \frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(z + \frac{s-1}{n+1}\right),$$

получим

$$\Gamma(n+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right), \tag{5}$$

$$\Gamma(k+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{k+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right). \tag{6}$$

Аналогично,

$$\Gamma(l+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{l+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right), \quad (7)$$

$$\Gamma(n-k-l+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n-k-l+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right). \quad (8)$$

Из тождеств (5), (6), (7) и (8) имеем

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)\Gamma(n-k-l+1)} = \\ = \frac{1}{2\pi(n+1)} \prod_{s=1}^{n+1} \frac{2\pi \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right)\Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right)\Gamma\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right)}. \quad (9)$$

Подставив (9) в правую часть (4), получим представление (2) для локальных полиномов Бернштейна. Справедливость неравенств (3) проверяется непосредственно.

Лемма 1 доказана.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ЧЕРЕЗ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Лемма 2. *Тождество* (*1*) *в эквивалентной форме может быть представлено в виде:*

$$B_n(f;x,a,b) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \exp(D_{l,k}(x,a,b)), \quad (10)$$

где

$$D_{l,k}(x,a,b) = (n+1)\ln(2\pi) + (l+k)\ln\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \sum_{s=1}^{n+1} \ln\Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right) - \\ - \sum_{s=1}^{n+1} \ln\Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right) - \sum_{s=1}^{n+1} \ln\Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right) - \sum_{s=1}^{n+1} \ln\Gamma\left(1 + \frac{s+k-l-1}{n+1}\right). \quad (11)$$

Следствие 1. *Функция* $D_{l,k}(x)$ *из* (*11*) *в эквивалентной форме имеет вид*

$$D_{l,k}(x,a,b) = (n+1)\ln(2\pi) + (l+k)\ln\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \\ + (1-\gamma) \cdot n + g_n(l,k) + G_n(l,k),$$

где $\gamma = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера—Маскерони [18], $\zeta(n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$ — значения дзета-функции Римана в точках $n = 2,3\ldots$,

$$g_n(l,k) = -\sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right) + \sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right) + \\ + \sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right) + \sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right),$$

$$G_n(l,k) = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{(\zeta(m)-1)}{m} \cdot \sum_{s=1}^{n+1} W_{s,m,n}(l,k),$$

$$W_{s,m,n}(l,k) = \left(\frac{s-1}{n+1}\right)^m - \left(\frac{k+s-n-1}{n+1}\right)^m - \\ - \left(\frac{l+s-n-1}{n+1}\right)^m - \left(\frac{s-k-l-1}{n+1}\right)^m.$$

4. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА БЕРНШТЕЙНА-РИМАНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ [0, 1]

Локальные полиномы Бернштейна (10) могут быть записаны в виде

$$B_n(f;x,a,b) = \sum_{k=0}^{n} d_k(x,a,b) \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right),$$

где $d_k(x,a,b) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \exp(D_{l,k}(x,a,b))$.

Пусть

$$B_n^*(f;x,a,b,q) = \sum_{k=0}^{n} d_k^*(x;a,b,q) \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right), \quad (12)$$

где $d_k^*(x,a,b,q) = \dfrac{1}{2\pi(n+1)} \sum\limits_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \exp(D_{l,k}^*(x,a,b,q)).$

$$D_{l,k}^*(x,a,b,q) = (n+1)\ln(2\pi) + (l+k)\ln\left(\frac{x-a}{b-a}\right) +$$

$$+ (1-\gamma)\cdot n + g_n(l,k) + G_n^*(l,k,q),$$

$$G_n^*(l,k,q) = \sum_{m=2}^{q} (-1)^m \cdot \frac{(\zeta(m)-1)}{m} \cdot \sum_{s=1}^{n+1} W_{s,m,n}(l,k).$$

Здесь $q \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ — некоторые натуральные параметры, определяемые ниже.

Формулу (*12*) *будем называть интерполяционной формулой Бернштейна—Римана для произвольной непрерывной функции* $f \in C_{[0,1]}$ *в точке* $x \in (0, 1)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C_{[0,1]}$ *и значения* $f(k / N)$ $(k = \overline{0, N})$ *известны. Зафиксируем достаточно малое* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любой точки* $x \in (a, b)$ *существуют натуральные числа* $q \geqslant 2$ *и* $n \geqslant 2$ (*отрезок* $[a, b]$ *содержит* n *равностоящих узлов интерполяции с шагом* $\dfrac{1}{N}$, *причем* $a = \dfrac{i}{N}$, $b = \dfrac{j}{N}$, $0 \leqslant i < j \leqslant N$, $j - i = n$), *при которых справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \left(d_k(x,a,b,q) - d_k^*(x,a,b,q)\right) f\left(a + k \cdot \frac{(b-a)}{n}\right)\right| \le \varepsilon.$$

Имеет место поточечное отклонение функции f *от полинома* (*12*):

$$\left|f(x) - B_n^*(f;x,a,b,q)\right| \le 2\omega\left(f;\frac{h(x,a,b)}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon,$$

где $h(x,a,b) = \dfrac{1}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}$; $\omega(f;h(x,a,b)) = \sup_{|y_1-y_2| \leqslant h(x,a,b)} |f(y_1) - f(y_2)|$ — модуль непрерывности функции f в окрестности $[a, b]$ точки x.

5. ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ ТИПА РИМАНА, ВЕЙЕРШТРАССА, БЕЗИКОВИЧА И ТАКАДЖИ

В данном разделе приводятся результаты численной интерполяции функций типа Римана, Вейерштрасса, Безиковича и Такаджи в произвольно выбранных точках $x_1 = 0.230964$ и $x_2 = 0.811573$, не совпадающих с узловыми и лежащих внутри отрезков $[a_1, b_1] = [0.23081, 0.23101]$ и $[a_2, b_2] = [0.81152, 0.81172]$ соответственно. Параметры q и n выбраны следующим образом: $q = 30$, $n = 20$. Шаг дискретизации равномерной сетки принят $h = 10^{-5}$.

I. Функции типа Римана $R_{\alpha,\beta}^K(x) = \sum_{k=1}^{K} \sin(\pi k^\alpha x) / k^\beta$.

1) Пусть $\alpha = \beta = 2$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R_{\alpha,\beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$
$$= 0.0004493554806735,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6875988147842169$, $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6871494593035433$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R_{\alpha,\beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$
$$= 0.0004493558609548,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6875988135010047$, $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6871494576400499$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R_{\alpha,\beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$
$$= 0.0004493559017736,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6875988133769748$, $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6871494574752012$.

Значения функции в граничных точках отрезка $R_{2,2}^{10^8}(a_1) = 0.6874335999494837$ и $R_{2,2}^{10^8}(b_1) = 0.6874997981010574$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R_{\alpha,\beta}^K(x_2) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| =$$
$$= 0.0002502739955572,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_2) = 0.2914566330071412$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.2912063590115839$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_2) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.0002502744918981,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_2) = 0.2914566324327386$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.2912063579408404$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_2) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.0002502745199656,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_2) = 0.2914566323782498$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.2912063578582841$.

Значения функции в граничных точках отрезка $R^{10^8}_{2,2}(a_2) = 0.2923776773427658$ и $R^{10^8}_{2,2}(b_2) = 0.6874997981010574$.

Небольшое увеличение погрешностей интерполяций при увеличении K связано с поточечными приближениями функций $R^K_{2,2}(x)$ к классической функции Римана $R_{2,2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k^2 x) / k^2$. Последняя, как известно, является недифференцируемой почти всюду на отрезке [0,1] [15, 21].

2) Пусть $\alpha = 3.7$ и $\beta = 2.5$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_1) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| = \\ = 0.0002239290968647,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_1) = 0.5894199733188995$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.5896439024157643$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_1) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| = \\ = 0.0002239290976064,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_1) = 0.5894199733181118$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.5896439024157183$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_1) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| = \\ = 0.0002239290976109,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_1) = 0.5894199733181072$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.5896439024157182$.

Значения функции в граничных точках отрезка $R^{10^8}_{3.7,2.5}(a_1) = 0.6079027998564065$ и $R^{10^8}_{3.7,2.5}(b_1) = 0.5850376100817113$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_2) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0{,}0018436167732948,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_2) = 0{,}6793914659598447$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a, b, q) = 0{,}6812350827331395$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_2) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.0018436167733021,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_2) = 0.6793914659599178$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a, b, q) = 0.68123508273322$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R^K_{\alpha,\beta}(x_2) - B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.0018436167733095,$$

где $R^K_{\alpha,\beta}(x_2) = 0.6793914659599112$,
$B^*_{20}(R^K_{\alpha,\beta}(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.6812350827332208$.

Значения функции в граничных точках отрезка $R^{10^8}_{3.7,2.5}(a_2) = 0.6922700402123946$ и $R^{10^8}_{3.7,2.5}(b_2) = 0.6802298813604979$.

Небольшое увеличение погрешностей интерполяций при увеличении K связано с поточечными приближениями функций $R^K_{3.7,2.5}(x)$ к функции $R_{3.7,2.5}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k^{3.7} x) / k^{2.5}$. Последняя, как известно, является недифференцируемой всюду на отрезке [0,1] [22].

II. Функции типа Вейерштрасса $W^K_{p,u,v}(x) = \sum_{k=1}^{K} u^k \cdot \cos^p(2\pi v^k x)$, где $0 < u < 1$, $u \cdot v \geqslant 1$, $p \in \mathbb{N}$.

1) Пусть $p = 1$, $u = 1/2$, $v = 3$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_1) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| = \\ = 0.0012192142253135,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_1) = 0.0555601106613084$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.0543408964359948.$

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_1) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| = \\ = 0.0012192142253135,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_1) = 0.0555601106613084$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.0543408964359948$.

Значения функции в граничных точках отрезка $W^{500}_{1,1/2,3}(a_1) = 0.06521890058260417$ и $W^{500}_{1,1/2,3}(b_1) = 0.04935944285642762$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_2) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.0002976668050618,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_2) = -0.4374460833698153$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = -0.4371484165647535.$

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_2) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.0002976668050618,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_2) = -0.4374460833698153$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = -0.4371484165647535.$

Значения функции в граничных точках отрезка $W^{500}_{1,1/2,3}(a_2) = -0.4449366545837379$ и $W^{500}_{1,1/2,3}(b_2) = W^{500}_{1,1/2,3}(b_2) = -0.4355265625913345$.

2) Пусть $p = 3$, $u = 1/2$, $v = 3$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_1) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| = \\ = 0.001524014996423,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_1) = 0.1572425801796069$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.1557185651831836$.

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_1) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| = \\ = 0.001524014996423,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_1) = 0.1572425801796069$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.1557185651831836$.

Значения функции в граничных точках отрезка $W^{500}_{3,1/2,3}(a_1) = 0.1699951855272775$ и $W^{500}_{3,1/2,3}(b_1) = 0.149288748112328$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_2) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.000372067901735,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_2) = -0.317544604156212$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_1), x_1, a_2, b_2, q) = -0.3171725362544764$.

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|W^K_{p,u,v}(x_2) - B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = \\ = 0.000372067901735,$$

где $W^K_{p,u,v}(x_2) = -0.317544604156212$,
$B^*_{20}(W^K_{p,u,v}(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = -0.3171725362544764$.

Значения функции в граничных точках отрезка

$W^{500}_{3,1/2,3}(a_2) = -0.3270075271505718$ и $W^{500}_{3,1/2,3}(b_2) = -0.3148698486624725$.

Неизменность погрешностей интерполяций при увеличении K связана с тем фактом, что значения функций $W^K_{p,u,v}(x)$ в выбранных точках при $K = 100$, $K = 500$ и классической функции Вейерштрасса $W_{p,u,v}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \cdot \cos^p(2\pi v^k x)$ совпадают с точностью, по крайней мере, до шестнадцати знаков после запятой.

III. Функции типа Безиковича $F^K(x) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^{s-2} \cdot \sin(\lambda_k \cdot x)$, где $1 < s < 2$, $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \to \infty$.

Пусть $s = 3/2$, $\lambda_k = k$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|F^K(x_1) - B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$

$$= 5.66778295407743 * 10^{-8},$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6005946618604803$, $B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6005947185383098$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|F^K(x_1) - B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$

$$= 5.67076617885575 * 10^{-8},$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6009105152891481$, $B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6009105719968099$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|F^K(x_1) - B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$

$$= 5.67170980181330 * 10^{-8},$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6010103969451093$, $B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6010104536622073$.

Значения функции в граничных точках отрезка $F^{10^8}(a_1) = 0.6006127282719943$ и $F^{10^8}(b_1) = 0.601129179906992$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|F^K(x_2) - B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| =$$

$$= 5.68975089265677 * 10^{-10},$$

где $F^K(x_2) = 2.021090907492146$, $B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 2.021090908061121$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|F^K(x_2) - B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| =$$

$$= 5.69376545911382 * 10^{-10},$$

где $F^K(x_2) = 2.022200769265691$, $B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 2.022200769835067$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|F^K(x_2) - B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| =$$

$$= 5.69503999514608 * 10^{-10},$$

где $F^K(x_2) = 2.022551738486765$, $B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 2.022551739056269$.

Значения функции в граничных точках отрезка $F^{10^8}(a_2) = 2.022431997064108$ и $F^{10^8}(b_2) = 2.022883839346673$.

Небольшое увеличение погрешностей интерполяций при увеличении K связано с поточечными приближениями функций $F^K(x)$ к классической функции Безиковича $F(x) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^{s-2} \cdot \sin(\lambda_k \cdot x)$. Последняя, как известно, является непрерывной функцией, не имеющей ни конечных, ни бесконечных, даже односторонних производных [15, 23].

IV. Функция типа Такаджи $T^K(x) = \sum_{k=1}^{K} 1/2^k \left|2^k x - [2^k x + 1/2]\right|$. Здесь $[\cdot]$ — операция взятия целой части.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^2$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|T^K(x_1) - B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$

$$= 2.535443849732699 * 10^{-5},$$

где $T^K(x_1) = 0.3086242129068646$, $B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.308649567345362$.

При $K = 10^3$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|T^K(x_1) - B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)\right| =$$

$$= 2.535443849732699 * 10^{-5},$$

где $T^K(x_1) = 0.3086242129068646$, $B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.308649567345362$.

Значения функции в граничных точках отрезка $T^{10^3}(a_1) = 0.4609642422501693$ и $T^{10^3}(b_1) = 0.3540133006576449$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^2$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|T^K(x_2) - B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = 7.007584093721153 * 10^{-6},$$

где $T^K(x_2) = 0.3173639737206789$, $B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.3173569661365852$.

При $K = 10^3$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|T^K(x_2) - B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)\right| = 7.007584093721153 * 10^{-6},$$

где $T^K(x_2) = 0.3173639737206789$, $B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.3173569661365852$.

Значения функции в граничных точках отрезка $T^{10^3}(a_2) = 0.3697305881919586$ и $T^{10^3}(b_2) = 0.46269038755254654$.

Неизменность погрешностей интерполяций при увеличении K связана с тем фактом, что значения функций $T^K(x)$ в выбранных точках при $K = 100$, $K = 1000$ и классической функции Такаджи $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k \left|2^k x - [2^k x + 1/2]\right|$ совпадают с точностью, по крайней мере, до шестнадцати знаков после запятой [15].

V. Об особенностях интерполяции непрерывных функций вблизи границ отрезка.

Из теоремы 3 следует, что точность интерполяции непрерывных функций с помощью формулы Бернштейна–Римана зависит как шага дискретизации сетки, так и от поведения модуля непрерывности на соответствующем отрезке $[a,b]$. В случае $a = 0$, $b = h$ и выбора точки $x \in (0,h)$ точность формулы Бернштейна-Римана может существенно снизиться. В таких случаях необходимо уменьшить параметр h.

Пример. Пусть $K = 10^6$, q = 30, $a = 0$, $b = 10^{-5}$, $x = 3.15 * 10^{-6}$ для функции типа Римана $R_{2,2}^K(x)$.

При $h = 10^{-5}$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R_{2,2}^K(x) - B_1^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q)\right| = 0.0017298382920554,$$

где $R_{2,2}^K(x) = 0.0039377178046980$, $B_1^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q) = 0.0022078795126426$.

При $h = 5 * 10^{-6}$, то величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R_{2,2}^K(x) - B_2^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q)\right| = 0.0011019844357299,$$

где $R_{2,2}^K(x) = 0.0039377178046980$, $B_2^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q) = 0.002835733368968$.

При $h = 10^{-6}$, то величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left|R_{2,2}^K(x) - B_{10}^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q)\right| = 0.0001446556773763,$$

где $R_{2,2}^K(x) = 0.0039377178046980$, $B_{10}^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q) = 0.0037930621273217$.

Таким образом, уменьшение шага дискретизации h в десять раз привело к уменьшению велечины погрешности интерполяции в $l = \dfrac{0.0017298382920554}{0.0001446556773763} \approx 11.95$ раз.

Представляет безусловный интерес распространение предложенного в статье метода интерполяции на непрерывные функции многих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Лаборатория знаний, 2020. 526 с.
2. *Половко А.М., Бутусов П.Н.* Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. БХВ-Петербург, 2005. 320 с.
3. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.: ГИТТЛ, 1954. 358 с.
4. *Крылов В.И.* Сходимость алгебраического интерполирования по корням многочлена Чебышева для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением // ДАН. 1956. Т. 107. № 3. С. 362-365.
5. *Бернштейн С.Н.* Конструктивная теория функций. Собр. соч. Т. 2. М.: АН СССР, 1954. 628 с.
6. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974. 160 с.
7. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. СПб.: Лань, 2010. 368 с.
8. *Cater F.S.* On the Derivatives of Functions of Bounded Variation // Real Analisis Exchange. 2000/2001. V. 26 № 2. P. 923–932.
9. *Garg K.M.* On singular functions // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1969. № 14. P. 1441–1452.

10. *Агаджанов А.Н.* Сингулярные функции, не имеющие интервалов монотонности, в задачах финитного управления распределенными системами // ДАН. 2014. Т. 454. № 5. С. 503–506.
11. *Grunwald A.H.* Uber divergenzerscheinungen der lagrangeschen interpolationspolynome stetiger funktionen // Ann. Math. 1936. V. 37. № 2. P. 908–918.
12. *Marcinkiewiez J.* Sur la divergence des polynômes d'interpolation // Acta Litterarum as Sci., Szeged. 1937. V. 8. P. 131–135
13. *Mills T.M.,Vertesi P.* An Extension of the Grunwald-Marcinkiewicz interpolation theorem // Bull. Austral. Math. Soc. 2001. V. 63. P. 299–320.
14. *Katznelson Y., Stromberg K.* Everywhere differentiable, nowhere monotone, functions // Am. Math. Monthly. 1974. V. 81. № 4. P. 349–353.
15. *Jarnicki M, Pflug P.* Continuous Nowhere Differentiable Functions: The Monsters of Analysis. Springer, 2016. 299 p.
16. *Korner T.W.* Devil's staircases, ramps, humps and roller coasters // Colloquium Mathematicum. 1990. V. 60/61. P. 1–14.
17. *Титчмарш Э.Ч.* Дзета-функции Римана. УРСС. 2010. 152 с.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. Лань, 2022. 800 с.
19. *Лузин Н.Н.* Теория функций действительного переменного. Учпедгиз, 1948. 318 с.
20. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* Проблема коэффициентов при явной алгебраичекой записи полиномов Бернштейна // Вестник ЧелГУ. 2012. № 15. С. 6–40.
21. *Johnsen J.* Simple Proofs of Nowhere-Differentiability for Weierstrass's Function and Cases of Slow Growth // J. Fourier Anal. Appl. 2010. № 16. P. 17–33.
22. *Chamizo F, Ubis A.* Some Fourier series with gaps // J. Anal. Math. 2007. V. 101. P. 179–197.
23. *Liang Y.* On the fractional calculus of Besicovitch function // Chaos, Solitons and Fractals. 2009. V. 42. P. 2741–2747.

BERNSTEIN-RIEMANN INTERPOLATION FORMULA FOR ARBITRARY CONTINUOUS FUNCTIONS ON A SEGMENT

A. N. Agadzhanov[a]

[a]*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vasiliev

In this paper, we obtain an interpolation formula for arbitrary continuous functions on the interval [0,1], with known values of these functions on some uniform grid. No additional assumptions about functions are required. The construction of such a formula is connected with the properties of local Bernstein polynomials and the Riemann zeta function. Numerical results of interpolation of functions of the Riemann, Weierstrass, Bizikovich and Takagi type are presented.

Keywords: interpolation, local Bernstein polynomials, binomial coefficients, Euler gamma functions, multiplicative Gauss formula, Riemann zeta function, Riemann type functions, Weierstrass type functions, Besicovich type functions, Takagi type functions