

ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© 2024 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин^{1, *}, А. Е. Луцкий^{1, **}, Е. В. Шильников^{1, ***}

Поступило 21.02.2024 г.
После доработки 01.04.2024 г.
Принято к публикации 01.04.2024 г.

В работе получена замкнутая система уравнений для описания турбулентных течений. Дополнительные уравнения для перекрестных пульсационных моментов $\overline{\rho \Delta u_i \Delta u_k}$ выводятся на основе балансного кинетического уравнения, с помощью которого ранее была получена квазигазодинамическая система уравнений. Приводятся результаты расчета пространственно-двумерной задачи о слое смешения двух потоков.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, турбулентное течение, замыкание системы осредненных уравнений

DOI: 10.31857/S2686954324020086, **EDN:** XISWSM

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой, связанной с моделированием турбулентных течений на основе осредненных уравнений, является появление дополнительных переменных в виде пульсационных моментов [1]. В свою очередь их появление приводит к необходимости поиска тех или иных способов замыкания системы уравнений, состоящей из осредненных газодинамических параметров и пульсационных моментов.

Поясним суть возникающих трудностей на примере относительно простой пространственно-двумерной задачи, описывающей течение слабо сжимаемого изотермического газа. Введем следующие обозначения: t — время, x и y — пространственные координаты, ρ — осредненное по времени значения плотности, u и v — осредненные значения скорости, соответственно в направлении оси $OxuOy$, $\overline{\Delta u^2}$, $\overline{\Delta v^2}$, $\overline{\Delta u \Delta v}$ — осредненные пульсационные моменты.

Пренебрегая пульсациями плотности, выпишем систему уравнений для указанных осредненных переменных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u^2}}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \\ + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v^2 + p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho \Delta v^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где p — давление, μ — коэффициент вязкости.

Пульсационные моменты $\overline{\rho \Delta u^2}$ и $\overline{\rho \Delta v^2}$ можно трактовать как малые добавки к давлению p , которые не оказывают существенного влияния на картину течения. Однако даже отбрасывая их, придем к системе, состоящей из трех уравнений относительно четырех переменных ρ, u, v и $\overline{\Delta u \Delta v}$. Проблема замыкания полученной системы уравнений является основной при описании турбулентных течений.

Одним из способов замыкания является использование гипотезы Буссинеска с введением модели турбулентной вязкости [1,5]

$$\overline{\rho \Delta u_i \Delta u_k} = -\mu_m \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.4)$$

представляющей пульсационный момент в виде, аналогичном естественной молекулярной вяз-

¹ Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук,
Москва, Россия

*E-mail: chetver@imamod.ru

**E-mail: allutsky@yandex.ru

***E-mail: shilnikov@imamod.ru

кости. Для конструирования турбулентной вязкости μ_m существует большое количество моделей, например [2–10], включая популярную и теоретически хорошо обоснованную $K - \varepsilon$ модель, основанную на классических работах А.Н. Колмогорова [10]

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_\mu + \frac{\mu_t}{\sigma k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \rho \varepsilon \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_\mu + \frac{\mu_t}{\sigma \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + \\ + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Обратим внимание на одну особенность $K - \varepsilon$ системы (1.6)–(1.7). В ней отсутствуют члены, большие по порядку величины, чем члены, пропорциональные предполагаемым малыми величинам $K, \varepsilon, \mu, \mu_m$. Этот факт используем в дальнейшем. Здесь K — энергия турбулентных пульсаций, ε — скорость диссипации турбулентной энергии, C_μ, C_1, C_2 — настроечные параметры.

К сожалению, каждая из большого списка моделей турбулентности включает настроечные коэффициенты и работает в достаточно узком диапазоне параметров течения и геометрических конфигураций обтекаемых тел. Поэтому попытки построения новых моделей, позволяющих построить замкнутую систему, активно продолжают и в настоящее время.

В данной работе, опираясь на ранее предложенную квазигидродинамическую систему уравнений (КГД) и в первую очередь на способ ее вывода из балансного кинетического уравнения [11], выведены дополнительные уравнения относительно перекрестных пульсационных моментов $\rho \Delta u_i \Delta u_k$. Эти уравнения в сочетании с осредненными газодинамическими уравнениями позволяют построить замкнутую систему. К ее выводу приступим в следующем параграфе.

2. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вначале напомним способ вывода КГУ системы уравнений [11], которая может быть получена из балансного кинетического уравнения

$$\frac{f^{j+1} - f_0^j}{\tau} + \text{div}(\xi f_0^j) = \frac{\partial \xi_i \xi_k}{\partial x_i} \frac{\tau}{2} \frac{\partial f_0^j}{\partial x_k} \quad (2.1)$$

Здесь $f^{j+1}(t^{j+1}, \bar{x}, \bar{\xi})$ — функция распределения на момент времени $t^{j+1} = t^j + \tau$, f_0^j — локально максвелловская функция на момент времени t^j

$$f_0^j(t^j, x, \xi) = \frac{\rho^j}{(2\pi RT)^{3/2}} e^{-\frac{(\xi_i - u_i)^2}{2RT}} \quad (2.2)$$

$\bar{\xi}$ — скорость молекулы, R — газовая постоянная, τ — характерное время между столкновениями молекул.

КГД система получается путем интегрирования балансного уравнения (2.1), умноженного на сумматорные инварианты, по всем скоростям $\xi, \xi_i \in [-\infty, \infty]$. Характерное время τ выбирается в соответствии с элементарной кинетической теорией [12]

$$\tau = \frac{2\mu}{P} \quad (2.3)$$

Полученная таким образом КГУ система отличается от соответствующих уравнений Навье—Стокса на члены второго порядка малости по числу Кнудсена (Kn). Это подтверждается как теоретическим анализом [11, 13–14], так и многочисленными численными расчетами. Близость КГД-системы и уравнений Навье—Стокса дает возможность использовать для нахождения газодинамических параметров классические уравнения для моделирования вязкого газа — нашем случае, уравнения (1.1)–(1.3).

Дополнительное уравнение для пульсационного момента $\rho \Delta u_i \Delta u_k$ получим с помощью следующей последовательности действий. Вначале умножим балансное уравнение (2.1) на $\xi_k \xi_u$ и проинтегрируем по всем скоростям молекул. Из полученного в результате такой процедуры уравнения вычтем умноженное на v уравнение (1.2) и умноженное на u уравнение (1.3).

При этом возникает вопрос о выборе значения τ , которое в отличие от характерного времени столкновения молекул должно тем или иным образом быть связанным с временем индивидуального существования турбулентных структур различных масштабов [1].

Кроме того, необходимо определить вид функции f^{j+1} в уравнении (2.1). Эта проблема не возникала при получении КГУ системы, когда уравнение (2.1) умножалось на сумматорные инварианты $\phi = 1, \bar{\xi}, \frac{\xi^2}{2}$. При этом вне зависимости от вида f^{j+1} результатом интегрирования

$\int f^{j+1} \varphi(\xi) d\xi = \int f_0^{j+1} \varphi(\xi) d\xi$ было значение газодинамических переменных на новом слое по времени.

Вначале определим турбулентную вязкость и связанное с ней турбулентное время τ_m . Выберем турбулентную вязкость в виде

$$\mu_\tau = \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|}{\left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right]} \quad (2.4)$$

где $\left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right]$ – модуль характерного значения величины $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$.

Понятие характерного значения не определено однозначно и является оценочной величиной. Например, в рассматриваемом ниже примере о турбулентном слое смешения в качестве $\left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right]$ выбиралась величина

$$\left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right] = \frac{|u_1 - u_0|}{L} \quad (2.5)$$

где в качестве u_1 и u_0 выбирались скорости невозмущенных слоев, а L – характерная толщина слоя смешения. Как показали расчеты, вариация величины (2.5) в широком диапазоне более чем на порядок практически не сказывается на значениях осредненной скорости u . Ниже будет показано, что при изменении этой величины примерно во столько же раз изменяется величина $|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|$.

В том же виде, аналогичном (2.3), выражалось τ_m при получении КГД аналога для уравнения, описывающего поведение вектора напряженности магнитного поля в [15–16]. При этом τ_m определялось как отношение магнитной вязкости γ и суммы газокинетического P и магнитного давления $\frac{B^2}{8\pi}$.

$$\tau_m = \frac{2\gamma}{P + \frac{B^2}{8\pi}} \quad (2.6)$$

По аналогии с (2.3) и (2.6) выберем τ_m в виде

$$\tau_\tau = \frac{2\mu_\tau}{P} \quad (2.7)$$

Обратимся теперь к выбору функции f^{j+1} , а точнее к получению ее момента $\int f^{j+1} c_i c_k d\xi$.

После интегрирования балансного уравнения (2.1) с весом $\xi_i \xi_k$ представим величину $\int f^{j+1} \xi_i \xi_k d\xi$ в виде

$$\int f^{j+1} \xi_i \xi_k d\xi = \rho \tilde{u}_i^{j+1} \tilde{u}_k^{j+1} + \int c_i c_k \tilde{f}^{j+1} d\xi \quad (2.8)$$

где

$$c_i = \xi_i - \tilde{u}_i \quad (2.9)$$

тепловая компонента u_i – осредненные значения скорости, а $\tilde{u}_i$ – актуальное значение макроскопической скорости.

$$\tilde{u}_i = u_i + \Delta u_i \quad (2.10)$$

$\tilde{f}^{j+1}$ – представляет из себя ту часть функции f^{j+1} , которая не обращается в 0 при интегрировании с весом $c_i c_k$.

В свою очередь представим $\tilde{f}^{j+1}$ в виде суммы двух функций

$$\tilde{f}^{j+1} = \tau_\tau \left(f_1 + \frac{\tau_\tau}{t_{\text{газ}}} f_2 \right) \quad (2.11)$$

где $t_{\text{газ}}$ – характерное газодинамическое время, которое выбирается в виде

$$t_{\text{газ}} = 1 / \left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right] \quad (2.12)$$

Определим вид функции $\tilde{f}^{j+1}$ и ее зависимости от газодинамических параметров вначале, учитывая, что в основе вывода балансного уравнения (2.1) лежит предположение о бесстолкновительном разлете, положим, что $\tilde{f}^{j+1}$ зависит от значения газодинамических параметров с предыдущего шага по времени $t = t^j$.

Вблизи состояния локального термодинамического равновесия функция распределения представляется в виде

$$f = f_0 + \tau f_{NS} \quad (2.13)$$

где f_{NS} – навье-стоксовская функция распределения, являющаяся результатом разложения в ряд по малому параметру решения уравнения Больцмана с помощью процедуры Чепмена–Энскога [12, 17–18]. По аналогии с f_{NS} представим интересующий нас момент $\tau_m \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\xi$ в виде

$$\begin{aligned} \tau_\tau \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\xi &= \\ &= h \tau_\tau \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j \left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) f_0^j d\xi \end{aligned} \quad (2.14)$$

В свою очередь представим

$$c_x^{j+1}c_y^{j+1}c_x^j c_y^{2j} = c_x^{2j}c_y^{2j} - \tau_t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} c_y^j c_x^{2j} - \tau_t \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} c_x^j c_y^2 + \tau_t^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} c_x^j c_y^j \quad (2.15)$$

Моменты всех членов, стоящих в правой части (2.15) кроме первого обратятся в ноль. Поэтому

$$\tau_t \int c_x^{j+1}c_y^{j+1}f_1 d\xi = h\tau_t \int c_x^{2j}c_y^{2j} \left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) f_0 d\xi \quad (2.16)$$

Коэффициент пропорциональности h , стоящий в правой части (2.16), выберем из следующих соображений. В уравнении для $\rho \Delta u \Delta v$, которое будет получено в п. 3 путем комбинации результата интегрирования балансного уравнения (2.1) с весом $\xi_x \xi_y$ и умноженного соответственно на v уравнения (1.2) и на u уравнения (1.3), так же, как и в $K - \varepsilon$ модели должны отсутствовать члены по порядку величины большие, чем 0 ($\tau, \tau_t, \rho \Delta u \Delta v$).

Определим теперь функцию f_2 . Учитывая определение (2.7) для τ_t и турбулентной вязкости (2.4) получим

$$\frac{\tau_t}{\tau_{\text{газ}}} \sim |\rho \Delta u \Delta v| \quad (2.17)$$

В свою очередь, величина $\frac{\tau_t}{\tau_{\text{газ}}} \int c_x c_y f_2 d\xi$ должна иметь размерность, соответствующую размерности $\frac{\partial \rho \Delta u \Delta v}{\partial t}$ в уравнении, описывающем изменение $\rho \Delta u \Delta v$ по времени. Этому условию будет удовлетворять функция f_2

$$f_2 \sim \frac{1}{p} f_{NS} \quad (2.18)$$

Таким образом в правой части уравнения, описывающего изменение по времени $\rho \Delta u \Delta v$ будет находиться член $\frac{\tau_t}{t_{\text{газ}}} \int f_2 c_x c_y d\xi$, пропорциональный

$$|\rho \Delta u \Delta v| \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.19)$$

По своей структуре (2.19) соответствует компоненте P_{xy} — тензора вязких напряжений, деленной на τ , где вместо газокINETического дав-

ления ρc^2 выступает величина $|\rho \Delta u \Delta v|$. Учитывая эту аналогию, выберем

$$\frac{\tau_t}{t_{\text{газ}}} \int f_2 c_x c_y d\xi = - \left| \frac{\rho \Delta u \Delta v}{2} \right| \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

П пульсационный момент $\rho \Delta u \Delta v$ имеет противоположный знак с $\mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$. Это определяет отрицательный знак в правой части (2.20).

Определив таким образом величину $\int f^{j+1} c_x c_y d\xi$, приступим к выводу уравнения для пульсационного момента $\rho \Delta u \Delta v$.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПУЛЬСАЦИОННОГО МОМЕНТА

Умножим функцию распределения f^{j+1} , которую определили в п.2, на $\xi_x \xi_y$ и проинтегрируем по пространству скоростей

$$\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\xi = \rho \tilde{u}^{j+1} \tilde{v}^{j+1} - p \left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) + \left| \frac{\rho \Delta u \Delta v}{2} \right| \left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

Учитывая (3.1), проинтегрируем по скоростям балансное уравнение (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{u} \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\tau_t}{2} \frac{\partial^2 \rho \tilde{u} \tilde{v}}{\partial t^2} - p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - p \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left| \frac{\rho \Delta u \Delta v}{2} \right| \times \\ \times \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \rho \tilde{u}^2 \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \tilde{v}^2 \tilde{u} + \\ + \frac{\partial \rho \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_t}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\xi_p \tilde{u} \tilde{v} + \tilde{u} \xi \tilde{v}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \tau_t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p^2}{\rho} + p(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) + \rho \tilde{u}^2 \tilde{v}^2 \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_t}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\xi_p \tilde{u} \tilde{v} + \tilde{v} \xi \tilde{u}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Осредним уравнение (3/2) по времени. Учитывая сделанное в п. 1 замечание, пренебрежем членами, пропорциональными $\rho \Delta \tilde{u}^2$ и $\rho \Delta \tilde{v}^2$, а также пульсационным моментам третьего порядка. При этом получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho uv}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \rho uv}{\partial t^2} + \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho u^2 v}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial 2 \mu \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2 u}{\partial y} + \frac{\partial \rho u}{\partial y} = - \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|}{2} \times \\
& \times \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} 3 \left(\overline{\rho \Delta u \Delta v} + u^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v} \right) + \\
& + \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(3 \rho uv + \rho u^3 v \right) + \frac{\partial 2 \mu}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times \\
& \times \left(\frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) + \rho u^2 v^2 \right) + \\
& + \frac{\partial 2 \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} 4 \overline{\rho \Delta u \Delta v} \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} 3 \times \\
& \times \left(\overline{\rho \Delta u \Delta v} + u^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v} \right) + \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(3 \rho uv + 3 v^3 u \right)
\end{aligned} \quad (3.3)$$

Чтобы получить уравнение, описывающее изменение $\overline{\rho \Delta u \Delta v}$ по времени, вычтем из (3.3) уравнение (1.2), умноженное на v , и уравнение (1.3), умноженное на u . В результате получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mu \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial v \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial y} + uv \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v \rho}{\partial y} \right) + \\
& \Delta u \Delta v \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) + \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\
& = \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} 3 \left(p + u^2 \rho \right) \overline{\Delta u \Delta v} + \\
& + \frac{\partial \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(3 \rho uv + \rho u^3 v \right) + \frac{\partial 2 \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times \\
& \times \left(\frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) + \rho u^2 v^2 \right) + \\
& + \frac{\partial 2 \mu_T}{\partial x} \frac{\partial \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial y} + \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} 3 \times \\
& \times \left(p + v^2 \rho \right) \overline{\Delta u \Delta v} + \frac{\partial \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(3 \rho uv + \rho v^3 u \right) - \\
& - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

На первый взгляд, наличие члена $uv \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right)$ противоречит, положенному в основу конструирования функции f^{j+1} , предположению об отсутствии в уравнении (3.4) членов по порядку величины больших $\overline{\rho \Delta u \Delta v}$, μ и μ_T . Тем не менее, учитывая предположение о слабой сжимаемости среды, величину

$$uv \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) = -uv \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.1)$$

можно также считать малой.

Кроме того, как показывает опыт расчетов, члены $\frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \overline{\rho \Delta u \Delta v}}{\partial t^2}$ и смешанные пространственные производные в правой части (3.4) практически не оказывают влияния на результаты моделирования. Их для удобства численного решения можно отбросить.

Обратимся к выбору μ_T . Согласно (6.2) в нее входит характерное значение $\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$. Оно определяется в каждом конкретном случае рассматриваемой задачи.

Например, в рассматриваемом в п. 5 случае моделирования слоя смешения величина μ_T выбирается в виде

$$\mu_T = \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v} L|}{|u_1 - u_0|} \quad (4.2)$$

где u_1, u_0 – скорости слоев, а L – характерная толщина слоя смешения.

Как показал опыт расчетов, варьирование величины $\frac{|u_1 - u_0|}{L}$ более чем на порядок практически не влияет на значение осредненной скорости u поскольку из уравнения (4.3) следует, что приблизительно во столько же раз меняется величина $\overline{\rho \Delta u \Delta v}^{j+1}$.

Для решения упрощенного варианта уравнения (3.4), без вторых производных по времени и смешанных пространственных производных, использовалась явная схема, которая в дифференциально разностном виде представлена как

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{\rho \Delta u \Delta v}^{j+1} - \overline{\rho \Delta u \Delta v}^j}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial x} \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \\
& + \frac{\partial v}{\partial y} \overline{\rho \Delta u \Delta v} + \overline{\Delta u \Delta v} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v \rho}{\partial y} \right) + \\
& uv \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v \rho}{\partial y} \right) = - \frac{|\overline{\rho \Delta u \Delta v}|}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial \mu + \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} 3 \left(p + \rho u^2 \right) \overline{\Delta u \Delta v} + \frac{\partial \mu + \mu_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial x} \left(3 \rho uv + \rho u^3 v \right) + \frac{\partial \mu + \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} 3 \left(p + \rho v^2 \right) \times \\
& \times \overline{\Delta u \Delta v} + \frac{\partial \mu + \mu_T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(3 \rho uv + \rho v^3 u \right) - \\
& - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \quad (4.3)$$

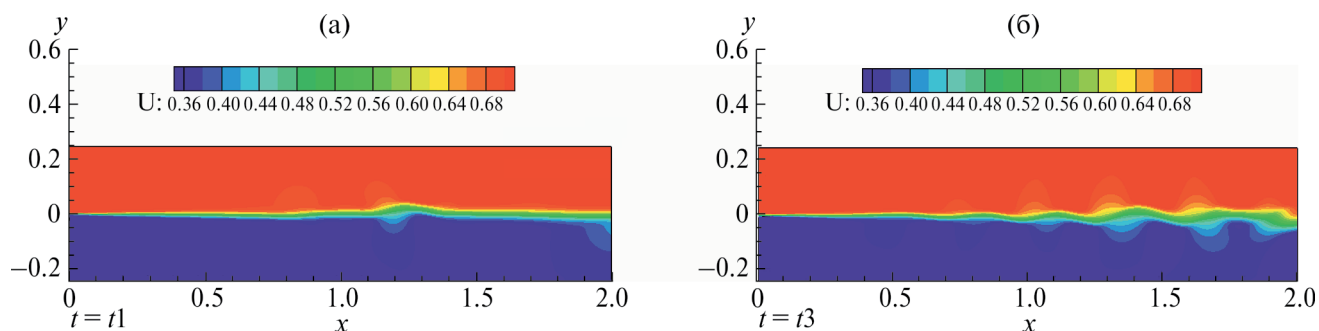


Рис. 1. Нестационарное решение уравнений Навье–Стокса. Мгновенные распределения скорости.

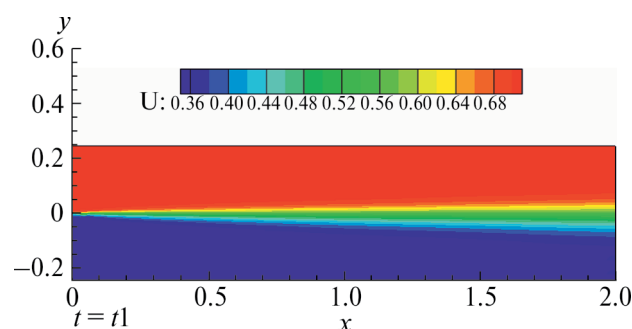


Рис. 2. Стационарное решение уравнений Рейнольдса. Распределение скорости.

Для аппроксимации пространственных производных в (4.3) можно выбрать различные алгоритмы, применяемые для решения задач гидро- и газовой динамики.

Величина μ_t определяется из (4.2) со значением модуля пульсационного момента из решения (3.4). Значения скоростей u и v затем определяются соответственно из

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = \\ = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2 + p}{\partial y} = \\ = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сделаем замечание относительно коэффициента $\mu + \mu_t$ в уравнении (4.3). Добавка к турбулентной вязкости вязкости молекулярной связана с тем, что время τ_t , входящее в балансное уравнение (2.1), даже при отсутствии турбулентных пульсаций не может быть меньше характерного времени между столкновениями молекул.

Таким образом выведена замкнутая система уравнений (1.1)–(1.3) и (4.4)–(4.5) для моделирования двумерных турбулентных течений в слабо сжимаемом газе и жидкости.

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера расчета выбрана пространственно-двумерная задача о слое смешения. Расчетная область: $0 < x < 2$, $-0.25 < y < 0.25$. Начальные скорости слоев $u = 0.7$ при $y > 0$ и $u = 0.35$ при $y < 0$. Молекулярная вязкость определялась по заданному числу Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^4$. Результаты расчетов сравнивались как с данными, полученными при использовании уравнений Навье–Стокса (ламинарный режим), так и со ставшими классическими расчетами, использующими турбулентную модель Спаларта–Аллмареса [2]. При использовании уравнений Навье–Стокса получается нестационарное решение, соответствующее неустойчивости слоя смешения – рис. 1.

В результате расчета уравнений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмареса получается стационарное решение – рис. 2. Наблюдается, практически, линейный рост ширины области смешения.

Близость решений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмареса демонстрирует распределение скорости в сечении $x = 1.5$ – рис. 3

Кривая, отвечающая решению уравнений Навье–Стокса, соответствует моменту времени $t = t1$ (рис. 1 слева), когда возмущения скорости еще не распространились до сечения $x = 1.5$. Дополнительным свидетельством близости решений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмареса является распределение величины $\frac{\partial u}{\partial y}$ в том же сечении – рис. 4.

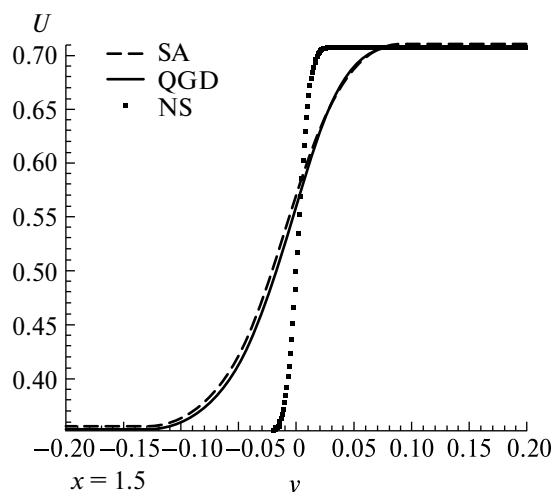


Рис. 3. Распределение скорости в сечении $x = 1.5$.

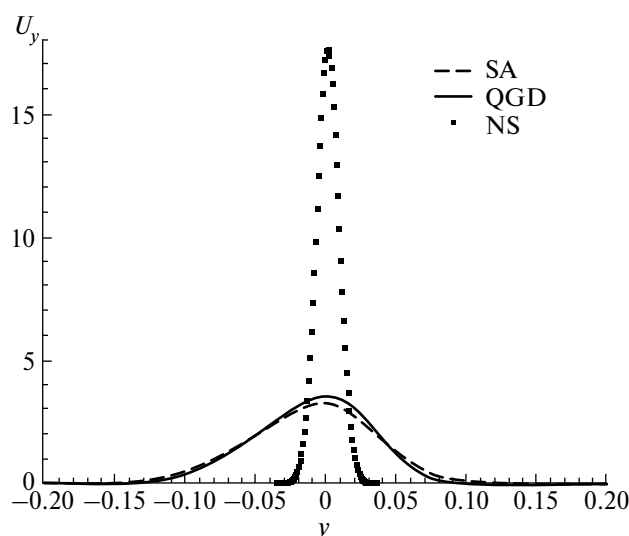


Рис. 4. Распределение величины $\frac{dy}{dy}$ в сечении $x = 1.5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты внушают определенный оптимизм в использовании предложенной кинетической модели. Однако полноценное включение ее в ряд используемых моделей для описания турбулентности течений требует дополнительных исследований. В частности, планируется в дальнейшем расширить круг моделируемых задач, обобщить данную модель на случай сжимаемого газа и пространственной 3D-геометрии. Предполагается также в рамках предложенной методологии получить дополнительные уравнения для моментов $\overline{\rho \Delta u^2}$ и $\overline{\rho \Delta v^2}$, которые важны для нахождения кинетической энергии турбулентности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
2. Spalart P.R. and Allmaras S.R. A one equation turbulence model for aerodynamic flows // Recherche Aerospaciale. 1994. N 1. P. 5–21.
3. Shur M., Strelets M., Zaikov L., Gulyaev A., Kozlov V., Secundov A. Comparative Numerical Testing of one and two equation turbulence models for flows with separation and reattachment // AIAA Paper 95–0863, January 1995.
4. Поляков С.В., Ивахненко И.А., Четверушкин Б.Н. Квазигазодинамическая модель и мелкомасштабная турбулентность. // Математическое моделирование. 2006. Т. 20. № 2.
5. Wilcox D.E. Formulation of the K-omega turbulence model revisited // AIAA Journal. 2008. V. 46. N 11. P. 2823–2838.
6. Абалакин И.В., Антонов А.Н., Граур И.А., Четверушкин Б.Н. Использование алгебраической модели турбулентности для расчета нестационарных течений в окрестности выемок // Мат. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 45–56.
7. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. V. 32. N 8. August 1994. P. 1598–1605.
8. Goldberg V., Perroomain O., Batten P., Chakravarthy S. The k-e-Rt turbulence closure // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 2009. V. 3. N 2. P. 175–183.
9. Abdol-Hamid K.S., Carlson J.-R. and Rumsey C.L. Verification and validation of the K-KL turbulence model in FUN 3D and CFL 3D Codes // AIAA Paper. 2016. N 3941. June 2016.
10. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.: Физматлит, 1998. 343 с.
11. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс-Пресс, 2004. 328 с.
12. Гирифельдер Дж., Кертис У., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961. 916 с.
13. Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N. On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial boundary value problem // Applied Mathematics Letters. 2018. V. 83. P. 116–122.
14. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О свойствах и погрешности параболического и гиперболического порядка возмущений гиперболической системы 1-го порядка // Математический сборник. 2023. Т. 214. № 7.
15. Четверушкин Б.Н., Савельев В.И., Савельев А.В. Кинетические алгоритмы расчета течений электроприводящей жидкости на высокопроизводи-

- тельных вычислительных системах // Доклады РАН. 2019. Т. 489. № 6.
16. *Chetverushkin B.N., Saveliev A.V., Saveliev V.A.* Kinetic consistent MHD algorithm for incompressible conductive fluids // *Computer and Fluids*. 2023. V. 255.
 17. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
 18. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: МИР, 1973. 245 с.

DESCRIPTION OF TURBULENT FLOWS USING A KINETIC MODEL

Academician of the RAS **B. N. Chetverushkin^{a, *}**, **A. E. Lutsky^{a, **}**, **E. V. Shilnikov^{a, ***}**

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

In this paper, a closed system of equations for describing turbulent flows is obtained. Additional equations for cross pulsation moments are derived on the basis of a balanced kinetic equation, with the help of which a quasi gas-dynamic system of equations was previously obtained. The results of the calculation of the spatially two-dimensional problem of the mixing layer of two streams are presented.

Keywords: quasi gas-dynamic system of equations, turbulent flow, closure of the averaged equations system