ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 93–97

МАТЕМАТИКА

УДК 517.44

ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

© 2024 г. Д. С. Аниконов[1, *], Д. С. Коновалова[1]

Представлено академиком РАН В.Г. Романовым

Поступило 05.02.2024 г.
После доработки 04.04.2024 г.
Принято к публикации 04.04.2024 г.

Настоящее сообщение посвящено некоторым вопросам обращения классического и обобщенного интегрального преобразования Радона. Основной вопрос состоит в определении информации об подынтегральной функции, если известны значения некоторых интегралов. Особенностью работы авторов этого сообщения является анализ случая, когда интегрирование функции производится по гиперплоскостям в конечномерном евклидовом пространстве, а подынтегральные функции зависят не только от переменных интегрирования, но и от части переменных, характеризующих гиперплоскости. При этом количество независимых переменных, описывающих известные интегралы меньше, чем у неизвестной подынтегральной функции. Мы рассматриваем разрывные подынтегральные функции, определенные на специально введенных псевдовыпуклых множествах. Ставится задача типа Стефана о нахождении поверхностей разрывов подынтегральной функции. В работе приводятся формулы, основанные на применении специальных интегро-дифференциальных операторов к известным данным и позволяющие решать поставленную задачу.

Ключевые слова: обобщенное преобразование Радона, интегральная геометрия, зондирование, томография, дифференциальное уравнение, разрывные функции

DOI: 10.31857/S2686954324020151, **EDN:** XHRLEE

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящее работа относится к теории интегральной геометрии, в которой известными данными являются интегралы от некоторых функций, взятых вдоль определенных многообразий в конечномерном евклидовом пространстве. В широком смысле, искомым объектом являются полезные сведения о подынтегральном выражении. Результаты этой теории используются для анализа решений дифференциальных уравнений, а также в теории зондирования.

Не ставя себе задачу привести подробный обзор темы, укажем лишь на отдельные работы основоположников, таких как Р. Курант [1], Ф. Йон [2], И.М. Гельфанд [3]. Упомянем также родственные исследования математической школы М.М. Лаврентьева и В.Г. Романова, посвященные обратным задачам для уравнений математической физики [4,5]. Вообще, имеется значительное количество исследований, посвященных преобразованиям Радона при довольно общих предположениях. К ним можно отнести, например, работы [6–12]. Однако, формулы, пригодные для построения численных алгоритмов, доказаны только для гладких функций, что несколько снижает их прикладную ценность.

Вообще, выбор ограничений обычно диктуется прогнозируемой целью применения. Цель настоящего исследования состоит в обосновании возможности применения теоретических результатов на практике, в особенности в теории зондирования. Стремясь использовать реалистические ограничения, мы рассматриваем разрывные подынтегральные функции, определенные на специально введенных псевдовыпуклых множествах. Тогда становится возможным поставить задачу о нахождении только поверхностей разрывов подынтегральной функции, что представляет собой ценную информацию. Например, в рентгеновской томографии такая информация является основным объектом поиска. Спецификой работ авторов этого сообщения

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*

E-mail: anik@math.nsc.ru

является анализ обобщенного преобразования Радона, когда интегрирование функции производится по гиперплоскостям в n- мерном евклидовом пространстве, а подынтегральная функция является произведением неизвестной весовой функции, зависящей от 2n переменных и другой неизвестной функции n переменных. Такая ситуация возникает, например, в рентгеновской томографии, при использовании математической модели, учитывающей рассеяние фотонов в зондируемой среде или при наличии внутренних источников.

Настоящее сообщение является продолжением и развитием предыдущих исследований авторов [13–15].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

В работе используются следующее обозначения: $E_n, n \geq 2$, — n-мерное евклидово пространство, $B(x,\delta) = \{y : y \in E_n, | y - x |< \delta, x \in E_n\}$; ∂T — граница множества T; $\rho(x,T)$ – расстояние от точки x до множества T; Ω — единичная сфера в E_n; Δ_x — оператор Лапласа по переменной $x = (x_1,...,x_n)$; ∇_x -градиент; $\mu_k(T)$ — k-мерная Лебегова мера множества T; $\mu_\Omega(W)$ —мера Лебега множества $W \subset \Omega$ по мере, определенной на сфере Ω. Условимся считать, что мера пустого множества равна нулю.

Пусть G — ограниченная область в E_n, содержащая попарно не пересекающиеся области $G_i, i = 1,...,l$. Обозначая объединение этих областей через G_0, предположим, что $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Каждую границу ∂G_i считаем $(n-1)$- мерной непрерывной замкнутой поверхностью. Легко видеть, что ∂G_0 совпадает с объединением поверхностей $\partial G_i, i = 1,...,l$. Гиперплоскости в E_n обозначаем $Y(x,\omega) = \{y : y \in E_n, (y - x) \cdot \omega = 0\}$, а также $L(\omega, p) = \{y : y \in E_n, y \cdot \omega = p\}$. Ясно, что $L(\omega, x \cdot \omega) = Y(x,\omega)$.

Введем еще одно дополнительное ограничение для множества G_0. Будем говорить, что G_0 — псевдовыпуклое множество, если можно указать множество Ω', $\Omega' \subset \Omega$ и функции $p^+(\omega)$, $p^-(\omega)$, $\omega \in \Omega'$, для которых выполняются следующие свойства.

1. Мера множества $\Omega \setminus \Omega'$ равна нулю, т.е. $\mu_\Omega(\Omega \setminus \Omega') = 0$.

2. Для любого вектора $\omega \in \Omega'$ и для всех $p \geq p^+(\omega)$, $p \leq p^-(\omega)$ верно равенство $L(\omega, p) \bigcap G = \varnothing$.

3. Для всех $\omega \in \Omega'$ и для всех $p^-(\omega) < p < p^+(\omega)$ пересечение $L(\omega, p) \bigcap G_0$ либо пустое множество, либо является множеством, граница которого имеет нулевую меру по мере пространства E_{n-1}, и $\mu_{n-1}(L(\omega, p) \bigcap \partial G_0) = 0$.

4. Для всех $\omega \in \Omega'$, если $p \to p^+(\omega)$ или $p \to p^-(\omega)$, то $\mu_{n-1}(L(\omega, p) \bigcap G) \to 0$.

В качестве пояснения определения псевдовыпуклого множества приведем простой, но характерный пример.

Пример. Пусть $n = 2$, $\delta > 0$, $G = B(0,4\delta)$, $G_1 = \{y : y \in E_2, \delta < y_i < 2\delta, i = 1,2\}$, $G_2 = B(0,\delta)$, $G_3 = G \setminus \overline{G_1 \bigcup G_2}$. Тогда из сферы Ω достаточно убрать вектора, коллинеарные координатным осям, чтобы получить Ω' и псевдовыпуклое множество $G_0 = G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$.

Вообще, введенное определение охватывает многие случаи ограничений, адекватных теории зондирования. Авторам не удалось придумать контрпример, в рамках разумных предположений для теории зондирования. Везде далее в этой работе будем считать множество G_0 псевдовыпуклым.

Точку $z \in \partial G_0$ назовем контактной, если она принадлежит общему участку границы ровно двух множеств G_i и G_j, $1 \leq i,j \leq l$. Условимся использовать букву z только для обозначения контактных точек. Если же упомянутый общий участок границ в некоторой окрестности точки z является гладкой поверхностью класса C^2, то такой частный случай контактной точки будем обозначать через Z. Предполагаем, что множество контактных точек z плотно в $\partial G_0 \setminus \partial G$. В четномерном случае дополнительно к этому потребуем, чтобы и множество контактных точек типа Z также было плотно в $\partial G_0 \setminus \partial G$.

Рассмотрим класс M функций $\lambda(y)$, $y \in E_n$, непрерывных и ограниченных для $y \in G_0$ и для которых выполнены соотношения $| \lambda(y) - \lambda(\tilde{y}) |\leq \mathrm{const} \, | y - \tilde{y} |^\alpha$, $\mathrm{const} > 0$, $y, \tilde{y} \in G_i$, $0 < \alpha \leq 1$, $i = 1,...,l$; $\lambda(y) = 0$, $y \notin G$.

Ясно, что для таких $\lambda(y)$ и для каждого $i, 1 \leq i \leq l$, существуют предельные конечные граничные значения $[\lambda(z)]_i$, $z \in \partial G_i$, т.е. $\lambda(y) \to [\lambda(z)]_i$ при $y \to z, y \in G_i$. В контактных точках $z \in \partial G_0$ определим скачки функции равенствами $[\lambda(z)]_{j,i} = [\lambda(z)]_j - [\lambda(z)]_i$, $1 \leq i,j \leq l$, $z \in \partial G_i \cap \partial G_j$.

Для функции $F(x,y)$, непрерывной и ограниченной при $(x,y) \in E_n \times E_n$ и для $\lambda \in M$, определим обобщенное преобразование Радона формулой

$$[V\lambda](x,\omega) = \int_{(y-x)\cdot\omega=0} F(x,y)\lambda(y)d_y\sigma,\ x \in G,\ \omega \in \Omega\,. \quad (1)$$

Здесь интегрирование производится по гиперплоскостям $Y(x,\omega) = \{y : y \in E_n, (y-x)\cdot\omega = 0\}$. Ясно, что ограничения для функций F,λ достаточны для существования интеграла в правой части формулы (1). Нередко в научной литературе функцию F называют весом, а функцию λ плотностью.

Классическое преобразование Радона запишем в виде

$$[R\lambda](\omega,p) = \int_{y\cdot\omega=p} \lambda(y)d_y\sigma,\ \omega \in \Omega, -\infty < p < \infty.$$

Легко видеть, что, $[V\lambda](x,\omega) = [R\lambda](\omega, x\cdot\omega)$, если $F(x,y) = 1$.

В качестве иллюстрации рассмотрим одну из математических моделей рентгеновской томографии. Для обобщенного преобразования Радона при $n = 2$ возьмем весовую функцию в виде

$$F(x,y) = -exp\left(|y-x|\int_0^1 a(tx + (1-t)y)\right)dt,$$

где функция $a(y)$ интерпретируется как коэффициент ослабления. Тогда если $\lambda(y)$ означает плотность внутренних источников, то формула (1) соответствует известным данным в задаче рентгеновской томографии при учете поглощения и однократного рассеяния [15].

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Используя предыдущие обозначения и определения, рассмотрим следующую задачу о неизвестной границе.

Задача. Зная множество G и функцию $[V\lambda](x,\omega)$, $x \in G, \omega \in \Omega, \lambda \in M$, найти поверхность ∂G_0.

Несмотря на то, что объектом поиска считается вся поверхность ∂G_0, фактически, определению подлежит только множество $\partial G_0 \setminus \partial G$, поскольку поверхность ∂G известна из постановки задачи. Заметим, что имеющееся соотношение размерности неизвестной подынтегральной функции и заданной информации не позволяют надеяться на определение всего подынтегрального выражения. В то же время знание поверхностей разрыва плотности представляет собой полезную информацию. Например, в задачах зондирования такие сведения весьма существенны. В частности, для рентгеновской томографии эта информация является основной. Отметим, что тематика поиска неизвестных границ довольно обширна и относится к разным областям математики. Вероятно, такой первой постановкой является известная задача Стефана.

Отметим,что для преобразования Радона случаи четных и нечетных размерностей различаются довольно значительно. В этой работе результаты для четной и нечетной размерностей также различаются и по форме, и по методам исследования.

Приведем следующие два утверждения вспомогательного характера, имеющих и самостоятельное значение как элементы качественной теории преобразований Радона.

Лемма 1. Если $\lambda(y) \in M$, то для любого вектора $\omega \in \Omega'$ преобразование Радона $[R\lambda](\omega,p)$ непрерывно по p.

Лемма 2. Для $\lambda(y) \in M$ и для функции $F(x,y)$, имеющей непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка по y_i справедливо равенство

$$\int_\Omega [V\lambda](x,\omega)d\omega = \beta_1 \int_G \frac{F(x,y)\lambda(y)}{|y-x|}dy,\ \beta_1 \neq 0,\ x \in G. \quad (2)$$

Отметим, что лемма 1 является новым результатом для преобразования Радона. Что касается леммы 2, то формула (2) приводится, например в [7], но для $F(x,y) = 1$ и бесконечно дифференцируемой функции $\lambda(y)$.

Переходя к изложению основных результатов, сначала приведем утверждение о классическом преобразовании Радона.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda \in M$, $n = 2m+1$. *Тогда справедливо равенство:*

$$\begin{aligned}(\Delta_x)^m \int_\Omega [R\lambda](x,\omega\cdot x)d\omega = \\ = (-1)^m 2(2\pi)^{2m}\lambda(x),\ x \notin \partial G_0.\end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) отличается от формулы обращения в [2] только тем, что она справедлива не для всех, а для почти всех точек в E_n, что несколько снижает ее ценность. Однако в [2] требуется принадлежность функции $\lambda(y)$ пространству $C^1(E_n)$, а в нашей работе допускаются и разрывные функции. Такой результат стал возможен за счет введения нового определения псевдовыпуклого множества. Можно надеяться, что формула (3) послужит основанием для новых алгоритмов в теории зондирования, где разрывные характеристики являются естественными.

Далее будем рассматривать обобщенное преобразование Радона.

Введем дополнительные ограничения на множество функций F и образуем класс функций Q. Именно, $F \in Q$, если $F(x,x) \neq 0$, $x \in G$ и функция $F(x,y)$ в $G \times G$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по x_i до порядка n включительно, а по переменным y_i до первого порядка, $i = 1,...,n$. Везде далее предполагаем, что $F \in Q$, $\lambda \in M$.

Сначала рассмотрим случай нечетного n, т.е. $n = 2m+1$ и определим следующую функцию

$$Ind_1(x) = (\Delta_x)^m \int_\Omega [V\lambda](x, \omega \cdot x) d\omega, \; x \in G_0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* $n = 2m+1$. *Тогда верно равенство*

$$Ind_1(x) = \beta_2 F(x,x)\lambda(x) + \Phi(x), \quad \beta_2 \neq 0, \; x \in G_0. \tag{5}$$

где $\Phi(x)$, $x \in G$, — непрерывная и ограниченная функция.

Для $n = 2m$ определим следующую функцию

$$Ind_2(x) = \left| \nabla_x (\Delta_x)^{m-1} \int_\Omega [V\lambda](x, \omega \cdot x) d\omega \right|, \quad x \in G_0. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть* $n = 2m$, $Z \in \partial G_0 \setminus \partial G$ — *контактная точка. Тогда функция* $Ind_2(x)$ *ограничена на любом непустом множестве* $\{x : x \in G_0, \rho(x, \partial G_0) > \varepsilon > 0\}$, *а для точек* $x \in G_0, x \to Z$, $Ind_2(x) \to +\infty$, *если* $[\lambda(Z)]_{j,k} \neq 0$.

Как видно из равенства (5), при $n = 2m+1$ функция $Ind_1(x)$ является разрывной только в точках z поверхности $\partial G_0 \setminus \partial G$, если $[\lambda(z)]_{j,k} \neq 0$. При $n = 2m$ из равенства (6) следует, что функция $Ind_2(x)$ неограничена только вблизи точек Z поверхности $\partial G_0 \setminus \partial G$ при условии, если $[\lambda(Z)]_{j,k} \neq 0$. Эти свойства функций $Ind_1(x), Ind_2(x)$ позволяют назвать их индикаторами неоднородности, поскольку при условии ненулевого разрыва функции $\lambda(y)$ на множестве $\partial G_0 \setminus \partial G$, они обеспечивают единственность решения поставленной задачи.

В заключение отметим, что простой и явный вид индикаторов $Ind_1(x), Ind_2(x)$ открывает возможности построения алгоритмов решения поставленной задачи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по программе госзадания Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, FWNF-2022-0009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 156 С.
3. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.
4. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 2010. 912 с.
5. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный Мир, 2004. 304 с.
6. *Markoe A.* Analytic tomography in Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006. 315 c.
7. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 279 с. *Naterrer F.* The Mathematics of Computed Tomography. Stuttgart, and John Wiliy, Ltd, 1986. P. 265.
8. *Kalnin T.G., Ivonin D.A., Abrosimov K.N., Grachev E.A., Sorokina N.V.* Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods // Eurasian Soil Science. 2021. V. 54. N 9. P. 1400–1409.
9. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Ажгалиев Ш.У., Таугынбаева Г.Е.* Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази-Монте-Карло // Известия вузов. Математика. 2020. № 3. С. 98–104.
10. *Баев А.В.* Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 4. С. 550–560.

11. *Симонов Е.Н., Прохоров А.В., Акинцева А.В.* Математическое моделирование реконструкции объемных изображений в рентгеновской компьютерной томографии с применением голографических методов // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 3. С. 102–114.
12. *Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields // Numerical computations: Theory and algorithms. Part II. Sergeyev Ya. D., Kvasov D.E. (Eds.). Lecture Notes in Computer Science. 2020. V. 11974. P. 97–111.
13. *Anikonov D.S., Balakina E. Yu., Konovalova D.S.* An inverse problem for generalized Radon transformation // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 2022. V. 15. N 1. P. 41–51. https://doi.org/10.18721/JPM.
14. *Anikonov D.S. and Konovalova D.S.* // A Problem of Integral Geometry for a Family of Curves with Incomplete Data // Doklady Mathematics. 2015. V. 92. N 2. P. 221–224.
15. *Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000. 223 с.

INVERSION PROBLEM FOR RADON TRANSFORMS DEFINED ON PSEUDOCONVEX SETS

D. S. Anikonov[a], *, D. S. Konovalova[a]

[a]*Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.G. Romanov

This paper is devoted to some questions of inversion for the classical and generalized integral Radon transform. The main question is to determine information about the integrand functions if the values of some integrals are known. A feature of the work of the authors of this message is an analysis of the case when the function is integrated according to hyperplanes in finite-dimensional Euclidean space, and the integrands depend not only on the variables of integration, but also on some of the variables characterizing the hyperplanes. At the same time, the number of independent variables describing known integrals are smaller than those of the unknown integrand. We consider discontinuous integrands defined specifically introduced pseudo-convex sets. A Stefan-type problem is posed about finding surfaces discontinuities of the integrand function. The work provides formulas based on the application special integro-differential operators to known data and allowing you to solve the assigned tasks.

Keywords: generalized Radon transform, integral geometry, probing, tomography, differential equation, discontinuous functions