

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК С АКСИОМОЙ МАККИНСИ

© 2024 г. А. В. Кудинов^{1,*}

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым

Поступило 15.05.2023 г.

После доработки 01.11.2023 г.

Принято к публикации 27.11.2023 г.

В работе рассматривается топологическое произведение модальных логик $S4.1$ и $S4$ и доказывается, что оно равно соединению этих логик плюс одна аксиома специального вида. В работе также доказывается разрешимость этого произведения. Это первый из известных примеров логик, топологическое произведение которых находится строго между соединением и расширяющимся произведением самих логик.

Ключевые слова: модальная логика, топологическая семантика, произведение модальных логик, аксиома Маккинси

DOI: 10.31857/S2686954324010138, **EDN:** ZTBQES

1. ВВЕДЕНИЕ

Топологические произведения модальных логик были введены в 2006 г. в работе Й. ван Бентема с соавторами [14]. Топологическое произведение модальных логик L_1 и L_2 , содержащих $S4$, определяются семантически как модальная логика класса произведений пространств соответствующих логик. Заметим, что произведение топологических пространств, определенное в [14], отличается от произведения, известного нам из топологии. Чтобы различать эти два понятия, мы будем называть конструкцию ван Бентема *битопологическим произведением*, т.к. в результате получается пространство с двумя топологиями. В [14] было доказано, что топологическое произведение $S4 \times_i S4$ совпадает с соединением логик $S4 * S4$, также была доказана полнота относительно битопологического произведения $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Ф. Кремер в [9] доказал, что топологическое произведение логик $S4$ на $S5$ совпадает с полукоммутатором этих логик:

$$[S4, S5]^{EX} = S4 * S5 + \Box_1 \Box_2 p \rightarrow \rightarrow \Box_2 \Box_1 p + \Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow \Box_2 \Diamond_1 p.$$

По известному результату о полноте для расширяющихся произведений шкал Крипке [6, § 9.1] эта логика совпадает с расширяющимся произведением этих логик $(S4 \times S5)^{EX}$.

В работе Кремера [9] доказывается, что топологическое произведение двух модальных логик L_1 и L_2 должно содержаться между их соединением $L_1 * L_2$ и произведением $L_1 \times L_2$. На момент публикации известно топологическое произведение логик, равное соединению, а именно $S4 \times_i S4$ (см. [13]). Также известно топологическое произведение, равное обычному произведению ($S5 \times_i S5$, см. [9]) и расширяющемуся произведению ($S4 \times_i S5$, см. [9]). Другие топологические произведения модальных логик, расширяющих $S4$, до сих пор были неизвестны.

В данной работе мы рассматриваем топологическое произведение логик $S4.1$ и $S4$ и доказываем, что оно равно $S4.1 * S4 + \Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$ и находится строго между соединением логик $S4.1 * S4$ и расширяющимся произведением этих логик. Данное произведение является первым таким примером.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим модальные формулы по индукции. Пусть $PROP$ — счетное множество пропозицио-

¹Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: kudinov.andrey@gmail.com

нальных переменных. Дадим определение в форме Бэкуса–Наура:

$$A ::= p \mid \perp \mid (A \rightarrow A) \mid \Box_i A,$$

где $p \in \text{PROP}$ — пропозициональная переменная, а $\Box_i$ — модальный оператор ($i = 1, \dots, N$). Остальные логические связки понимаются как сокращения и выражаются через $\rightarrow$ и $\perp$, а модальность $\Diamond_i$ понимается как $\neg \Box_i \neg$. В этой статье мы будем рассматривать языки с $N \in \{1, 2\}$. Когда модальность одна, мы будем опускать индекс.

Определение 2.1. (Нормальная) модальная логика — это множество модальных формул, замкнутое относительно правил $\text{Sub} \left(\frac{A(p)}{A(B)} \right)$, $\text{Modus Ponens} \left(\frac{A, A \rightarrow B}{B} \right)$ и $\text{Nec} \left(\frac{A}{\Box_i A} \right)$, содержащее все классические тавтологии и аксиомы нормальности:

$$\Box_i(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box_i p \rightarrow \Box_i q).$$

Минимальная модальная логика с N модальностями обозначается K_N , также будем писать K вместо K_1 .

Пусть L — логика, а Γ — множество формул. Тогда $L + \Gamma$ обозначает минимальную логику, содержащую L и Γ . Если $\Gamma = \{A\}$, то будем писать $L + A$ вместо $L + \{A\}$.

Определение 2.2. Пусть L_1 и L_2 — две модальные логики с одной модальностью (унимодальные логики). Тогда соединением этих логик будем называть

$$L_1 * L_2 = K_2 + L'_1 + L'_2;$$

где L'_i — это множество всех формул из L_i , в которых $\Box$ заменили на $\Box_i$.

Определим модальную логику $S4$ стандартным образом:

$$S4 = K + \Box p \rightarrow p + \Box p \rightarrow \Box \Box p.$$

Определение 2.3. N -шкалой Крипке называется кортеж $F = (W, R_1, \dots, R_N)$, где $W \neq \emptyset$ — множество, элементы которого называются возможными мирами, или точками, $R_1, \dots, R_N \subseteq W \times W$ — отношения достижимости.

Определение 2.4. Оценкой на шкале Крипке $F = (W, R_1, \dots, R_N)$ называется функция

$V : \text{PROP} \rightarrow \mathcal{P}(W)$, где $\mathcal{P}(W)$ — множество всех подмножеств множества W . Моделью Крипке называется пара $M = (F, V)$. Отношение истинности $\models$ в точке определяется рекурсивно:

$$M, x \models p \Leftrightarrow x \in V(p), \text{ для } p \in \text{PROP};$$

$$M, x \not\models \perp;$$

$$M, x \models A \rightarrow B \Leftrightarrow (M, x \models A \Rightarrow M, x \models B);$$

$$M, x \models \Box_i A \Leftrightarrow \forall y(xR_i y \Rightarrow M, y \models A).$$

Формула A общезначима в шкале F , если $\forall V \forall x \in W (F, V, x \models A)$ (обозначение: $F \models A$).

Определение 2.5. Пусть $X \neq \emptyset$. Топологией на X будем называть множество T подмножеств X , удовлетворяющее следующим условиям:

- $\emptyset, X \in T$;
- если $U_1, U_2 \in T$, то $U_1 \cap U_2 \in T$;
- если $S \subseteq T$, то $\bigcup S \in T$.

Топологическим пространством будем называть пару (X, T) . Элементы T называются открытыми множествами.

Базой топологии называется такое семейство открытых множеств B , что любое открытое множество равно объединению элементов B .

Битопологическим пространством мы будем называть тройку (X, T_1, T_2) , где T_1 и T_2 — топологии на X .

Определение 2.6. Пусть $\mathfrak{X} = (X, T)$ — топологическое пространство. Оценкой на $\mathfrak{X}$ называется функция $V : \text{PROP} \rightarrow \mathcal{P}(W)$. Пара $M = (\mathfrak{X}, V)$ называется топологической моделью. Истинность определяется по индукции аналогично истинности в модели Крипке. Определение отличается только последним пунктом:

$$M, x \models \Box A \Leftrightarrow \exists U \in T (x \in U \& \forall y \in U (M, y \models A)).$$

Это определение естественным образом обобщается на язык с двумя модальностями, модели в этом случае строятся на основе битопологических пространств.

Формула A общезначима в пространстве $\mathfrak{X}$, если $\forall V \forall x \in X (\mathfrak{X}, V, x \models A)$ (обозначение: $\mathfrak{X} \models A$).

Пусть $\mathcal{C}$ — класс топологических пространств (шкал Крипке). Логикой $\mathcal{C}$ называется множество формул

$$\text{Log}(C) = \{A \mid \forall S \in C (S \models A)\}.$$

Для одноэлементного C будем опускать фигурные скобки (и писать, напр., $\text{Log}(\mathfrak{X})$).

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке и $F \models S4$ (что эквивалентно тому, что R рефлексивно и транзитивно, см. [15, §4.2]). Определим топологическое пространство $\text{Top}(F) = (W, T_R)$, где T_R — топология с базой $\{R(x) \mid x \in W\}$.

Определение 2.7. Функция $f : W \rightarrow U$ называется *р-морфизмом* шкалы $F = (W, R_1, \dots, R_N)$ на $G = (U, S_1, \dots, S_N)$, если:

- 1) f является сюръекцией;
- 2) $xR_i y \Rightarrow f(x)S_i f(y)$ (монотонность);
- 3) $f(x)S_i u \Rightarrow \exists y(f(y) = u \ \& \ xR_i y)$ (поднятие).

Обозначение: $f : F \rightarrow G$.

Следующая теорема хорошо известна (см. [5]).

Теорема 2.1 (о р-морфизме). Пусть $F \rightarrow G$. Тогда $\text{Log}(F) \subseteq \text{Log}(G)$.

Для рефлексивной и транзитивной шкалы Крипке F можно считать, что $\text{Log}(F) = \text{Log}(\text{Top}(F))$. Для произвольной шкалы $\text{Log}(F)$ обозначает множество всех общезначимых в F формул.

Определение 2.8. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — топологические пространства. Тогда функция $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ называется *открытой* (непрерывной), если образ (прообраз) любого открытого множества открыт.

Аналогом р-морфизма для топологических пространств является сюръективное открытое и

непрерывное отображение. Для таких отображений верен аналог теоремы 2.1 (см., напр., [7]):

Теорема 2.2 (о топологическом р-морфизме). Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — два топологических пространства, и $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ — сюръективное открытое непрерывное отображение. Тогда $\text{Log}(\mathfrak{X}) \subseteq \text{Log}(\mathfrak{Y})$.

Такие отображения мы тоже будем называть *р-морфизмами*. Путаницы при этом не возникнет, т.к. имеет место

Лемма 2.3. Для двух шкал Крипке $F_i = (W_i, R_i)$, где R_i рефлексивно и транзитивно ($i = 1, 2$), сюръективная функция $f : W_1 \rightarrow W_2$ является р-морфизмом тогда и только тогда, когда f непрерывна и открыта относительно топологий T_{R_1} и T_{R_2} .

Доказательство довольно простое, поэтому мы оставим его читателю.

Определение 2.9. Пусть $F = (W, R_1, R_2)$ — шкала Крипке и R_1 и R_2 рефлексивны и транзитивны. Определим битопологическое пространство $\text{Top}_2(F) = (W, T_{R_1}, T_{R_2})$.

Определение 2.10 ([14]). Пусть $\mathfrak{X}_1 = (X_1, T_1)$ и $\mathfrak{X}_2 = (X_2, T_2)$ — два топологических пространства. Определим битопологическое произведение этих пространств как битопологическое пространство $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 = (X_1 \times X_2, T_1^h, T_2^v)$, где топология T_1^h имеет базу $\{U \times \{x_2\} \mid U \in T_1 \ \& \ x_2 \in X_2\}$, а топология T_2^v — базу $\{\{x_1\} \times U \mid x_1 \in X_1 \ \& \ U \in T_2\}$. Топологию T_1^h мы будем называть горизонтальной, а T_2^v — вертикальной.

Топологическим произведением двух модальных логик L_1 и L_2 будем называть следующую логику в языке с двумя модальностями:

$$L_1 \times_t L_2 = \text{Log}(\{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \mid \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \text{ — топологические пространства, } \mathfrak{X}_1 \models L_1, \mathfrak{X}_2 \models L_2\}).$$

Теорема 2.4 ([13]). $S4 \times_t S4 = S4 * S4$.

3. АКСИОМА МАККИНСИ

Формула $A1 = \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ известна в литературе как аксиома Маккинси. Она была достаточно подробно изучена в контексте семантики Крипке. В работе [8] было доказано, что эта аксиома неканонична¹. Также она изучалась и в контексте топологической семантики (см., например, [13, 3, 2]).

Лемма 3.1. В транзитивной шкале Крипке $F = (W, R)$ общезначимость формулы $A1$ эквивалентна следующему первопорядковому условию:

$$\forall w \in W \exists u \in W (wRu \ \& \ R(u) = \{u\}),$$

где $R(u) = \{t \mid uRt\}$.

Доказательство можно найти в [5].

Определение 3.1. В топологическом пространстве точка x называется *изолированной*, если множество $\{x\}$ открыто.

¹ Определение каноничности дано в начале секции 4.

Пространство $\mathfrak{X}$ называется *слабо разреженным*², если множество всех изолированных точек плотно в $\mathfrak{X}$, т.е. если любое открытое подмножество содержит некоторую изолированную точку.

Теорема 3.2 ([7]). *S4.1 является логикой класса всех слабо разреженных пространств.*

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — два топологических пространства, причем $\mathfrak{X}_1$ является слабо разреженным. Тогда*

$$\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \models \Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p).$$

Доказательство. Возьмем точку $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ и ее открытую горизонтальную окрестность $U \times \{y\}$, где $U \in T_1$ и $\mathfrak{X}_1 = (X_1, T_1)$. Так как $\mathfrak{X}_1$ — слабо разреженное, то множество U содержит изолированную (в $\mathfrak{X}_1$) точку x' .

Тогда для любой $y' \in \mathfrak{X}_2$ точка $\langle x', y' \rangle$ является изолированной в горизонтальной топологии и, следовательно, $\langle x', y' \rangle \models \Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p$. А значит, $\langle x', y' \rangle \models \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$. И $\langle x, y \rangle \models \Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$.

Лемма 3.4. *Для любой S4.1 * S4 -шкалы Крипке $F = (W, R_1, R_2)$ верно*

$$F \models \Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p) \Leftrightarrow \forall x \exists y (x R_1 y \ \& \ \forall z (y R_2 z \Rightarrow R_1(z) = \{z\})).$$

Доказательство данной леммы легко получить, изменив немного доказательство леммы 3.1. Детали мы оставляем читателю.

Лемма 3.5. $\Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p) \notin S4.1 * S4$.

Для доказательства этой леммы достаточно предъявить шкалу логики $S4.1 * S4$, в которой опровергается эта формула. Такая шкала изображена на рис. 1.

Следствие 3.6. $S4.1 \times S4 \neq S4.1 * S4$.

Лемма 3.7. $\Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p) \in (S4.1 \times S4)^{EX}$.

Доказательство этой леммы мы тоже оставляем читателю.

4. ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ И РАЗРЕШИМОСТИ

Конструкция канонической модели хорошо известна и часто применяется для доказательства полноты по Крипке. Модальная логика называется канонической, если все ее формулы общезначимы в ее канонической шкале. Кано-

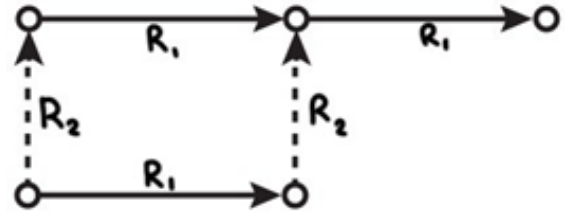


Рис. 1. S4.1 * S4-шкала, опровергающая $\Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$.

ническая шкала любой логики опровергает все формулы, не содержащиеся в этой логике. Таким образом, канонические логики полны по Крипке. Детали можно найти в [5, 4, 15].

Обозначим:

$$L = S4.1 * S4 + \Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p).$$

Теорема 4.1. *Логика L является канонической и, как следствие, полной по Крипке.*

Действительно, логика $S4.1 * S4$ каноническая, т.к. все аксиомы этой логики каноничны. Каноничность аксиомы $\Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$ можно доказать, немного изменив доказательство каноничности аксиомы Маккинси, изложенное в [5, Th. 5.21]). Детали доказательства несложно восстановить.

Логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она является логикой некоторого класса конечных шкал Крипке.

Теорема 4.2 (Харрон, см. [5, § 16.2]). *Финитно аппроксимируемая и конечно аксиоматизируемая логика разрешима.*

Теорема 4.3. *L финитно аппроксимируема и разрешима.*

Доказательство. Финитную аппроксимируемость мы будем доказывать с помощью фильтрации с предварительным разбиением. Подробно этот метод изложен в [10]. Пусть дана формула A и модель $M = (F, V)$ такая, что $F \models L$, $M \not\models A$ и $F = (W, R_1, R_2)$. Зададим разбиение W на два подмножества: $W = W_1 \sqcup W_2$, где W_1 — множество всех R_1 -максимальных точек, а $W_2 = W \setminus W_1$. Определим отношение $\sim$:

$$x \equiv_A y \Leftrightarrow \forall B (B \text{ подформула формулы}$$

$$A \text{ и } (M, x \models B \Leftrightarrow M, y \models B));$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv_A y \text{ и } \exists i \in \{1, 2\} (x, y \in W_i).$$

² Англ. weakly scattered.

Пусть $M' = (F', V')$ является транзитивной фильтрацией модели M по отношению $\sim$. Легко проверить, что R_1 -максимальные точки сохраняются при такой фильтрации и, следовательно, $F' \models L$. По лемме о фильтрации (см. [10]) мы имеем $M' \not\models A$, причем M' — конечна. Финитная аппроксимируемость доказана. $\square$

Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 4.4. $S4.1 \times_f S4 = L$.

Обозначим через $\mathbb{T}_{2,2}$ бесконечное транзитивное $(2,2)$ -дерево с двумя отношениями: $\mathbb{T}_{2,2} = (T_{2,2}, R_1, R_2)$, где $T_{2,2} = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}^*$ — множество конечных слов в четырехбуквенном алфавите. Для любых двух слов $\bar{a}, \bar{b} \in T_{2,2}$

$\bar{a} R_1 \bar{b} \Leftrightarrow$ найдется $\bar{c} \in \{a_1, a_2\}^*$, такое что $\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c}$;

$\bar{a} R_2 \bar{b} \Leftrightarrow$ найдется $\bar{d} \in \{b_1, b_2\}^*$, такое что $\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{d}$.

Здесь и дальше точкой $\cdot$ мы обозначаем операцию конкатенации слов.

Обозначим через $\mathbb{T}_{2,2+2} = (W, R_1', R_2')$ шкалу Крипке, получающуюся из $\mathbb{T}_{2,2}$ “приклеиванием” к каждой точке по копии бесконечного бинарного дерева $\mathbb{T}_2 = (T_2, \sqsubseteq)$, где $T_2 = \{1, 2\}^*$, $\sqsubseteq$ — отношение “быть префиксом”. Через ε будем обозначать пустое слово, которое является корнем дерева $\mathbb{T}_2$. Сами копии “приклеиваются” по отношению R_1' , а внутри этих деревьев точки достижимы по отношению R_2' . Точное определение выглядит так:

1. $W = T_{2,2} \times \{\mathbb{R}\} \cup T_{2,2} \times T_2$, где $\mathbb{R}$ — специальный новый символ;

2. $\bar{a} R_1' \bar{a}' \Rightarrow \langle \bar{a}, \mathbb{R} \rangle R_1' \langle \bar{a}', \mathbb{R} \rangle$;

3. $\langle \bar{a}, \mathbb{R} \rangle R_1' \langle \bar{a}, \varepsilon \rangle$ для любого $\bar{a}$;

4. R_1' — минимальное рефлексивное и транзитивное отношение, удовлетворяющее пунктам 2 и 3;

5. $\bar{a} R_2' \bar{a}' \Rightarrow \langle \bar{a}, \mathbb{R} \rangle R_2' \langle \bar{a}', \mathbb{R} \rangle$;

6. $\bar{a} = \bar{a}'$, $\bar{b} \sqsubseteq \bar{b}'$ и $\bar{b}, \bar{b}' \in T_2 \Rightarrow \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle R_2' \langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle$,

7. R_2' — минимальное рефлексивное и транзитивное отношение, удовлетворяющее пунктам 5 и 6.

Из данного определения следует

Лемма 4.5. Следующие утверждения верны:

$$R_1'(\langle \bar{a}, \mathbb{R} \rangle) = R_1(\bar{a}) \times \{\mathbb{R}, \varepsilon\};$$

$$R_1'(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle) = \{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle\}, \text{ для } \bar{b} \in T_2;$$

$$R_2'(\langle \bar{a}, \mathbb{R} \rangle) = R_2(\bar{a}) \times \{\mathbb{R}\};$$

$$R_2'(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle) = \{\bar{a}\} \times \sqsubseteq(\bar{b}), \text{ для } \bar{b} \in T_2.$$

Лемма 4.6. $\text{Log}(\mathbb{T}_{2,2+2}) = L$.

Доказательство. Легко проверить, что $\mathbb{T}_{2,2+2} \models L$.

Пусть $A \notin L$. Логика L финитно аппроксимируема, а значит, существует конечная шкала F , для которой $F \models L$ и $F \not\models A$. Достаточно показать, что $\mathbb{T}_{2,2+2} \Rightarrow F$.

В [13] описан r -морфизм $f : \mathbb{T}_{2,2} \rightarrow F$.

По лемме 3.4 для каждой точки $w \in F$ существует $\mu(w) \in R_1(w)$ такая, что все $u \in R_2(\mu(w))$ R_1 -максимальны. Для каждой w зафиксируем r -морфизм $h_w : \mathbb{T}_2 \rightarrow (R_2(\mu(w)), R_2|_{R_2(\mu(w))})$. Определим $g : \mathbb{T}_{2,2+2} \rightarrow F$:

$$g(\langle \bar{a}, \mathbb{R} \rangle) = f(\bar{a});$$

$$g(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle) = h_{f(\bar{a})}(\bar{b}).$$

Проверим, что g является r -морфизмом.

Сюръективность g следует из сюръективности f . Монотонность следует из монотонности f и h_w , а также транзитивности всех отношений. Поднятие тоже следует из того, что f и h_w обладают этим свойством, достаточно рассмотреть два случая: $x = \langle \bar{a}, \mathbb{R} \rangle$ и $x = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.4, нам нужно построить слабо разреженное пространство $\mathfrak{X}$ и пространство $\mathcal{Y}$ такие, что существует открытая и непрерывная сюръекция $f : \mathfrak{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \text{Top}_2(\mathbb{T}_{2,2+2})$. Для этого нам понадобятся несколько новых понятий.

Определение 4.1. Путь с остановками на $\mathbb{T}_2 = (\{1, 2\}^*, \sqsubseteq)$ — это кортеж (или слово) $x_1 \dots x_n$, где $x_i \in \{0, 1, 2\}$. Определим рекурсивно функцию f_F на множестве всех путей с остановками:

- $f_F(\varepsilon) = \varepsilon$;
- $f_F(\bar{a}0) = f_F(\bar{a})$;
- $f_F(\bar{a}1) = f_F(\bar{a})1$;
- $f_F(\bar{a}2) = f_F(\bar{a})2$.

Определение 4.2. Псевдобесконечным путем (с остановками) на $\mathbb{T}_2$ будем называть бес-

конечную последовательность 0, 1 и 2, в которой только конечное число отличных от 0 чисел. Бесконечные последовательности нулей будем обозначать 0^ω . Говорим, что α — псевдобесконечный путь, если $\alpha = \bar{a}0^\omega$ для некоторого $\bar{a} \in \{0, 1, 2\}^*$. Пусть W_ω — множество всех псевдобесконечных путей на T_2 . Определим функции $st : W_\omega \rightarrow \mathbb{N}$ и $f_\omega : W_\omega \rightarrow T_2$. Пусть $\alpha = x_1 \dots x_n \dots \in W_\omega$. Тогда

$$st(\alpha) = \min\{N \mid \forall k > N (a_k = 0)\};$$

$$\alpha \lceil_k = x_1 \dots x_k;$$

$$f_\omega(\alpha) = f_F(\alpha \lceil_{st(\alpha)});$$

$$U_k(\alpha) = \{\beta \in W_\omega \mid \alpha \lceil_k = \beta \lceil_k \text{ \& } f_F(\alpha \lceil_k) R f_\omega(\beta)\},$$

$$\text{где } \alpha \in W_\omega, k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 4.7. Семейство $B = \{U_k(\alpha) \mid \alpha \in W_\omega, k > 0\}$ образуют базу некоторой топологии.

Доказательство. Заметим, что для произвольных $\alpha, \beta \in W_\omega$ и $0 < k \leq m$ верно ровно одно из двух условий:

1. $U_k(\alpha) \cap U_m(\beta) = \emptyset$;
2. $U_k(\alpha) \subseteq U_m(\beta)$.

Значит, B замкнуто относительно пересечений и является базой топологии. $\square$

Топологию с такой базой назовем T_ω и определим $\mathcal{Y} = (W_\omega, T_\omega)$.

Зададим функцию $g : W_\omega \times W_\omega \rightarrow T_{2,2}$. Пусть $\alpha = x_1 x_2 \dots \in W_\omega$ и $\beta = y_1 y_2 \dots \in W_\omega$. Напомним, что $T_{2,2} = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}^*$. Для удобства будем считать, что $a_0 = b_0 = 0$.

$$g(\alpha, \beta) = f'_\omega(a_{x_1} b_{x_1} a_{x_2} b_{x_2} \dots),$$

где f'_ω — функция, стирающая нули, аналогичная f_ω , только на множестве бесконечных последовательностей символов из множества $\{0, a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Поскольку α и β заканчиваются на хвосты из нулей, то в результате будут получаться конечные слова, т.е. элементы $T_{2,2}$.

Предложение 4.8 ([10]). **Функция** $g : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \text{Top}_2(T_{2,2})$ — p -морфизм.

Введем обозначение: $\mathbb{N}_{\geq n} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$.

Определим $\mathfrak{X} = (X, T)$ следующим образом:

$$X = W_\omega \times \mathbb{N},$$

$$U'_k(\alpha, 0) = (U_k(\alpha) \times \{0\}) \cup (U_k(\alpha) \times \mathbb{N}_{\geq k}),$$

$$U'_k(\alpha, n) = \{\langle \alpha, n \rangle\}, \text{ где } n \geq 1.$$

Множества $U'_k(\alpha, n)$ образуют базу топологии T . Для проверки корректности достаточно убедиться, что множества вида $U'_k(\alpha, n)$ либо не пересекаются, либо содержатся друг в друге.

Точки вида $\langle \alpha, n \rangle$ ($n \geq 1$) являются изолированными, а значит, любой элемент базы содержит изолированные точки. Из этого следует

Лемма 4.9. Пространство $\mathfrak{X}$ слабо разрезенно и $\mathfrak{X} \models A1$.

Лемма 4.10. $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \text{Top}_2(T_{2,2+2})$.

Доказательство. Для построения нужного p -морфизма мы будем использовать p -морфизм $g : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \text{Top}_2(T_{2,2})$ из предложения 4.8.

Определим функцию $f : \mathfrak{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow T_{2,2+2}$:

$$f(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta) = \langle g(\alpha, \beta), \otimes \rangle;$$

$$f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) = \langle g(\alpha \lceil_n \cdot 0^\omega, \beta \lceil_n \cdot 0^\omega), f_\omega(\gamma) \rangle, \text{ где } \beta = \beta \lceil_n \cdot \gamma.$$

Сюръективность f следует из сюръективности g и f_ω .

Проверим, что f открыто и непрерывно.

(T_1^h -открытость.) Рассмотрим горизонтальную окрестность $U'_k(\alpha, 0) \times \{\beta\}$ точки $(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta)$. Можно считать, что $k \geq \max(st(\alpha), st(\beta))$, т.к. любое множество вида $U'_k(\alpha, 0)$ можно представить как объединение таких же множеств, но с большим k . Образ этой окрестности равен

$$\begin{aligned} & f(U'_k(\alpha, 0) \times \{\beta\}) = \\ &= f\left((U_k(\alpha) \times \{0\}) \times \{\beta\} \cup \right. \\ & \quad \left. \cup (U_k(\alpha) \times \mathbb{N}_{\geq k}) \times \{\beta\}\right) = \\ & f((U_k(\alpha) \times \{0\}) \times \{\beta\}) \cup \\ & \quad \cup f((U_k(\alpha) \times \mathbb{N}_{\geq k}) \times \{\beta\}) = \\ & g(U_k(\alpha) \times \{\beta\}) \times \{\otimes, \varepsilon\} \end{aligned}$$

Последнее равенство верно, т.к. если $\beta = x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots$ и $n \geq k$, то

$$\begin{aligned} & f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) = \\ & \langle g(\alpha \lceil_n \cdot 0^\omega, \beta \lceil_n \cdot 0^\omega), f_\omega(x_{n+1} x_{n+2} \dots) \rangle = \\ &= \langle g(\alpha, \beta), f_\omega(0^\omega) \rangle = \langle g(\alpha, \beta), \varepsilon \rangle. \end{aligned}$$

Точка $\langle g(\alpha, \beta), \varepsilon \rangle$ является T_1^h -изолированной, а значит, соответствующее одноэлементное множество открыто в горизонтальной топологии.

Множество $g(U_k(\alpha) \times \{\beta\}) \times \{\otimes, \varepsilon\}$ открыто, т.к. функция g открыта.

Рассмотрим точку $(\langle \alpha, k \rangle, \beta)$ для $k > 0$. Эта точка изолирована в горизонтальной топологии. Легко проверить, что ее образ при отображении f будет тоже изолированной точкой.

(T_1^h -непрерывность.) Для $n > 0$ точки $(\langle \alpha, n \rangle, \beta)$ и $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta)$ являются изолированными в соответствующих горизонтальных топологиях.

Рассмотрим случай $n = 0$. У образа точки $f(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta) = \langle g(\alpha, \beta), \otimes \rangle$ минимальная окрестность будет равна

$$R_1(\langle g(\alpha, \beta), \otimes \rangle) = R_1(g(\alpha, \beta)) \times \{\otimes, \varepsilon\}.$$

Нужно проверить, что прообраз этой окрестности будет открыт в горизонтальной топологии пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Для этого убедимся, что любая точка попадает в этот прообраз с некоторой своей окрестностью.

Пусть $f(\langle \gamma, k \rangle, \delta) = \langle g(\alpha, \beta), \varepsilon \rangle$. Это возможно, только если $k > 0$, и в этом случае точка $\langle \gamma, k \rangle, \delta \rangle$ сама является изолированной в T_1^h .

Пусть теперь

$$f(\langle \gamma, k \rangle, \delta) \in R_1(g(\alpha, \beta)) \times \{\otimes\}.$$

Тогда $k = 0$ и $g(\gamma, \delta) \in R_1(g(\alpha, \beta))$. Благодаря непрерывности g существует окрестность $U_l(\gamma) \times \{\delta\}$, g -образ которой лежит в $R_1(g(\alpha, \beta))$. Следовательно, f -образ окрестности $U'_m(\gamma, 0) \times \{\delta\}$, где $m = \max(k, l) = l$, лежит целиком в $R_1(g(\gamma, \delta)) \times \{\otimes, \varepsilon\} \subseteq R_1(g(\alpha, \beta)) \times \{\otimes, \varepsilon\}$.

(T_2^v -открытость.) Рассмотрим T_2^v -окрестность точки $(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta)$:

$$\{\langle \alpha, 0 \rangle\} \times U_k(\beta).$$

Ее образ равен

$$\begin{aligned} f(\{\langle \alpha, 0 \rangle\} \times U_k(\beta)) &= \{(\alpha, \beta'), \otimes | \beta' \in U_k(\beta)\} = \\ &= g(\{\alpha\} \times U_k(\beta)) \times \{\otimes\}. \end{aligned}$$

И это вертикально открытое множество, т.к. g — р-морфизм.

Пусть $n > 0$. Рассмотрим $\{\langle \alpha, n \rangle\} \times U_k(\beta)$ — вертикальную окрестность точки $(\langle \alpha, n \rangle, \beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\{\langle \alpha, n \rangle\} \times U_k(\beta)) &= \\ &= \{(\alpha \upharpoonright_n 0^\omega, \beta' \upharpoonright_n 0^\omega), f_\omega(\gamma) | \beta' \in U_k(\beta), \beta' = \beta' \upharpoonright_n \cdot \gamma\} = \\ &= \bigcup_{\beta' \in U_k(\beta)} \{(\alpha \upharpoonright_n 0^\omega, \beta' \upharpoonright_n 0^\omega), f_\omega(\gamma) | \beta' = \beta' \upharpoonright_n \cdot \gamma\}. \end{aligned}$$

Поскольку $U_k(\cdot)$ представляются в виде объединений окрестностей с большим k , достаточно доказать вертикальную открытость для достаточно большого k . Возьмем $k > \max(n, st(\alpha))$. В этом случае $\alpha \upharpoonright_k 0^\omega = \alpha$. Тогда это множество примет вид

$$\begin{aligned} \{(\alpha, \beta' \upharpoonright_n 0^\omega), f_\omega(\gamma) | \beta' \in U_k(\beta), \beta' = \beta' \upharpoonright_n \cdot \gamma\} = \\ = R'_2(f(\langle \alpha, k \rangle, \beta)). \end{aligned}$$

Действительно, пусть $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, где $\vec{a} = g(\alpha, \beta \upharpoonright_n 0^\omega)$ и $\vec{b} = f_\omega(\gamma)$, $\beta = \beta \upharpoonright_n \gamma$.

$$R'_2(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle) = \{\langle \vec{a}, \vec{b} \cdot \vec{c} \rangle | \vec{c} \in T_2\}.$$

Тогда для $\beta' = \beta \upharpoonright_n \vec{c} \cdot 0^\omega$ будет верно, что $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta') = \langle \vec{a}, \vec{b} \cdot \vec{c} \rangle$. И обратно, для любого γ $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta \upharpoonright_k \gamma) = \langle \vec{a}, \vec{b} \cdot f_\omega(\gamma) \rangle \in R'_2(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)$.

(T_2^v -непрерывность.) Покажем, что $f^{-1}(R'_2(f(\langle \alpha, n \rangle, \beta)))$ вертикально открыто. Пусть $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ и $f(\langle \alpha', m \rangle, \beta') \in R'_2(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)$. Тогда

$$f(\langle \alpha', m \rangle, \beta') = \langle \vec{a}, \vec{b} \cdot \vec{c} \rangle,$$

$$g(\alpha' \upharpoonright_m 0^\omega, \beta' \upharpoonright_m 0^\omega) = g(\alpha \upharpoonright_n 0^\omega, \beta \upharpoonright_n 0^\omega) = \vec{a} \in T_{2,2},$$

$$\begin{aligned} f_\omega(\gamma') = \vec{b} \cdot \vec{c} \text{ и } f_\omega(\gamma) = \vec{b}, \text{ где } \beta' = \\ = \beta' \upharpoonright_m \gamma' \text{ и } \beta = \beta \upharpoonright_n \gamma. \end{aligned}$$

Возьмем $k > \max(m, n, st(\alpha'), st(\beta'))$. Тогда окрестность $\{\alpha'\} \times U_k(\beta')$ при отображении f целиком переходит внутрь $R'_2(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)$.

Из леммы 4.9, леммы 4.10 и теоремы 2.1 следует теорема 4.4.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы находимся только в начале пути по исследованию топологических и окрестностных произведений. Последние являются обобщением первых для случая произвольных модальных логик. Пока решены только самые простые задачи. Дальнейшее исследование может включать следующие цели.

1. Найти логики $S4.1 \times_t S4.1$, $S4.2 \times_t S4$, $S4.2 \times_t S4.1$ и $S4.2 \times_t S4.2$.

2. Найти достаточные условия того, что топологическое произведение логик совпадает с соединением (расширяющимся произведением, коммутатором) соответствующих логик.

3. Интерпретируя модальность $\diamond$ с помощью оператора взятия производного множества на топологических пространствах, можно получить полноту для логик слабее $S4$ (см. [1]). В работах [12, 11] было доказано, что $D4 \times_i D4 = D4 * D4$ и $K4 \times_i K4 = K4 * K4 + \Delta$, где Δ — множество замкнутых формул специального вида. И в этом контексте можно изучить произведения расширений логик $D4$ и $K4$ аксиомами $A1$ и $A2$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа была поддержана грантом РФФИ (проект № 21-11-00318).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bezhanishvili G., Esakia L., Gabelaia D.* Some results on modal axiomatization and definability for topological spaces // *Studia Logica*. 2005. Vol. 81 (3). P. 325–355.
2. *Bezhanishvili G., Gabelaia D., Lucero-Bryan J.* Modal logics of metric spaces // *The Review of Symbolic Logic*. 2015. Vol. 8 (1). P. 178–191.
3. *Bezhanishvili G., Harding J.* Modal logics of Stone spaces // *Order*. 2012. Vol. 29 (2). P. 271–292.
4. *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2002.
5. *Chagrova A., Zakharyashev M.* *Modal Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
6. *Gabbay D.M., Kurucz A., Wolter F., Zakharyashev M.* *Many-dimensional modal logics: theory and applications / Studies in logic and the foundations of mathematics*. Vol. 148. Elsevier, 2003.
7. *Gabelaia D.* *Modal Definability in Topology*. Master thesis. ILLC, University of Amsterdam, 2001.
8. *Goldblatt R.* The McKinsey axiom is not canonical // *The Journal of Symbolic Logic*. 1991. Vol. 56 (2). P. 54–562.
9. *Kremer P.* The topological product of $S4$ and $S5$. Unpublished, 2011.
10. *Kudinov A., Shapirovsky I.* Finite model property of pretransitive analogs of $S5$ // *Russian Mathematical Surveys*. 2012. Vol. 67 (4). P. 721–777.
11. *Kudinov A.* Modal logic of some products of neighborhood frames // *Advances in Modal Logic*. 2012. P. 386–394.
12. *Kudinov A.* On neighbourhood product of some Horn axiomatizable logics // *Logic Journal of the IGPL*. 2018. Vol. 26 (3). P. 316–338.
13. *Benthem van J., Bezhanishvili G., Cate B., Sarenac D.* Multimodal logics of products of topologies // *Studia Logica*. 2006. Vol. 84. P. 369–392.
14. *Benthem van J., Bezhanishvili G.* Modal logics of space / *Handbook of spatial logics*. Springer, 2007. P. 217–298.
15. *Дробышев С.А., Одинцов С.П., Сперанский С.О.* Введение в неклассические логики. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014.

TOPOLOGICAL PRODUCT OF MODAL LOGICS WITH MCKINSEY AXIOM

A. V. Kudinov^a

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

We consider products of modal logics in topological semantics and prove that the topological product of $S4.1$ and $S4$ is the fusion of logics $S4.1$ and $S4$ plus one extra axiom. This is an example of a topological product of logics that is greater than the fusion but less than the semiproduct of the corresponding logics.

Keywords: modal logic, topological semantics, product of modal logics, McKinsey's axiom