

УДК 519.21

ДВУМЕРНЫЕ САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2024 г. В. О. Мантуров^{1,2,3,*}, А. Я. Канель-Белов^{1,4,5,**}, С. Ким^{7,***}, Ф. К. Нилов^{1,6,****}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 22.08.2023 г.

После доработки 24.10.2023 г.

Принято к публикации 17.12.2023 г.

Известно, что если на плоскости имеется конечный набор выпуклых фигур, внутренности которых не пересекаются, то среди этих фигур имеется хотя бы одна *крайняя* — такая, которую можно непрерывно передвинуть “на бесконечность” (за пределы большого круга, содержащего остальные фигуры), оставляя все остальные фигуры неподвижными и не пересекая их внутренности в процессе движения. Было обнаружено, что в пространстве размерности три имеет место феномен *самозаклинивающихся структур*. *Самозаклинивающаяся структура* — это такой конечный (или бесконечный) набор выпуклых тел с непересекающимися внутренностями, что если зафиксировать все, кроме любого одного, то это тело нельзя “унести на бесконечность”.

С давних пор имеющиеся структуры базируются на рассмотрении слоев из кубов, тетраэдров и октаэдров, а также их вариаций.

В данной работе мы рассматриваем принципиально новый феномен двумерных самозаклинивающихся структур: набор двумерных многоугольников в трехмерном пространстве, где каждую многоугольную плитку нельзя унести на бесконечность. Из тонких плиток собираются самозаклиненные *декаэдры*, из которых, в свою очередь, собираются структуры второго порядка. В частности, приводится конструкция *колонны*, составленной из декаэдров, устойчивой при фиксации двух крайних декаэдров, а не всей границы слоя, как в структурах, исследованных ранее.

Ключевые слова: самозаклинивающаяся структура

DOI: 10.31857/S2686954324010144, EDN: ZTAZZI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что если на плоскости имеется конечный набор выпуклых фигур, внутренности которых не пересекаются, то среди этих фигур

имеется хотя бы одна *крайняя* — такая, которую можно непрерывно передвинуть “на бесконечность” (за пределы большого круга, содержащего остальные фигуры) таким образом, чтобы в процессе движения остальные фигуры оставались неподвижными, а внутренности фигур не пересекались. Отметим, что если все эти тела являются шарами, то и в пространстве любой размерности можно найти тело, которое передвигается “на бесконечность”. Было обнаружено, что в пространстве размерности три и выше имеет место феномен *самозаклинивающихся структур*. *Самозаклинивающаяся структура* — это такой (не обязательно конечный) набор выпуклых тел с неперекрывающимися внутренностями, что если зафиксировать все, кроме любого одного, то оставшееся тело нельзя “унести на бесконечность”. Это свойство равносильно следующему: *любое бесконечно малое движение возможно лишь как часть совместного движения всех тел вместе (как единого твердого тела)*. Историю открытия самозаклинивающихся структур, а также их примеры и приложения см. в [1, 2].

¹Московский физико-технический институт, Москва, Россия

²Казанский федеральный университет, Казань, Россия

³Северо-Восточный университет, Шэньян, Китай

⁴Университет им. Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль

⁵Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Магнитогорск, Россия

⁶Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁷Цзилиньский университет, Чанчунь, Китай

*E-mail: vomanturov@yandex.ru

**E-mail: kanelster@gmail.com

***E-mail: kimseongjeong@jlu.edu.cn

****E-mail: nilovfk@gmail.com

Данная тема представляет интерес как с точки зрения чистой математики, так и с точки зрения приложений, в частности в архитектуре и оборонной промышленности. Самозаклинивающимся структурам посвящен ряд статей в с одной стороны популярных, с другой стороны высокорейтинговых журналах, включая “Nature” [3]. Подобная идея уже используется при создании бронезилетов¹. В результате выигранного Ю. Эстриным мегагранта возникла (и успешно существует) лаборатория, занимающаяся гибридными наноструктурными материалами². Подобными структурами занимались различные группы исследователей, например группа Томаса Зигмунда³ (см. [4, 5, 6, 7, 8]). Дадим ссылки на некоторые другие группы и индивидуальных исследователей из разных стран мира: Ф. Бартела⁴, И. Бреше⁵, А. Молотников⁶, Дж. Фаллакара⁷, В. Виана⁸, а также⁹. Укажем также некоторые работы группы в Нидерландах¹⁰ и в Технионе¹¹. Известные самозаклинивающиеся структуры базируются на рассмотрении слоев из кубов, тетраэдров и октаэдров, а также их вариациях (см. [2]). Данные структуры обладают особенностью: при фиксации границы по периметру структура становится жесткой и не проваливается. Это обстоятельство демонстрируется и доказывается не только с помощью компьютерной программы, но и экспериментами с реальной моделью, развивая идеи А.Л. Семенова о том, что носителем доказательства может быть рисунок.

В данной работе мы рассматриваем принципиально иные структуры. Из тонких плиток собираются самозаклиненные *декаэдр*, из которых, в свою очередь, собираются структуры

второго порядка. В частности, приводится конструкция **колонны**, составленной из декаэдров, устойчивой при фиксации двух крайних декаэдров, а не всей границы слоя, как в структурах, исследованных ранее. Кроме того, мы приводим структуру, составленную из двумерных плиток (на плоскости такое расположение невозможно).

Ранее созданные самозаклинивающиеся структуры были **жесткими**, в то же время интересны структуры, в определенном (управляемом) смысле **гибкие**, элементы которых способны двигаться в заданных рамках. Это может быть интересно как с архитектурной точки зрения, так и при управлении процессом релаксации и гашения разного рода волн, а также иными управлениями. Нам представляется, что построенные в статье конструкции можно видоизменить так, чтобы получились гибкие.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 строится *декаэдр* – десятигранник, получаемый из додекаэдра удалением двух противоположных граней и малым “вытягиванием” некоторых граней. В разделе 3 мы предьявляем самозаклинивающуюся структуру в виде “кольца”, состоящего из набора “последовательно вложенных друг в друга” декаэдров, каждый из которых блокирован снаружи соседними боковыми гранями.

2. ПОСТРОЕНИЕ И КООРДИНАТЫ ДЕКАЭДРОВ

Рассмотрим развертку додекаэдра на плоскости (получаемую, например, путем проекции всех граней внутрь одной грани).

На рис. 1 изображены 12 граней додекаэдра M (пустыми являются центральная пятиугольная грань и внешняя пятиугольная грань) таким образом, что для каждой двух соседствующих по ребру граней одна помечена как “большая”

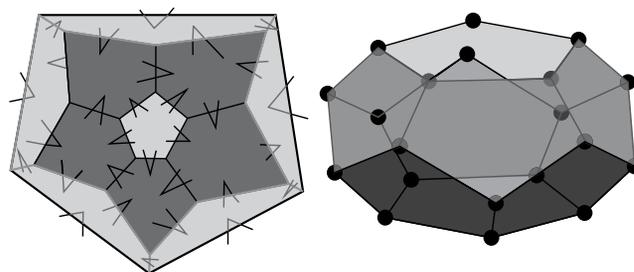


Рис. 1. Грани додекаэдра, блокирующие друг друга.

¹ <http://www.3ders.org/articles/20130829-arl-purdue-explore-3d-printing-to-fix-damaged-on-the-spot-in-combat-zones.html>

² <http://hybrid-nano-lab.misis.ru/index.php>, см. также <http://hybrid-nano-lab.misis.ru/science-1.php>

³ <https://engineering.purdue.edu/MYMECH>

⁴ <https://barthelat-lab.mcgill.ca/>

⁵ <http://simap.grenoble-inp.fr/fr/equipes/m-brechet-yves>

⁶ <https://www.rmit.edu.au/contact/staff-contacts/academic-staff/m/molotnikov-dr-andrey>

⁷ <https://poliba.academia.edu/giuseppefallacara>

⁸ https://sigarra.up.pt/faup/en/func_geral.formview?p_codigo=606590

⁹ <https://www.cs.dartmouth.edu/robotics/publications/Zhang2018-interlocking.pdf>, <https://www.colorado.edu/lab/barthelat/sites/default/files/attached-files/2019n3.pdf>

¹⁰ <http://heronjournal.nl/63-12/6a.pdf>

¹¹ <https://grobman.net.technion.ac.il/files/2018/01/published-paper-7-2017.pdf>, <https://grobman.net.technion.ac.il/files/2015/04/23.pdf>, <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1478077117714913>

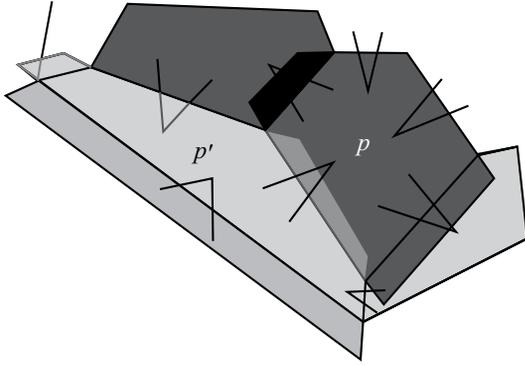


Рис. 2. Грани декаэдра \tilde{M} .

(обозначение $a > b$, будем также говорить, что “грань b блокирована гранью a ”).

Непосредственно из построения вытекает следующая

Лемма 1. Каждая боковая грань додекаэдра M блокирована тремя из пяти соседних с ней граней, причем эти три грани не являются подряд идущими.

В настоящей работе мы назовем нижние пять пятиугольников, которые раскрашены черным цветом на рис. 1, *нижним поясом*, а верхние пять пятиугольников, которые раскрашены серым цветом на рис. 1, – *верхним поясом*.

Запись вершин додекаэдра M в декартовых координатах задана ниже:

$$P_1^1 = \left\{ \left(r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right), 0 \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (1)$$

$$P_2^1 = \left\{ \left(\sqrt{3}r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), \sqrt{3}r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right), T \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (2)$$

$$P_3^1 = \left\{ \left(\begin{array}{l} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), T + S \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (3)$$

$$P_4^1 = \left\{ \left(\begin{array}{l} r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), 2T + S \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (4)$$

где $r > 0$ является радиусом окружности, в которую вписан нижний пятиугольник,

$$T = 2r \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} \text{ и } S = 2r \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}.$$

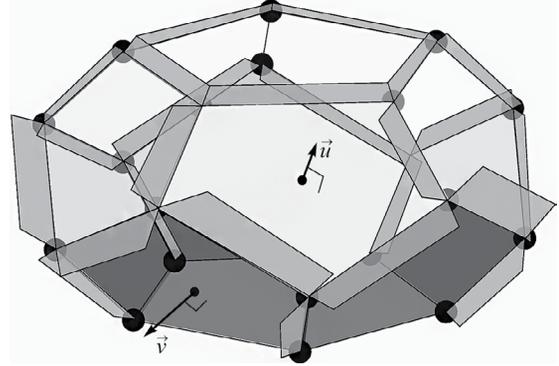


Рис. 3. Грани декаэдра \tilde{M} в \mathbb{R}^3 .

Грани декаэдра \tilde{M} получаются из боковых граней додекаэдра M следующим образом:

Для каждой пятиугольной грани p нижнего пояса додекаэдра M прикрепим равнобокие трапеции к ребрам, по которым p блокирует соседние грани. Основанием каждой трапеции служит ребро грани p , а боковые стороны являются продолжениями ребер грани p , смежных с этим ребром.

Для каждой пятиугольной грани p верхнего пояса додекаэдра M прикрепим трапеции (так же, как для нижнего пояса) к ребрам, по которым p блокирует соседние грани или p встречается с внешней стороной, см. рис. 2 и 3. Назовем прикрепленные трапеции *крыльями*. Всего у декаэдра получается 10 (дека) граней (без нижней и верхней граней додекаэдра).

Скажем, что грань Π декаэдра \tilde{M} не может двигаться по направлению вектора \vec{v} , если невозможно сдвинуть грань Π параллельно вдоль вектора \vec{v} в замыкании $\mathbb{R}^3 \setminus (\tilde{M} - \Pi)$. Грань Π декаэдра \tilde{M} блокирована по направлению вектора \vec{v} боковой гранью Φ , если невозможно сдвинуть грань Π параллельно вдоль вектора \vec{v} в $\mathbb{R}^3 \setminus \Phi$. Несложно видеть, что если грань Π декаэдра \tilde{M} блокирована по направлению вектора \vec{v} гранью Φ , то она не может двигаться по направлению вектора \vec{v} .

Для каждой грани такое направление вектора \vec{w} , что $\vec{w} \cdot \vec{v} > 0$ или $\vec{w} \cdot \vec{u} > 0$ назовем *наружным*, где \vec{v} и \vec{u} – векторы нормалей к граням нижнего и верхнего поясов, изображенные на рис. 3. Если $\vec{w} \cdot \vec{v} < 0$ или $\vec{w} \cdot \vec{u} < 0$, то направление вектора \vec{w} назовем *внутренним*. Если $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ или $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, то будем говорить, что вектор \vec{w} находится на грани.

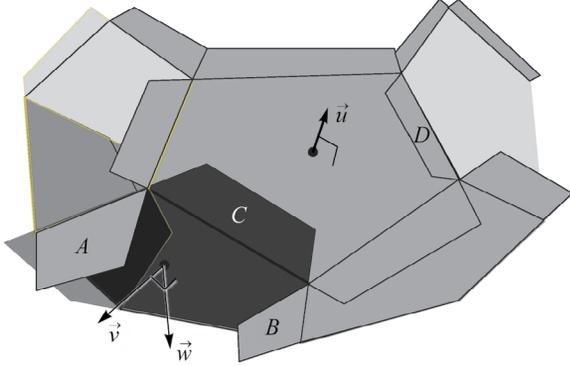


Рис. 4.

Лемма 2. Если все грани декаэдра \tilde{M} неподвижны, кроме одной грани Π , то Π не может двигаться наружу.

Доказательство. Рассмотрим грань нижнего пояса декаэдра \tilde{M} на рис. 4. Видно, что, если черная грань движется по направлению вектора \vec{v} , то она заблокирована гранями A и B . Из этого наблюдения следует, что грань нижнего пояса не может двигаться по направлению вектора наружу. Аналогично, можно показать, что грань верхнего пояса декаэдра \tilde{M} заблокирована двумя гранями C и D .

3. ЦЕПОЧКА ИЗ ДЕКАЭДРОВ. САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ

Итак, для того чтобы построить самозаклинивающуюся структуру из декаэдров, нам нужно, чтобы:

- 1) грани каждого декаэдра не могли двигаться внутрь;
- 2) грани каждого декаэдра не могли двигаться наружу.

Первая цель достигается просто: мы располагаем десятиугольник наибольшей площади (плоскость этого десятиугольника будет параллельна пустым граням декаэдра) (см. рис. 3, на котором для упрощения восприятия декаэдр изображен без крыльев).

Несложно видеть, что если все грани декаэдра неподвижны, то десятиугольник фиксирован, а если все грани декаэдра и десятиугольник неподвижны, кроме одной грани Π , то Π не может двигаться внутрь. Но одна грань может двигаться снаружи, хотя остальные грани неподвижны.

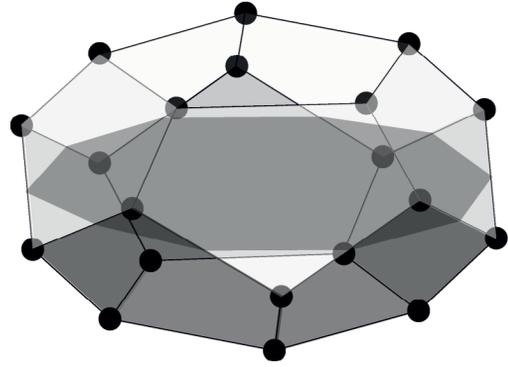


Рис. 5. Декаэдр (без крыльев) с десятиугольником.

Замечание. Отметим, что структуру декаэдра можно менять, делая “нижний пояс” более “пологим” (так, чтобы угол между гранями из нижнего пояса и плоскостью Oxy был мал), а “верхний пояс” более “крутым” (угол с плоскостью Oxy близок к прямому).

С другой стороны, мы можем построить сколь угодно длинную цепочку декаэдров C_m , а именно s -й декаэдр, $1 \leq s \leq m$, цепочки C_m декаэдров имеет координаты

$$P_1^s = \left\{ \begin{array}{l} \left(r \cos \left(\frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. r \sin \left(\frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. (s - 1)(2T + S) \right) \end{array} \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_2^s = \left\{ \begin{array}{l} \left(\sqrt{3}r \cos \left(\frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. \sqrt{3}r \sin \left(\frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. (s - 1)(2T + S) + T \right) \end{array} \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_3^s = \left\{ \begin{array}{l} \left(\sqrt{3}r \cos \left(\frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. \sqrt{3}r \sin \left(\frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. (s - 1)(2T + S) + T + S \right) \end{array} \right\}_{j=0}^4,$$

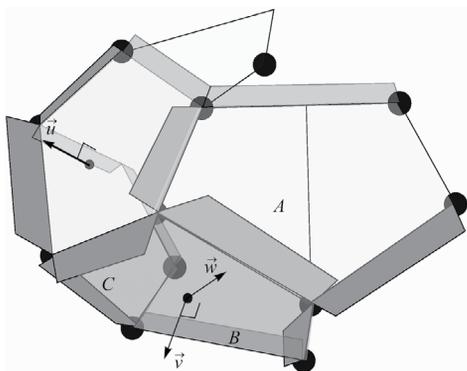


Рис. 6. Внутренние векторы.

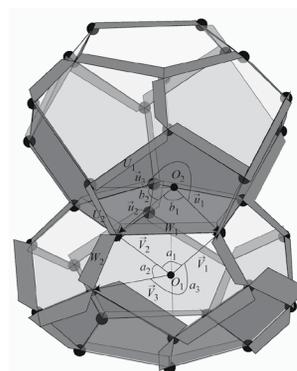


Рис. 7.

$$P_4^s = \left\{ \left(\begin{array}{c} r \cos \left(\frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \\ r \sin \left(\frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \\ (s - 1)(2T + S) + 2T + S \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

где T и S определены в формулах (1), (2), (3) и (4) и $r(s)$ является остатком при делении s на 2.

Лемма 3. Если все грани цепочки C_m декаэдров (с десятиугольниками между ними) длины t неподвижны, кроме одной грани Π , то Π не может двигаться внутрь.

Доказательство. Рассмотрим грань нижнего пояса (черную грань) одного декаэдра на рис. 6, скажем, n -го декаэдра. Видно, что если черная грань движется по направлению вектора \vec{v} , то она заблокирована боковыми гранями A , B и C . Заметим, что B – грань верхнего пояса $(n - 1)$ -го декаэдра. Из этого наблюдения следует, что грань нижнего пояса не может двигаться по направлению вектора наружу. Аналогично, можно показать, что грань верхнего пояса декаэдра заблокирована двумя соседними гранями.

В справедливости следующей леммы можно убедиться с помощью модели, изображенной на рис. 9.

Лемма 4. Если все грани цепочки C_m декаэдров длины t неподвижны, кроме одной грани Π , то Π не может вращаться.

Лемма 5. Если все грани цепочки C_m декаэдров длины t неподвижны, кроме одной грани Π ,

то Π не может двигаться по направлению вектора, который находится на грани Π .

Доказательство. Рассмотрим грань верхнего пояса нижнего декаэдра (белую грань) на рис. 7.

Когда грань верхнего пояса нижнего декаэдра движется по направлению вектора с началом в точке O_1 , который находится на треугольнике, состоящем из угла a_1 и векторов v_1, v_2 на рис. 7, она блокируется гранью нижнего пояса верхнего декаэдра (черной гранью) из-за крыла W_2 . Когда она движется по направлению вектора с началом в точке O_1 , который находится на треугольнике, состоящем из угла a_2 и векторов v_2, v_3 на рис. 7, она блокируется гранью нижнего пояса верхнего декаэдра из-за крыла W_1 . Когда белая грань движется по направлению вектора с началом в точке O_1 , который находится на треугольнике, состоящем из угла a_3 и векторов v_3, v_1 на рис. 7, несложно наблюдать, что она блокируется. Аналогично можно показать, что грань нижнего пояса верхнего декаэдра (черная грань) на рис. 7 блокируется, когда она движется по направлению вектора, который находится на ней.

Видно, что грани верхнего пояса нижнего декаэдра и грани нижнего пояса верхнего декаэдра заблокированы друг другом, когда одна из них движется на направлении вектора в себе. Из лемм 2, 3, 5 и 4 вытекает следующая теорема.

Теорема. Если все грани цепочки C_m декаэдров длины t неподвижны, кроме одной грани Π , то Π тоже неподвижна.

Пример цепочки C_4 из четырех декаэдров изображен на рис. 8. Бумажная модель цепочки C_2 из двух декаэдров изображена на рис. 9.



Рис. 8. Цепочка C_4 , которая состоит из четырех декаэдров.

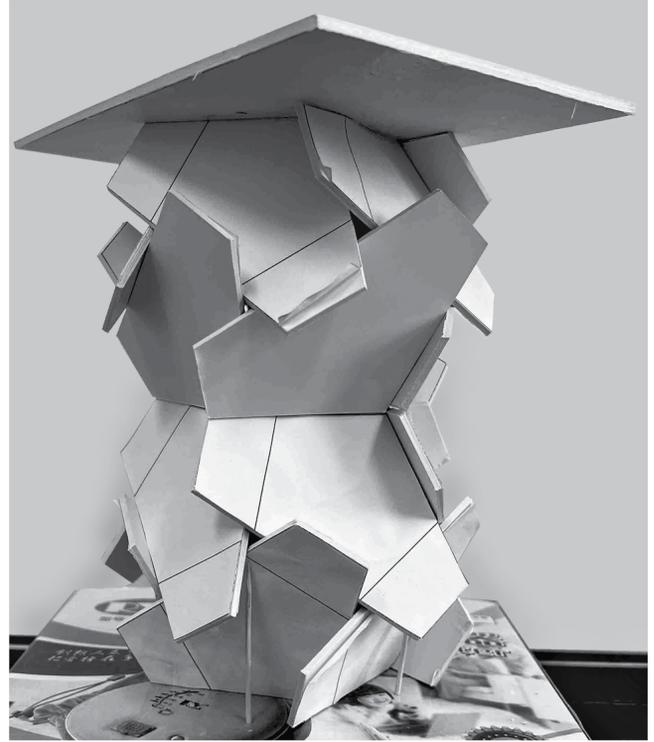


Рис. 9. Бумажная модель цепочки C_2 .

4. ОЖЕРЕЛЬЕ ИЗ ДЕКАЭДРОВ.
САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ

Ожерелье M_{2n} можно построить следующим образом. Рассмотрим пятиугольники на плоскости Oxy , образованные следующими пятерками точек P_1, P_2, P_3, P_4 :

$$P_1 = \left\{ \left(r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \right) \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_2 = \left\{ \left(\begin{array}{l} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_3 = \left\{ \left(\begin{array}{l} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_4 = \left\{ \left(\begin{array}{l} r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

где Y_0 – фиксированное неотрицательное число (которое можно подобрать достаточно малым так, чтобы свойство самозаклиненности сохранилось, но при этом получившуюся конструкцию можно было бы замкнуть в кольцо).

Декаэдр с номером k ожерелья M_{2n} построен вращением пятиугольников P_1, P_2, P_3 и P_4 на Oxy на углы $(3(k-1) + l) \cdot \frac{2\pi}{3n}$, $l = 0, 1, 2, 3$, вокруг оси Ox . Иными словами, вначале параллельно перенесем пятиугольники P_1, P_2, P_3 и P_4 вдоль оси Oy на плоскости Oxy и обозначим их $P'_{1,0}, P'_{2,0}, P'_{3,0}$ и $P'_{4,0}$. Образ вершин $P'_{i,0}$ при вращении плоскости Oxy на угол θ вокруг Ox обозначим $P'_{i,\theta}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Например, получившиеся вершины

$$P'_{1,0}, P'_{2, \frac{2\pi}{3n}}, P'_{3, \frac{4\pi}{3n}}, P'_{4, \frac{6\pi}{3n}}$$

являются вершинами первого декаэдра (см. рис. 7). Вершинами второго декаэдра являются

$$P'_{4, \frac{6\pi}{3n}}, P'_{3, \frac{8\pi}{3n}}, P'_{2, \frac{10\pi}{3n}}, P'_{1, \frac{12\pi}{3n}},$$

а точки $P'_{1, \frac{12\pi}{3n}}, P'_{2, \frac{14\pi}{3n}}, P'_{3, \frac{16\pi}{3n}}, P'_{4, \frac{18\pi}{3n}}$

являются вершинами третьего декаэдра, при этом процесс можно продолжать сколь угодно долго.

Обозначим через M_k матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) & -\sin\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) \\ 0 & \sin\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) & \cos\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) \end{pmatrix}.$$

Ожерелье M_{2n} состоит из $2n$ декаэдров ($20n$ граней) в пространстве \mathbb{R}^3 такое, что k -й декаэдр имеет вершины со следующими координатами:

$$M_k \times \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

$$M_k \times \begin{pmatrix} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

$$M_k \times \begin{pmatrix} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

и

$$M_k \times \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

для $j = 0, \dots, 4$, где Y_0 — зафиксированное отрицательное число и $r(k)$ — остаток k при делении на 2. Аналогично доказательству теоремы главы 3 можно доказать следующую теорему.

Теорема. Боковые грани ожерелья M_{2n} не могут двигаться.

Представляет интерес следующая

Задача. Оценить минимальное число декаэдров в ожерелье M_{2n} .

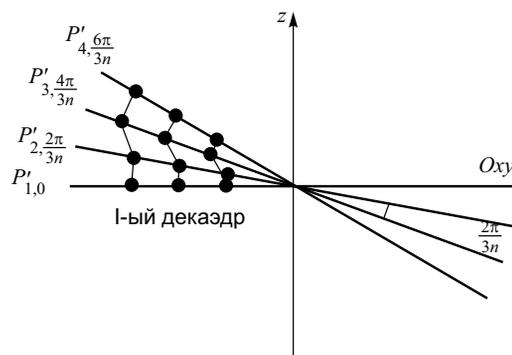


Рис. 10. Первый декаэдр ожерелья из n декаэдров.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393) и была поддержана грантом РНФ номер 22-1920073.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kanel-Belov A.J., Dyski A.V., Estrin Y., Pasternak E., Ivanov I.A. Interlocking of convex polyhedra: towards a geometric theory of fragmented solids. Moscow Mathematical Journal, 2010. arXiv:0812.5089v1.
2. Канель-Белов А.Я. Самозаклинивающиеся структуры // Квант. Физико-математический журнал для школьников и студентов. Январь–февраль 2009. Т. 1. С. 20–23.
3. Djumas L., Simon G.P., Estrin Y. et al. Deformation mechanics of non-planar topologically interlocked assemblies with structural hierarchy and varying geometry // Nature. Sci Rep 7. 2017. P. 11844. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-12147-3>
4. Khandelwal S., Siegmund T., Cipra R.J., Bolton J.S. Transverse Loading of Cellular Topologically Interlocked Materials // Int. J. Solids Struct. 2012. Vol. 49. No. 18. P. 2394–2403.
5. Khandelwal S., Cipra R.J., Bolton J.S., Siegmund T. Adaptive Mechanical Properties of Topologically Interlocking Material Systems // Smart Mater. Struct. 2015. Vol. 24. No. 4. P. 045037.
6. Feng Y., Siegmund T., Habtour E., Riddick J. Impact mechanics of topologically interlocked material assemblies // Intl. J. Impact Eng. 2015. Vol. 75. P. 140–149.
7. Siegmund T., Barthelat F., Cipra R.J., Habtour E., Riddick J. Manufacture and Mechanics of Topologically Interlocked Material Assemblies // Applied Mechanics Reviews. 2016. Vol. 68. No. 4. P. 041401–1.

8. *Mather A., Cipra R.J., Siegmund T.* Structural Integrity During Remanufacture of a Topologically Interlocked Material // *Int. J. Struct. Integr.* 2012. Vol. 3. No. 1. P. 61–78.
9. *Bayer J., Benz Müller C., Buzzard K., David M., Lampert L., Matiyasevich Y., Paulson L., Schleicher D., Stock B., Zelmanov E.* Mathematical proof between generations. arXiv:2207.04779.

TWO-DIMENSIONAL SELF-TRAPPING STRUCTURES IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

V.O. Manturov^{a,b,c}, A.Ya. Kanel-Belov^{a,d,e}, S. Kim^j, F.K. Nilov^{a,f}

^a*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

^b*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

^c*Northeastern University, Shenyang, China*

^d*Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel*

^e*Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia*

^f*Moscow State University, Moscow, Russia*

^j*Jilin University, Changchun, China*

Presented by Academician of the RAS A. L. Semenov

It is known that if a finite set of convex figures is present on the plane, whose interiors do not intersect, then among these figures there is at least one outermost figure – one that can be continuously moved “to infinity” (outside a large circle containing the other figures), while leaving all other figures stationary and not intersecting their interiors during the movement. It has been discovered that in three-dimensional space, there exists a phenomenon of self-trapping structures. A self-trapping structure is a finite (or infinite) set of convex bodies with non-intersecting interiors, such that if all but one body is fixed, that body cannot be “carried to infinity”. Since ancient times, existing structures have been based on the consideration of layers made of cubes, tetrahedra, and octahedra, as well as their variations. In this work, we consider a fundamentally new phenomenon of two-dimensional self-trapping structures: a set of two-dimensional polygons in three-dimensional space, where each polygonal tile cannot be carried to infinity. Thin tiles are used to assemble self-trapping decahedra, from which second-order structures are then formed. In particular, a construction of a column composed of decahedra is presented, which is stable when fixing two outermost decahedra, rather than the entire boundary of the layer, as in previously investigated structures.

Keywords: self-trapping structure