

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ДВУСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, СОВПАДАЮЩИМИ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

© 2024 г. А. А. Ковалевский^{1,2,*}

Представлено академиком В.И. Бердышевым

Поступило 22.06.2023 г.

После доработки 21.01.2024 г.

Принято к публикации 29.01.2024 г.

Рассмотрены вариационные неравенства с обратимыми операторами $\mathcal{A}_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, дивергентного вида и множеством ограничений $V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п.в. в } \Omega\}$, где Ω – непустое ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $p > 1$ и $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые функции. В предположении, что операторы $\mathcal{A}_s$ G -сходятся к обратимому оператору $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$, $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$ и существуют функции $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, такие, что $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$ п.в. в Ω и $\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0$, установлена слабая сходимость в $W_0^{1,p}(\Omega)$ решений u_s указанных вариационных неравенств к решению u аналогичного вариационного неравенства с оператором $\mathcal{A}$ и множеством ограничений V . Принципиальное отличие рассмотренного случая от ранее исследованного случая, в котором $\text{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$, состоит в том, что, вообще говоря, функционалы $\mathcal{A}_s u_s$ не сходятся к $\mathcal{A}u$ даже слабо в $W^{-1,p'}(\Omega)$ и интегралы энергии $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle$ не сходятся к $\langle \mathcal{A}u, u \rangle$.

Ключевые слова: вариационное неравенство, двусторонние ограничения, G -сходимость операторов, сходимость решений

DOI: 10.31857/S2686954324010124, **EDN:** ZTEUNE

1. ВВЕДЕНИЕ

В интенсивно развивающейся теории усреднения краевых задач для дифференциальных операторов в частных производных важную роль играют понятия G -сходимости и сильной G -сходимости операторов (см., например, [1–5]). Прежде всего это связано с тем, что G -сходимость операторов обеспечивает слабую сходимость решений соответствующих операторных уравнений. Вместе с тем существенный интерес представляет приложение G -сходимости и сильной G -сходимости операторов к исследованию сходимости решений вариационных неравенств. Одному из таких приложений, причем в прин-

ципиально новом случае, и посвящена настоящая статья.

В ней рассматриваются обратимые операторы $\mathcal{A}_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, дивергентного вида и множество $V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п.в. в } \Omega\}$, где Ω – непустое ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $p > 1$ и $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые функции. В предположении, что последовательность $\{\mathcal{A}_s\}$ G -сходится к обратимому оператору $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$, $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$ и существуют функции $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, такие, что $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$ п.в. в Ω и $\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0$, устанавливается слабая сходимость в $W_0^{1,p}(\Omega)$ решений вариационных неравенств с операторами $\mathcal{A}_s$ и множеством ограничений V к решению аналогичного вариационного неравенства с оператором $\mathcal{A}$ и тем же множеством ограничений V .

Отметим две предшествующие работы, наиболее близкие к теме нашего исследования. В

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

²Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

*E-mail: alexkvl71@mail.ru

работе [6] было показано, что из сильной G -сходимости последовательности линейных непрерывных операторов $A_s : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$ дивергентного вида к аналогичному оператору $A : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$ следует слабая сходимость решений вариационных неравенств с операторами A_s и множеством ограничений $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ п.в. в } \Omega\}$ к решению соответствующего вариационного неравенства с оператором A и тем же множеством ограничений. При этом предполагалось, что $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$ и для любого непустого открытого множества ω в $\mathbb{R}^n$ с $\bar{\omega} \subset \Omega$ существуют число $\delta^\omega > 0$ и функции $\psi_1^\omega, \psi_2^\omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$, такие, что $\psi_1 \leq \psi_1^\omega \leq \psi_2^\omega \leq \psi_2$ в Ω и $\psi_2^\omega - \psi_1^\omega \geq \delta^\omega$ в ω . Вариационные неравенства с теми же операторами и множеством ограничений того же вида, что и в настоящей работе, изучались в статье [7], где также предполагалось, что рассматриваемые операторы G -сходятся к обратимому оператору, действующему из $W_0^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,p'}(\Omega)$. Однако в силу условий на ограничения φ и ψ в [7] мера множества $\{\varphi = \psi\}$ равна нулю, тогда как в настоящей работе мера того же множества не равна нулю и, таким образом, мы имеем дело с принципиально новым случаем. Попутно заметим, что условия на ограничения φ и ψ в [7] существенно слабее условий на соответствующие ограничения в [6].

Упомянем несколько других работ, в которых изучались близкие задачи. Так, в работах [8, 9] установлена слабая сходимость решений нелинейных вариационных неравенств с переменными односторонними ограничениями в предположении G -сходимости (или сильной G -сходимости) соответствующих операторов и сходимости по Моско соответствующих множеств ограничений. В статьях [5, 10] доказана слабая сходимость решений вариационных неравенств с G -сходящимися нелинейными эллиптическими операторами и переменными регулярными односторонними и двусторонними ограничениями в переменных областях.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть Ω – непустое ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), и пусть $p > 1$. Положим $p' = p / (p - 1)$.

Определение 1. Для любого $s \in \mathbb{N}$ пусть $A_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ – обратимый опера-

тор, и пусть $A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ – обратимый оператор. Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ G -сходится к оператору A , если для любого $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ имеем $A_s^{-1}f \rightarrow A^{-1}f$ слабо в $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Это определение является частным случаем общего определения G -сходимости абстрактных операторов (см., например, [2, 3]).

Далее, пусть $0 < p_1 \leq \min\{p, p'\}$, $p_2 \geq \max\{p, 2\}$, и пусть $c_1, c_2 > 0$. Кроме того, пусть $h \in L^1(\Omega)$ – неотрицательная функция, и пусть $h_1, h_2 \in L^p(\Omega)$ – положительные функции. Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть $a_i^{(s)} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Каратеодори. Предположим, что если $s \in \mathbb{N}$, то для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^n \left| a_i^{(s)}(x, 0) \right|^{p'} \leq h(x), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| a_i^{(s)}(x, \xi) - a_i^{(s)}(x, \xi') \right|^{p'} &\leq \\ &\leq c_1 \left(h_1(x) + |\xi| + |\xi'| \right)^{p-p_1} |\xi - \xi'|^{p_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[a_i^{(s)}(x, \xi) - a_i^{(s)}(x, \xi') \right] (\xi_i - \xi'_i) &\geq \\ &\geq c_2 \left(h_2(x) + |\xi| + |\xi'| \right)^{p-p_2} |\xi - \xi'|^{p_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу неравенств (1) и (2) для любых $s \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ и $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ имеем $a_i^{(s)}(x, \nabla v) \in L^{p'}(\Omega)$.

Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ пусть $A_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ – оператор, такой, что для любых функций $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle A_s v, w \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^{(s)}(x, \nabla v) D_i w \right\} dx.$$

В силу неравенств (1)–(3) и неравенства Соболева для функций из $W_0^{1,p}(\Omega)$ (см., например, [11, § 5.6, теорема 3]) для любого $s \in \mathbb{N}$ оператор A_s ограничен, коэрцитивен, непрерывен и строго монотонен. Поэтому ввиду известных результатов о разрешимости операторных уравнений (см., например, [12, гл. 2]) для любого $s \in \mathbb{N}$ оператор A_s обратим.

Далее, пусть $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримые функции. Предположим, что выполняются следующие условия:

(C₁) $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$ и $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$;

(C₂) существуют $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, такие, что $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$ п.в. в Ω и

$$\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0.$$

Положим

$$V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Легко видеть, что множество V непусто, замкнуто и выпукло.

Заметим, что если $s \in \mathbb{N}$ и $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, то существует единственная функция $w \in V$, такая, что для любого $v \in V$ имеем $\langle \mathcal{A}_s w - f, w - v \rangle \leq 0$. Это следует из свойств операторов $\mathcal{A}_s$ и множества V и известных результатов о разрешимости вариационных неравенств (см., например, [12, гл. 2]).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ — обратимый оператор, и пусть последовательность $\{\mathcal{A}_s\}$ G -сходится к оператору $\mathcal{A}$. Пусть $\{f_s\} \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, и пусть $f_s \rightarrow f$ сильно в $W^{-1,p'}(\Omega)$. Наконец, для любого $s \in \mathbb{N}$ пусть $u_s \in V$ и

$$\forall v \in V \quad \langle \mathcal{A}_s u_s - f_s, u_s - v \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Тогда существует функция $u \in V$, такая, что $u_s \rightarrow u$ слабо в $W_0^{1,p}(\Omega)$ и

$$\forall v \in V \quad \langle \mathcal{A} u - f, u - v \rangle \leq 0. \quad (5)$$

Замечание 1. Результат, аналогичный теореме 1, был получен в [7], с той разницей, что вместо условий (C₁) и (C₂) на ограничения φ и ψ предполагалось выполненным следующее условие: (C) для любого непустого открытого множества ω в $\mathbb{R}^n$ с $\bar{\omega} \subset \Omega$ существуют $\varphi_\omega, \psi_\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$, такие, что $\varphi \leq \varphi_\omega \leq \psi_\omega \leq \psi$ п.в. в Ω и $\varphi_\omega < \psi_\omega$ п.в. в ω . При этом дополнительно к утверждению, что решения u_s вариационных неравенств (4) слабо сходятся в $W_0^{1,p}(\Omega)$ к решению u вариационного неравенства (5), была доказана сходимости $\mathcal{A}_s u_s \rightarrow \mathcal{A} u$ сильно в $W^{-1,p'}(\Omega)$, ввиду которой интегралы энергии $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle$ сходятся к $\langle \mathcal{A} u, u \rangle$. Из условия (C) вытекает, что $\text{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$, а в настоящей работе в силу условия (C₁) мера множества $\{\varphi = \psi\}$ положительна, что существенно

влияет на поведение последовательности $\{\mathcal{A}_s u_s\}$ и обуславливает отсутствие соответствующего утверждения в теореме 1. В связи с этим см. ниже следующую теорему 2.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 1 мы следуем подходу к изучению сходимости решений вариационных неравенств с абстрактными операторами, предложенному в [5], и используем конструкции, аналогичные данным в [5, теорема 2.3] и [7, предложение 2.3] для случая двусторонних ограничений, не совпадающих ни на каком множестве положительной меры. Специфика случая, рассматриваемого в настоящей работе, потребовала модификации техники, развитой ранее.

Далее, обратимся к понятию сильной G -сходимости операторов. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, такая, что для любой $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ имеем $a_i(x, \nabla v) \in L^{p'}(\Omega)$. Пусть $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ — оператор, такой, что для любых $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle \mathcal{A} v, w \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v) D_i w \right\} dx.$$

Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ обратим.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $\{\mathcal{A}_s\}$ сильно G -сходится к оператору $\mathcal{A}$, если последовательность $\{\mathcal{A}_s\}$ G -сходится к оператору $\mathcal{A}$ и для любых $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $a_i^{(s)}(x, \nabla(\mathcal{A}_s^{-1} f)) \rightarrow a_i(x, \nabla(\mathcal{A}^{-1} f))$ слабо в $L^{p'}(\Omega)$.

Это определение согласуется с определением сильной G -сходимости, данным в [3] для более общих операторов.

Теорема 2. Предположим, что последовательность $\{\mathcal{A}_s\}$ сильно G -сходится к оператору $\mathcal{A}$. Предположим также, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует функция $\varphi_i \in L^{p'}(\Omega)$, такая, что $a_i^{(s)}(x, \nabla \bar{\varphi}) \cdot 1_{\{\bar{\varphi} = \bar{\psi}\}} \rightarrow \varphi_i$ слабо в $L^{p'}(\Omega)$. Пусть $\hat{\mathcal{A}} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ — оператор, такой, что для любых $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle \hat{\mathcal{A}} v, w \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, \nabla v) \cdot 1_{\{\varphi \neq \psi\}} + \varphi_i] D_i w \right\} dx.$$

Пусть $\{f_s\} \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, и пусть $f_s \rightarrow f$ сильно в $W^{-1,p'}(\Omega)$. Наконец, для любого $s \in \mathbb{N}$ пусть $u_s \in V$ и

$$\forall v \in V \quad \langle A_s u_s - f_s, u_s - v \rangle \leq 0.$$

Тогда существует функция $u \in V$, такая, что $u_s \rightarrow u$ слабо в $W_0^{1,p}(\Omega)$, $A_s u_s \rightarrow \hat{A}u$ слабо в $W^{-1,p'}(\Omega)$, $\langle A_s u_s, u_s \rangle \rightarrow \langle \hat{A}u, u \rangle$

$$\forall v \in V \quad \langle Au - f, u - v \rangle \leq 0.$$

Замечание 3. Для операторов A и $\hat{A}$ и функции u , о которых идет речь в теореме 2, равенства $\hat{A}u = Au$ и $\langle \hat{A}u, u \rangle = \langle Au, u \rangle$, вообще говоря, неверны. Это показывают построенные примеры, изложение которых в рамках данного краткого сообщения не представляется возможным ввиду объемности соответствующих конструкций. Таким образом, в условиях теоремы 1 относительно решений u_s вариационных неравенств (4) и решения u вариационного неравенства (5), вообще говоря, нельзя утверждать, что $A_s u_s \rightarrow Au$ даже слабо в $W^{-1,p'}(\Omega)$ и $\langle A_s u_s, u_s \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$.

4. О ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ (C_1) И (C_2)

Пусть F — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, такое, что $F \subset \Omega$, $\text{int } F \neq \emptyset$ и $\text{meas } \partial F = 0$.

Предложение 1. Пусть $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$, и пусть λ_1, λ_2 — функции из $W_0^{1,p}(\Omega)$, равные нулю в F и положительные в $\Omega \setminus F$. Пусть $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — функции, такие, что для любого $x \in \Omega$ имеем $\varphi(x) = \gamma(x) - \lambda_1(x)$ и $\psi(x) = \gamma(x) + \lambda_2(x)$. Тогда функции φ и ψ удовлетворяют условиям (C_1) и (C_2) .

Предложение 2. Пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — нулевая функция, пусть $\alpha > 0$, и пусть $\psi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — измеримая функция, такая, что $\psi = 0$ в F и $\psi \geq \alpha$ в $\Omega \setminus F$. Тогда функции φ и ψ удовлетворяют условиям (C_1) и (C_2) .

Предложение 3. Пусть $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$, пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и пусть $\alpha < \text{ess inf}_F \gamma$ и $\text{ess sup}_F \gamma < \beta$. Пусть $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — измеримые функции, такие, что $\varphi = \psi = \gamma$ в $\Omega \setminus F$, $\varphi \leq \alpha$ в F и $\psi \geq \beta$ в F . Тогда функции φ и ψ удовлетворяют условиям (C_1) и (C_2) .

Предложение 4. Пусть $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$, пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — функция, такая, что $\varphi = \gamma$ в F и $\varphi = -\infty$ в $\Omega \setminus F$, и пусть $\psi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — функция, такая, что $\psi = \gamma$ в F и $\psi = +\infty$ в $\Omega \setminus F$. Тогда функции φ и ψ удовлетворяют условиям (C_1) и (C_2) .

Последнее предложение показывает, что теоремы 1 и 2 могут быть применены и к вариационным неравенствам с множествами ограничений вида $\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v = \gamma \text{ п.в. в } F\}$, где $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов с кем-либо относительно публикуемой статьи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Программы развития Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина в соответствии с программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spagnolo S. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. (3). 1968. Vol. 22. No. 4. P. 571–597.
2. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G -сходимость дифференциальных операторов // УМН. 1979. Т. 34. № 5 (209). С. 65–133.
3. Панков А.А. Об усреднении и G -сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 1. С. 37–41.
4. Pankov A. G -Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators. Mathematics and its Applications. V. 422. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
5. Ковалевский А.А. G -сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 3–35.
6. Murat F. Sur l'homogenisation d'inequations elliptiques du 2ème ordre, relatives au convexe $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, No. 76013. Univ. Paris VI, 1976.
7. Kovalevsky A.A. Convergence of solutions of nonlinear elliptic variational inequalities with measurable bilateral constraints // Results Math. 2023. Vol. 78. No. 4. Paper No. 145. 22 p. <https://doi.org/10.1007/s00025-023-01921-7>
8. Dal Maso G., Defranceschi A. Convergence of unilateral problems for monotone operators // J. Anal. Math. 1989. Vol. 53. No 1. P. 269–289. <https://doi.org/10.1007/BF02793418>

9. *Boccardo L., Murat F.* Homogenization of nonlinear unilateral problems / In: G. Dal Maso, G.F. Dell'Antonio (eds). Composite Media and Homogenization Theory, Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl. Vol. 5. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 81–105.
10. *Kovalevsky A.A.* Nonlinear variational inequalities with variable regular bilateral constraints in variable domains // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2022. Vol. 29. No. 6. Paper No. 70. 24 p. <https://doi.org/10.1007/s00030-022-00797-w>
11. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 19. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.
12. *Lions J.L.* Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

NONLINEAR VARIATIONAL INEQUALITIES WITH BILATERAL CONSTRAINTS COINCIDING ON A SET OF POSITIVE MEASURE

A. A. Kovalevsky ^{a,b}

^a *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation*

^b *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdyshev

We consider variational inequalities with invertible operators $\mathcal{A}_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, in divergence form and constraint set $V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ a.e. in } \Omega\}$, where Ω is a nonempty bounded open set in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $p > 1$, and $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are measurable functions. Under the assumptions that the operators $\mathcal{A}_s$ G -converge to an invertible operator $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$, $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$, and there exist functions $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$ a.e. in Ω and $\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0$, we establish the weak convergence in $W_0^{1,p}(\Omega)$ of the solutions u_s of the specified variational inequalities to the solution u of a similar variational inequality with the operator $\mathcal{A}$ and the constraint set V . The fundamental difference between the considered case and the previously studied case, where $\text{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$, is that, in general, the functionals $\mathcal{A}_s u_s$ do not converge to $\mathcal{A}u$ even weakly in $W^{-1,p'}(\Omega)$ and the energy integrals $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle$ do not converge to $\langle \mathcal{A}u, u \rangle$.

Keywords: variational inequality, bilateral constraints, G -convergence of operators, convergence of solutions