

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕГЛАДКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© 2024 г. И. С. Ломов¹, *

Представлено академиком И.А. Соколовым

Поступило 02.10.2023 г.

После доработки 09.02.2024 г.

Принято к публикации 09.02.2024 г.

При минимальных условиях на правую часть волнового уравнения построено обобщенное решение смешанной задачи. Решение представлено в виде ряда из метода Фурье, найдена его сумма. Приведен вид обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: волновое уравнение, телеграфное уравнение, метод Фурье, метод Коши–Пуанкаре

DOI: 10.31857/S2686954324020052, **EDN:** XIZSRT

ВВЕДЕНИЕ

Основное внимание в статье уделено построению обобщенного решения следующей задачи:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (1)$$
$$(x,t) \in Q = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,\infty)\},$$

$$U_1(u) \equiv u_x(0,t) + a_1 u(0,t) + b_1 u(1,t) = 0, \quad (2)$$
$$U_2(u) \equiv u_x(1,t) + a_2 u(0,t) + b_2 u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad (3)$$
$$x \in [0,1],$$

где коэффициенты $a_i, b_i, i = 1, 2$, — произвольные комплексные числа, а комплекснозначная функция $f(x,t) \in L(Q_T)$, суммируемая функция, $Q_T = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T)\}, T > 0$ — произвольно зафиксированное число. Будем называть функцию $f(x,t)$ локально суммируемой в полуполосе Q .

Далее будет указано, как построить обобщенное решение более общей задачи

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (4)$$
$$(x,t) \in Q,$$

$$U_j(u) = 0, \quad j = 1, 2, t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (6)$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1],$$

где q, f, φ — комплекснозначные функции, $f(x,t)$ — локально суммируемая в полуполосе Q функция, $\varphi(x) \in L(0,1)$, суммируемая функция, $q(x,t)$ такова, что найдется функция $q_0(x) \in L(0,1)$, так что справедливо $|q(x,t)| \leq q_0(x)$ для $(x,t) \in Q$, и функция $q(x,t)u(x,t) \in L(Q_T)$ для любого $T > 0$.

Отметим, что задача (4)–(6) при $f(x,t) = 0$ и потенциале q не зависящем от t , была исследована в работе [1]. Найдены необходимые и достаточные условия существования сильного решения задачи. Применен метод А.П. Хромова, основанный на использовании подхода А.Н. Крылова для ускорения сходимости рядов Фурье и на идее Л. Эйлера по работе с расходящимися рядами. Для исследования неоднородной задачи (1)–(3) этот метод применить не удастся. Будет использована другая схема, предложенная В.В. Корневым и А.П. Хромовым.

1. Задаче (1), (2) поставим в соответствие дифференциальный оператор L , действующий в пространстве $L^2(0,1)$:

$$L : ly = -y''(x), \quad (7)$$
$$x \in (0,1),$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = 1, 2,$$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: lomov@cs.msu.ru

где U_j — краевые формы (2). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L , $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор.

Краевые условия (2) являются регулярными по Биркгофу и даже усиленно регулярными ([2], с. 72–73). Отметим, что результаты данной статьи для задачи (1)–(3) остаются верными и в случае любых двухточечных регулярных краевых условий. Изменится только способ продолжения функции $f(x, t)$ по переменной x с отрезка $[0, 1]$ на всю прямую.

Выпишем формальный ряд из метода Фурье, отвечающий задаче (1)–(3) (см. [3]):

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \times \\ \times \left[\int_0^t (R_\lambda f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \quad (8) \\ x \in [0, 1], t \geq 0.$$

Здесь $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$ означает, что оператор R_λ применяется к функции $f(x, \tau)$ по переменной x (τ — параметр), $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re} \rho \geq 0$, γ_n — образ в λ -плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho : |\rho - \pi n| = \delta\}$, число $\delta > 0$ и достаточно мало, число $r > 0$ достаточно велико и зафиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все контуры γ_n при $n \geq n_0$ находятся вне круга радиуса $|\lambda| = r$, а остальные собственные значения — внутри этого круга.

Для вывода формулы (8) использован резольвентный подход, связанный с методом Коши—Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты по спектральному параметру. Он имеет преимущество по сравнению с традиционным методом разделения переменных, поскольку не требует ни уточнения асимптотики собственных значений, ни информации о кратности спектра или о наличии присоединенных функций. Вид контуров интегрирования в формуле (8) может быть и иным. Главное здесь, что все собственные значения оператора (7) находятся в объединении областей, охватываемых этими контурами.

Решение задачи (1)–(3) называем *сильным*, если оно удовлетворяет условиям (2), (3) в обычном смысле, а уравнению (1) — почти всюду в области Q .

Теорема 1 ([3], теорема 1). Если $u(x, t)$ — сильное решение задачи (1)–(3), причем дополнительно выполняется условие единственности $u_n(x, t) \in L(Q_T)$ при любом $T > 0$, то оно единственно и находится по формуле (8), в которой ряд справа при любом зафиксированном $t \geq 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.

Теорема 1 говорит о том, что формальный ряд (8) и смешанная задача (1)–(3) тесно связаны. Расширим понятие этой связи.

Правая часть равенства (8) имеет смысл для любой функции $f(x, t) \in L(Q_T)$ при любых $T > 0$. В этом случае будем говорить, что выражение (8) также является формальным решением смешанной задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Будем называть ее в дальнейшем *обобщенной смешанной задачей*.

Таким образом, мы сначала определяем формальное решение (8), которое теперь выглядит как реальный объект (несмотря на то, что ряд (8), вообще говоря, расходящийся), и заключаем, что он соответствует новой смешанной задаче (обобщенной) (1)–(3). То есть и здесь мы устанавливаем связь смешанной задачи с рядом (8).

Наша цель: доказать, что для всех значений $(x, t) \in Q$ ряд (8) сходится для любой функции $f(x, t)$ из указанного класса. Этот ряд мы и назовем *обобщенным решением* (обобщенной) смешанной задачи (1)–(3). Найдем сумму этого ряда, эта сумма связана с функцией $\tilde{f}(x, t)$, являющейся продолжением функции $f(x, t)$ по переменной x с отрезка $[0, 1]$ на всю числовую прямую $x \in \mathbb{R}$ при каждом зафиксированном значении $t > 0$.

Для того чтобы выяснить, какой вид имеет сумма ряда (8), заметим следующее: $\rho^{-1} \sin \rho(t - \tau) = \int_0^{t-\tau} \cos \rho \eta d\eta$, применим новую

аксиому для расходящихся рядов [1] $\int \sum = \sum \int$, где $\int$ — определенный интеграл, тогда ряд (8) можно записать следующим образом:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \times \\ \times \left[\int_0^t \int_0^{t-\tau} (R_\lambda f(\cdot, \tau)) \cos \rho \eta d\eta d\tau \right] d\lambda = \\ = \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z_0(x, \eta, f(\cdot, \tau)) d\eta,$$

где $Z_0(x, \eta, f(\cdot, \tau))$ — формальное решение задачи (4)–(6) в случае однородного уравнения (4), нулевого потенциала и с начальной функцией $\varphi(x) = f(x, \tau)$, τ — параметр. За сумму ряда Z_0 примем следующее выражение [1]:

$$Z_0(x, \eta, f(\cdot, \tau)) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(x + \eta, \tau) + \tilde{f}(x - \eta, \tau)], \quad (9)$$

где $\tilde{f}(\eta, \tau)$ есть продолжение по η функции $f(\eta, \tau)$ с отрезка $[0, 1]$ на всю прямую. Тогда имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} [\tilde{f}(x + \eta, \tau) + \tilde{f}(x - \eta, \tau)] d\eta,$$

сделав замены переменных, получаем

$$U_1(u) = u_x(0, t) + a_1 u(0, t) + b_1 u(1, t) = \frac{1}{2} \left[\tilde{f}'_x(t, \tau) + \tilde{f}'_x(-t, \tau) + a_1 (\tilde{f}(t, \tau) + \tilde{f}(-t, \tau)) + b_1 (\tilde{f}(1+t, \tau) + \tilde{f}(1-t, \tau)) \right] = 0.$$

Здесь имеется в виду производная $\tilde{f}'_x(\psi(x), \tau) = \tilde{f}'_x(y, \tau)$, где $y = \psi(x)$. Заменяем переменную t на x , умножим равенство на 2:

$$\tilde{f}'_x(x, \tau) + \tilde{f}'_x(-x, \tau) + a_1 (\tilde{f}(x, \tau) + \tilde{f}(-x, \tau)) + b_1 (\tilde{f}(1+x, \tau) + \tilde{f}(1-x, \tau)) = 0, x \geq 0. \quad (11)$$

Аналогично из второго условия (2) $U_2(u) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} & \tilde{f}'_x(1+x, \tau) + \tilde{f}'_x(1-x, \tau) + \\ & + a_2 (\tilde{f}(x, \tau) + \tilde{f}(-x, \tau)) + \\ & + b_2 (\tilde{f}(1+x, \tau) + \tilde{f}(1-x, \tau)) = 0, x \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{f}(x, \tau) = f(x, \tau), \quad x \in [0, 1]. \quad (13)$$

Отметим, что в равенствах (11), (12) переменная $x \in [0, \infty)$.

Рассмотрим систему (11)–(13).

Лемма 1. *Имеет место следующее равенство:*

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1+x, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1-x, \tau) \end{pmatrix} = \\ & = 2M \int_0^x e^{M(x-t)} \begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1+x, \tau) \end{pmatrix} dt, \quad (14) \\ & x \in [0, \infty), \tau \geq 0, \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta. \quad (10)$$

Теперь правая часть равенства (10) определена при всех $(x, t) \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$.

Припишем сумму (10), вообще говоря, расходящемуся ряду (8). Ниже мы докажем, что если функция $f(x, t)$ достаточно гладкая, то ряд (8) есть сильное решение задачи (1)–(3).

2. Построим продолжение $\tilde{f}(x, t)$ функции $f(x, t)$, используя краевые условия (2). Всюду при этом t , а затем τ рассматриваются как параметр.

Пусть $\tilde{f}(x, t) \in C^1(\mathbb{R})$ по переменной x . Подставим функцию (9) в краевые условия (2), заменив переменную η на t . Имеем

$$\text{где } M \text{ — матрица, } M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим равенство (14), считая что

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}(-x, \tau) \\ \tilde{f}(1-x, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(-x, \tau) \\ f(1-x, \tau) \end{pmatrix},$$

при $x \in [0, 1]$, $f(x, \tau)$ — произвольная функция из класса $L(Q_T)$ для каждого $T > 0$. Тогда формула (14) дает однозначное продолжение $\tilde{f}(x, \tau)$ произвольной функции $f(x, \tau) \in L(Q_T)$ для любого $T > 0$ на всю числовую ось $(-\infty, \infty)$ при каждом $\tau \geq 0$. Очевидно, $\tilde{f}(x, t) \in L_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

3. Обозначим через $C_U^2(Q)$ множество функций $f(x, t)$, $(x, t) \in Q$, дважды непрерывно дифференцируемых в полуполосе Q и удовлетворяющих краевым условиям (2): $U_j(f) = 0$, $j = 1, 2$, $t \geq 0$.

Теорема 2. *Если функция $f(x, t) \in C_U^2(Q)$, то функция (10) $u(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$, является сильным решением задачи (1)–(3) с условием единственности $u_{tt}(x, t) \in L(Q_T)$ для любого $T > 0$.*

Следствие из теоремы 2. *Если функция $f(x, t) \in C_U^2(Q)$, то ряд (8) при всех $(x, t) \in Q$ сходится к функции $u(x, t)$, определяемой формулой (10).*

Замечание. Если $f(x, t)$ — локально суммируемая функция в полуполосе Q , то формула

(10) определяет непрерывную функцию $u(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x, t)$ является локально суммируемой в полуполосе Q , $u(x, t)$ — функция, определяемая формулой (10). Тогда ряд (8) есть ряд Фурье функции $u(\cdot, t)$ при любом $t \geq 0$.

Установим еще одно свойство функции (10) $u(x, t)$.

Теорема 4. Пусть функция $f(x, t)$ — локально суммируемая в полуполосе Q . Тогда при любом зафиксированном значении переменной t функция $u(x, t)$ — функция (10), имеет ограниченную вариацию при $x \in [0, 1]$.

Теорема 5. Пусть функция $f(x, t)$ — локально суммируема в полуполосе Q . Тогда при любом зафиксированном числе $t \geq 0$ ряд (8) сходится к функции $u(x, t)$, определяемой формулой (10), равномерно по x на любом отрезке $[a, b] \subset (0, 1)$. При этом на всем отрезке $[0, 1]$ имеет место следующая оценка скорости сходимости ряда (8) к функции (10):

$$\left\| S_n(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta \right\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где через $S_n(x, t)$ обозначена n -я частичная сумма ряда (8).

Утверждение теоремы о равномерной сходимости ряда (8) следует из теорем 3, 4, признака Жордана сходимости тригонометрического ряда Фурье [4, с. 121] и теоремы равносходимости Стоуна [5]. Оценка (43) получена из теоремы о скорости равносходимости спектральных разложений и тригонометрического ряда Фурье [6, 7, с. 23].

4. Для построения обобщенного решения смешанной задачи (4)–(6) воспользуемся одним из двух методов, предложенных А.П. Хромовым, — секвенциальным или аксиоматическим методами (см., например, [8]). Обобщенное решение получается в виде быстро сходящегося функционального ряда — обобщенная формула Даламбера. Сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема 6. Пусть для задачи (4)–(6) выполняются следующие условия: функции $\varphi(x) \in L(0, 1)$, $f(x, t) \in L(Q_T)$ для любого $T > 0$, функция $q(x, t)$ такова, что найдется функция $q_0(x) \in L(0, 1)$, так что справедливо $|q(x, t)| \leq q_0(x)$ для $(x, t) \in Q$, и функция $q(x, t)u(x, t) \in L(Q_T)$ для любого $T > 0$.

Тогда задача (4)–(6) имеет обобщенное решение, которое представляется формулами

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta,$$

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta, \tau) d\eta, n \geq 1,$$

где функция $\tilde{f}_n(\eta, \tau) = f_n(\eta, \tau) = -q(\eta, \tau)a_n(\eta, \tau)$ при $\eta \in [0, 1]$, $n \geq 0$, при каждом τ , далее функция $f_n(\eta, \tau)$ продолжается по переменной η на всю числовую прямую с использованием формулы (14), как это было сделано для функции $f(\eta, \tau)$.

Отметим, что аналогичный подход для построения обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения со смешанной производной применен в работе [9] В.С. Рыхлова.

Другой подход к исследованию смешанных задач для гиперболических уравнений получил развитие в работах Ф.Е. Ломовцева, см. [11].

Метод Фурье для построения другого типа обобщенного решения смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка использован в книге [11, с. 492]. Решение построено в предположении, что правая часть уравнения, функция $f(x, t) \in L^2(0, l)$ по переменной x при каждом $t \geq 0$ и непрерывна в пространстве $L^2(0, l)$ по t на полупрямой $[0, \infty)$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор признателен А.П. Хромову и В.В. Корневу за полезные обсуждения результатов работы и за ценные предложения по схеме исследования задачи (1)–(3).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А.П., Корнев В.В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 215–238.
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238>

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
3. *Хромов А.П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 717–731. <https://doi.org/10/1134/S0374064119050121>
4. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы. 1961. 936 с.
5. *Stone M.H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. V. 28. N 4. С. 695–761.
6. *Ломов И.С.* О скорости сходимости биортогональных разложений функций // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 12. С. 1618–1629.
7. *Ломов И.С.* Спектральный метод В.А. Ильина. Несамосопряженные операторы. II. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений. М.: МАКС Пресс, 2023. 380 с.
8. *Ломов И.С.* Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1471–1483. <https://doi.org/10.31857/S0374064122110048>
9. *Рыхлов В.С.* Обобщенная начально–граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69. № 2. С. 342–363. <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363>
10. *Ломовцев Ф.Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке // Проблемы физики, математики и техники. 2022. № 1 (50). С. 62–73.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

GENERALIZED SOLUTION OF A MIXED PROBLEM FOR A WAVE EQUATION WITH A NON-SMOOTH RIGHT-HAND SIDE

I. S. Lomov^{a,*}

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Under minimal conditions on the right side of the wave equation, a generalized solution of the mixed problem is constructed. The solution is presented as a series from the Fourier method, its sum is found. The form of a generalized solution of a mixed problem for an inhomogeneous telegraphic equation is given.

Keywords: wave equation, telegraphic equation, Fourier method, Cauchy–Poincare method