

ОБ ИНВАРИАНТЕ КРАШЕННЫХ КОС

© 2024 г. В. О. Мантуров^{1, 2, *}, И. М. Никонов^{1, 2, 3, **}

Представлено академиком РАН А.Л. Семёновым

Поступило 21.07.2023 г.

После доработки 09.02.2024 г.

Принято к публикации 25.03.2024 г.

С помощью теории спариваний получено представление группы крашенных кос и показана его нетривиальность.

Ключевые слова: коса, триангуляция Делоне, теория спариваний, пятичленное соотношение

DOI: 10.31857/S2686954324020129, **EDN:** XHVUPC

Косой [1] называется набор непересекающихся n гладких кривых в трехмерном пространстве, монотонных относительно одной из координат, например, z . Предполагается, что координата z меняется на каждой кривой от 0 до 1. Коса определяет динамику набора точек на плоскости, то есть семейство n -элементных подмножеств плоскости, непрерывно зависящих от параметра z : набор составляют точки косы с заданным значением координаты z . Выделяя некоторые конфигурации точек как особые, можно сопоставить косе последовательность возникающих при изменении z от 0 до 1 особенностей. Например, называя особыми наборы точек, в которой есть пара точек с совпадающей координатой x , мы получим представление Артина группы кос [2]. Другое определение особых конфигураций приводит к так называемой нерейдемейстеровской теории кос [3], примером которой является представление кос с помощью групп G_n^k и Γ_n^k , введенных В.О. Мантуровым [4].

Например, объявляя особыми моменты, когда происходит перестройка комбинаторной структуры триангуляции Делоне [5] набора точек, мы сопоставляем косе элемент группы Γ_n^4 . Основным соотношением в группе Γ_n^4 является пятичленное соотношение (рис. 2). Конструкции, удовлетворяющие пятичленному соотношению, такие как $6j$ -символ [6], использовались для построения инвариантов трехмерных многообразий [7, 8], узлов и зацеплений [9]. В работе [10] тождество Птолемея для вписанного четырехугольника, также удовлетворяющего пятичленному соотношению, легло в основу конструкции представления группы кос в группе автоморфизмов поля рациональных функций. Данное представление возникало в работе [11].

В настоящей статье мы обобщим конструкцию работы [10] и приведем другой нетривиальный пример представлений группы кос, индуцированный пятичленным соотношением в теории спариваний [12], представляющей собой комбинаторную технику для работы со скейн-модулем скобки Кауффмана [13].

Определение 1. Назовем структурой пентагона тройку $\Pi = (X, C, \{\})$, где

- X — некоторое множество (называемое множеством цветов);
- $C \subset X^{\times 3}$ — подмножество (множество допустимых комбинаций цветов), инвариантное относительно действия группы перестановок Σ_3 на $X^{\times 3}$;
- $\{\} : X^{\times 6} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция (называемая $6j$ -символом), такая что

¹ Московский физико-технический институт, Москва, Россия

² Магнитогорский Государственный Технический Университет им. Г.И. Носова, Лаборатория “Механика градиентных наноматериалов им. А.П. Жилиева”, Магнитогорск, Россия

³ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

* E-mail: vomanturov@yandex.ru

** E-mail: nikonov@mech.math.msu.su

(а) из $\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \neq 0$ следует $(a,b,j), (c,d,j), (a,d,i), (b,c,i) \in C$;

$$(b) \quad \sum_{i \in X} \begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & a & k \\ b & c & i \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1, & k = j \text{ и } (a,b,j), (c,d,j) \in C, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$(c) \quad \sum_{m \in X} \begin{Bmatrix} a & i & m \\ d & e & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & c & l \\ d & m & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & l & k \\ e & a & m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b & c & k \\ j & a & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & c & l \\ d & e & j \end{Bmatrix}$$

Пример 1 (Соотношение Птолемея).

$\Pi_{P_1} = (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^{\times 3}, \{\cdot\}_{P_1})$, где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и

$$\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix}_{P_1} = \begin{cases} 1, & ac + bd = ij, \\ 0, & ac + bd \neq ij; \end{cases}$$

Соотношение $ac + bd = ij$ из определения $6j$ -символа есть условие Птолемея вписанности четырехугольника со сторонами a, b, c, d и диагоналями i, j [14]. Соотношение 3 определения структуры пентагона описывает ситуацию вписанного пятиугольника со сторонами a, b, c, d, e и диагоналями i, j, k, l, m .

Пример 2 (Теория спариваний). Фиксируем натуральное число $r \geq 3$. Рассмотрим тройку $\Pi_r = (\mathbb{N} \cup \{0\}, C_r, \{\cdot\}_r)$, где C_r состоит из троек неотрицательных целых чисел a, b, c , удовлетворяющих следующим условиям:

1. $a + b + c$ четно;
2. $a + b \geq c$, $a + c \geq b$, $b + c \geq a$;
3. $a + b + c \leq 2r - 4$,

а числа $\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix}_r$ — это $q - 6j$ -символы, определенные в [12, proposition 11]. Согласно утверждениям [12, proposition 9] и [12, proposition 10], Π_r удовлетворяет условиям определения структуры пентагона.

Фиксируем структуру пентагона Π . Рассмотрим крашеную косу β . По определе-

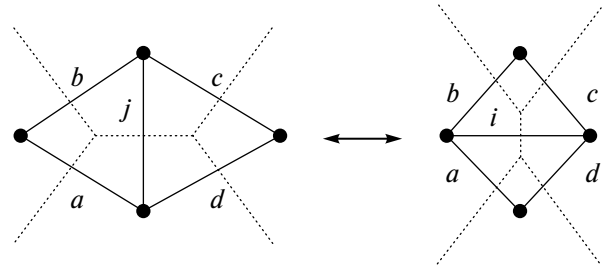


Рис. 1. Флип.

нию [15] она является набором n непересекающихся нитей

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in (\mathbb{R}^2)^n, t \in [0, 1],$$

где начальное и конечное положение точек совпадают: $X(0) = X(1)$. Предположим, что коса β находится в общем положении. Это означает, что имеется лишь конечный набор значений $0 < t_1 < \dots < t_m < 1$, такой что при $t \neq t_k$, $k = 1, \dots, m$, никакие четыре точки множества $X(t)$ не лежат на одной окружности либо прямой в $\mathbb{R}^2$, а каждое из множеств $X(t_k)$, $k = 1, \dots, m$ содержит ровно одну четверку точек, лежащих на одной окружности (или прямой).

Для любого регулярного значения $t \neq t_k$ множество $X(t)$ задает единственную триангуляцию Делоне $G(t)$ [5]. Обозначим множество ребер триангуляции $G(t)$ через $E(G(t))$. Рассмотрим множество $F_\Pi(t)$ допустимых раскрасок, то есть отображений $f : E(G(t)) \rightarrow X$, таких что для любого треугольника с ребрами a, b, c выполнено условие $(f(a), f(b), f(c)) \in C$. Обозначим через $V_\Pi(t)$ линейное пространство, свободно порожденное множеством $F_\Pi(t)$.

Рассмотрим особое значение t_k , $k = 1, \dots, m$. В момент t_k происходит перестройка триангуляции (флип), см. рис. 1. Триангуляции $G(t_k - 0)$ и $G(t_k + 0)$ различаются на одно ребро $j = E(G(t_k - 0)) \setminus E(G(t_k + 0))$, $i = E(G(t_k + 0)) \setminus E(G(t_k - 0))$. Пусть a, b, c, d — ребра, индидентные треугольникам, содержащим ребра i или j . Для любого элемента $f \in F_\Pi(t_k - 0)$, рассматриваемого как базисный вектор в пространстве $V_\Pi(t_k - 0)$, положим

$$A_\Pi(t_k)f = \sum_{g \in F_\Pi(t_k - 0): f = g|_{E(G(t_k - 0)) \cap E(G(t_k + 0))}} \begin{Bmatrix} g(a) & g(b) & g(i) \\ f(c) & f(d) & f(j) \end{Bmatrix} \cdot g. \quad (1)$$

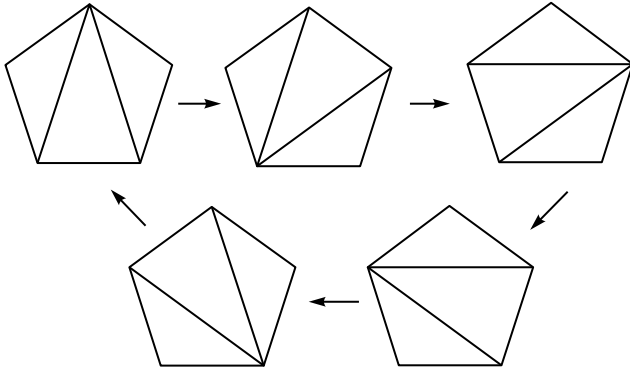


Рис. 2. Пятичленное соотношение.

Определим оператор

$$A_{\Pi}(\beta) = \prod_{k=1}^m A_{\Pi}(t_{m-k+1}) : V(X(0)) \rightarrow V(X(0)) \quad (2)$$

как композицию операторов $A_{\Pi}(t_k)$.

Теорема 1. Оператор $A_{\Pi}(\beta)$ является инвариантом крашенных кос.

Доказательство. Рассмотрим изотопию крашенных кос β_s , $s \in [0,1]$. Можно считать, что это изотопия общего положения. Иными словами, изотопия имеет конечное число значений $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_p < 1$, таких что коса β_{s_l} , $1 \leq l \leq p$, имеет единственное значение t^* , при котором множество $X_{s_l}(t^*)$ содержит одну из следующих вырожденных конфигураций:

1. пять точек, лежащих на одной окружности (или прямой);
2. две четверки точек, каждая из которых лежит на одной окружности. Окружности для этих двух четверок различны; четверки могут иметь общие точки.

В первом случае преобразования триангуляций Делоне в окрестности вырожденной конфигурации образуют пятиугольник (см. рис. 2). По определению оператора $A_{\Pi}(\beta)$ соотношение пятиугольника сводится к третьему тождеству в определении структуры пентагона Π .

Второй случай приводит сводится к коммутационному соотношению $A_1 A_2 = A_2 A_1$, в котором операторы A_1 , A_2 соответствуют флипам на заданных четверках точек. Так как ребра, меняющиеся при разных флипах различны, а условие допустимости локально, то коммутационное соотношение выполнено по определению операторов A_1 , A_2 .

Таким образом, мы приходим к конструкции инварианта кос A_{Π} , обобщающему инвариант,

рассмотренный в [3, section 16.6], где использовалось соотношение Птолемея.

Покажем, что построенный инвариант не тривиален для структуры пентагона Π_r .

Пример 3. Рассмотрим конфигурацию точек $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{1}{3},0)$, $P_3 = (\frac{2}{3},0)$, $P_4 = (1,0)$, $P_5 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_6 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Рассмотрим крашенные косы на трех нитях, задаваемые динамикой точек P_1, P_2, P_3 внутри треугольника $P_4 P_5 P_6$. Пусть крашенная коса β_1 задается движением точки P_2 вокруг P_1 при неподвижных остальных точках: $P_2(t) = (\frac{\cos t}{3}, \frac{\sin t}{10})$, $t \in [0, 2\pi]$; а коса β_2 задается движением точки P_3 вокруг P_2 : $P_3(t) = (\frac{5}{12} + \frac{\cos t}{4}, \frac{\sin t}{10})$, $t \in [0, 2\pi]$. Для косы β_1 процессе движения возникает шесть различных триангуляций Делоне (для косы β_2 — 8 триангуляций). При $r = 5$ каждая триангуляция имеет 7520 допустимых раскрасок. Операторы $A_{\Pi_5}(\beta_i)$, $i = 1, 2$, действующие в 7520-мерном пространстве, не коммутируют (расчет в программе Mathematica дает оценку $\|A_{\Pi_5}(\beta_1)A_{\Pi_5}(\beta_2) - A_{\Pi_5}(\beta_2)A_{\Pi_5}(\beta_1)\| \approx 21.88$). Таким образом, представление A_{Π_5} некоммутативно и нетривиально. В частности, инвариант A_{Π_5} не сводится к индексам зацепления между нитями крашенной косы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы выражаем благодарность Луису Хиршу Кауфману, Владимиру Георгиевичу Тураеву и Елизавете Мудрой за плодотворные и стимулирующие дискуссии, а также Никите Дмитриевичу Шапошнику за замечания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (№ 22-19-20073 от 25.03.2022 года “Комплексное исследование возможности применения самозаклинивающихся структур для повышения жесткости материалов и конструкций”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мантуров В.О. Теория узлов, М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
2. Artin E. Theory of Braids // Ann. Math. 1947. V. 48. N 1. P. 101–126.

3. *Manturov V.O., Fedoseev D., Kim S., Nikonov I.* Invariants And Pictures: Low-dimensional Topology And Combinatorial Group Theory. Series On Knots And Everything. V. 66. World Scientific, 2020.
4. *Manturov V.O., Nikonov I.M.* On braids and groups G_n^k // J. Knot Theory and Ramifications. 2015. V. 24. N 13. 1541009.
5. *Fortune S.* Voronoi diagrams and Delaunay triangulations // Computing in Euclidean Geometry. Singapore: World Scientific Publishing Co, 1992. P. 193–233.
6. *Racah G.* Theory of complex spectra II // Phys. Rev. 1942. V. 62. P. 438–462.
7. *Turaev V.G., Viro O. Ya.* State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols // Topology. 1992. V. 31. P. 865–902.
8. *Корепанов И.Г.* $SL(2)$ -решение уравнения пентагона и инварианты трехмерных многообразий // ТМФ. 2004. Т. 138. № 1. С. 23–34.
9. *Корепанов И.Г.* Геометрия евклидовых тетраэдров и инварианты узлов // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Т. 11. № 4. С. 105–117.
10. *Manturov V.O., Fedoseev D., Kim S., Nikonov I.* On groups G_n^k and Γ_n^k : A study of manifolds, dynamics, and invariants // Bull. Math. Soc. 2021. V. 11. N 2. 2150004.
11. *Penner R.* The decorated Teichmuller space of punctured surfaces // Comm. Math. Phys. 1987. V. 113. N 2. 299–339.
12. *Kauffman L.H., Lins S.* Temperley–Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds. Princeton University Press, 1994.
13. *Тураев В.Г.* Модули Конвея и Кауфмана полнотория // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1988. Т. 167. С. 79–89.
14. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. Т. 1. М.: МЦМНО, 2004.
15. *Birman J.* Braids, Links, and Mapping Class Groups. Princeton University Press, 1974.

ON AN INVARIANT OF PURE BRAIDS

V. O. Manturov^{a, b, *}, I. M. Nikonov^{a, b, c, *}

^a*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

^b*Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia*

^c*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,
Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Using the recoupling theory, we define a representation of the pure braid group and show that it is not trivial.

Keywords: braid, Delaunay triangulation, recoupling theory, pentagon relation