

УДК 519.21+517.9

## НАХОЖДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОЩАДИ И ПЕРИМЕТРА ДЛЯ ПЛОСКИХ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРЯМОЙ И МОЗАИК ВОРОНОГО

© 2024 г. А. Я. Канель-Белов<sup>1,2,4,\*</sup>, М. Голафшан<sup>2,\*\*</sup>, С. Г. Малев<sup>3,\*\*\*</sup>, Р. П. Явиц<sup>3,\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 16.01.2023 г.

После доработки 13.11.2023 г.

Принято к публикации 19.12.2023 г.

Изучение функций распределения (по площадям, периметрам) для разбиения плоскости (пространства) случайным полем прямых (гиперплоскостей) а также для мозаик Вороного представляет собой классическую задачу стохастической геометрии. Начиная с 1972 г. [1] по настоящее время исследовались моменты для таких распределений. Мы даем полное решение этих задач для плоскости, а также для мозаик Вороного. Решаются следующие задачи.

1. На плоскости задан случайный набор прямых, все сдвиги равновероятны, а закон распределения имеет вид  $F(\varphi)$ . Каково распределение частей разбиения по площадям (периметрам)?

2. На плоскости отмечен случайный набор точек. С каждой точкой  $A$  связана “область притяжения”, представляющая собой набор точек на плоскости, к которым точка  $A$  является ближайшей из множества отмеченных.

Идея состоит в интерпретации случайного многоугольника как эволюции отрезка на движущейся плоскости и построения кинетических уравнений. При этом достаточно учитывать ограниченное число параметров: пройденную площадь (периметр), длину отрезка, углы при его концах. Мы покажем, как свести эти уравнения к уравнению Риккати, используя преобразование Лапласа.

*Ключевые слова:* геометрические вероятности, пуассонов процесс прямых, мозаики Вороного, кинетическое уравнение, уравнение Маркова, случайные множества, стохастическая геометрия, распределения случайных величин

DOI: 10.31857/S2686954324010113, EDN: ZTHWSL

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Важным классом задач стохастической геометрии являются задачи исследования случайных разбиений пространства, имеющие как теоретическое, так и прикладное значение, в частности в горном деле [2].

Эти задачи исследовались рядом авторов, начиная с 1960-х гг., им посвящена обширная литература. Однако до сих пор все эти исследо-

вания ограничивались вычислением моментов  $\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N}^k$  (см., например, [1]). Отметим, что законы распределения для фигур в пространстве и для фигур, содержащих фиксированную точку, различаются [3].

В работах [8, 9] для каждого  $n$  по отдельности приведены интегральные формулы распределений по площадям и периметрам для  $n$ -угольника в мозаике Вороного, а также для разбиений плоскости пуассоновым полем прямых. Формулы усложняются в зависимости от  $n$ . В нашей работе выводится глобальный закон, относящийся к распределениям для всех многоугольников (см. теоремы 1, 2, 3). В отличие от работ [8, 9] мы находим всю функцию распределения  $\mathcal{N}$  (с учетом всех типов многоугольников).

Проблема нахождения полного распределения стоит с 1970-х гг. [4]. Она атаквалась многими исследователями.

<sup>1</sup>Университет имени Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Москва, Россия

<sup>3</sup>Ариэльский университет, Ариэль, Израиль

<sup>4</sup>Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Магнитогорск, Россия

\*E-mail: kanelster@gmail.com

\*\*E-mail: mgolafshan@yandex.ru

\*\*\*E-mail: sergeyma@ariel.ac.il

\*\*\*\*E-mail: romany@ariel.ac.il

По всей видимости, нам впервые в двумерном случае удалось выразить полную функцию распределения (а не только моменты) величин через уравнение в частных производных, которое в некоторых случаях удается свести к уравнению Риккати. Трудность, связанная с тем, что части разбиения имеют и описываются тем самым неограниченным числом параметров, в плоском случае преодолевается рассмотрением движущейся секущей прямой [5, 6]. Идея заключается в том, что случайное разбиение плоскости можно рассматривать как процесс на движущейся прямой. Выигрыш при таком подходе состоит в том, что сечением многоугольника является отрезок и для дальнейшей его эволюции важны только его длина, скорости левого и правого “концов”. При изучении закона распределения систем, площадей или периметров, мы должны “помнить” еще пройденную площадь (периметр).

Локальная независимость перемещения его концов может быть использована для упрощения уравнений (см. теорему 1). Распределение вдоль секущей прямой отличается от распределения внутри самой плоскости (пространственного двумерного распределения). Для пересчета к обычному распределению мы вводим параметр  $t$ , представляющий собой величину проекции на прямую, перпендикулярную линии сечения  $L$ , выводим совместное распределение и далее переходим к пространственным величинам (см. теорему 2).

В следующей статье мы предполагаем использовать аналогичные идеи для неевклидовой плоскости и сферы, а также для процесса Колмогорова.

**Некоторые определения, связанные с плотностями.** Через  $N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$  мы обозначим плотность числа частей, примыкающих к  $L$ , с пройденной площадью  $S$ , длиной следа  $l$ , углами  $\alpha_1, \alpha_2$  на концах следа и самая нижняя вершина которых находится на расстоянии  $t$  от  $L$  (см. рис. 4).

Дадим строгое определение  $N$  через предел:

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \lim \frac{W_{S, l, \alpha_1, \alpha_2, t}^{\Delta S, \Delta l, \Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \Delta t}}{\Delta S \cdot \Delta l \cdot \Delta \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_2 \cdot \Delta t}, \quad (1)$$

где  $W$  — относительное число частей (в единице длины сечения), чьи параметры заключены в пределах

$$[S, S + \Delta S], [l, l + \Delta l], [\alpha_1, \alpha_1 + \Delta \alpha_1], \\ [\alpha_2, \alpha_2 + \Delta \alpha_2], [t, t + \Delta t].$$

Остальные понятия, относящиеся к плотностям, в данной работе определяются аналогично. Такого рода понятия определяются стандартным образом, см. [4, 5, 10, 11].

### 1.1. Основные результаты

Напомним конструкцию случайного разбиения плоскости прямыми, или пуассоновского процесса прямых согласно [10]. Прямая задается углом наклона  $\varphi$  и расстоянием  $r$  до начала координат  $O$ . Группа движений плоскости действует также на множестве прямых  $\Pi$ . При этом  $\Omega = drd\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ ,  $r > 0$  будет инвариантной мерой на  $\Pi$ . Пуассоновский точечный процесс в пространстве параметров  $(r, \varphi)$ , отвечающих прямым с интенсивностью  $\lambda$  относительно меры  $\Omega$ , определяет пуассоновский линейный процесс, или пуассонов процесс прямых на плоскости. Разобьем пространство параметров на прямоугольники:  $K < r < K + 1$ . Рассмотрим  $n_K$  — случайные величины, выражающие числа точек в  $K$ -м прямоугольнике. Пусть  $T_{i,l}$ ;  $i, l = 1, \dots, \infty$  — координаты  $(l-1)$ -й случайной точки в  $i$ -м прямоугольнике.  $n_K$  принимает с вероятностью  $(\lambda^n \cdot e^{-n\lambda}) / n!$  значение  $n$ , а  $T_{i,l}^r$  и  $T_{i,l}^\varphi$  — величины, равномерно распределенные на  $i$ -м прямоугольнике. Если  $l > n$ , то задаваемая ими точка не принимается во внимание.

Пуассоновский процесс прямых на  $\Pi$  с интенсивностью  $\lambda$  параметризуется точкой Пуассона процесса в пространстве  $[0, \pi) \times \mathbb{R}$  (см. рис. 1).

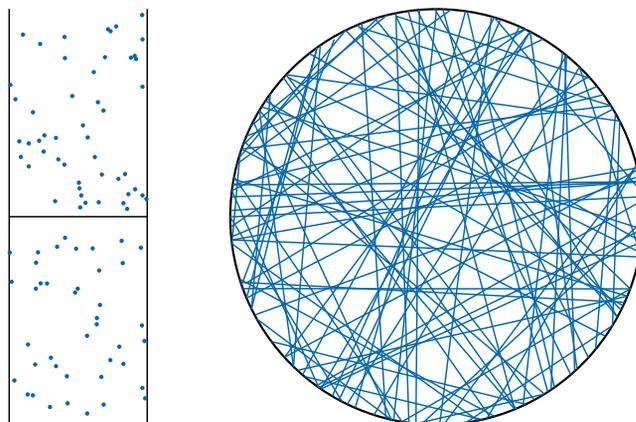


Рис. 1. Пуассоновский процесс прямых.

Выбрав случайным образом направление каждой прямой, ненаправленные пуассоновские процессы прямых можно преобразовать в направленные пуассоновские процессы прямых. При этом естественным пространством параметров будет  $\lambda$  на  $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Рассмотрим разбиение  $\mathcal{C}$  плоскости, отвечающее пуассоновским процессам прямых на  $\Pi$ . Добавим еще одну тестовую прямую  $L$ , которая будет двигаться, сохраняя направление. Нам важны многоугольники из  $\mathcal{C}$ , рассеченные прямой  $L$ , и распределения, с ними связанные. Нас интересует эволюция случайно выбранного многоугольника  $M \in \mathcal{C}$ , рассеченного прямой  $L$ . Многоугольник  $M$  будет интерпретироваться как эволюция отрезка в процессе движения  $L$ ,  $M$  обозначает пройденную часть многоугольника  $M$ .

Пусть  $t$  – проекция многоугольника  $M$  на перпендикуляр к движущейся секущей прямой  $L$ ,  $S$  – пройденная площадь,  $p$  – периметр,  $L$  – тестовая движущаяся прямая,  $l$  – сечение  $M$  прямой  $L$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  – углы между  $L$  и примыкающими к ней сторонами  $M$ . Основные результаты данной работы таковы.

**Теорема 1 (кинетические уравнения).** *Функция распределения  $N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$  площади вдоль прямой удовлетворяет следующему уравнению:*

$$l \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial S} + (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) \times \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial l} + \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + \lambda N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \left( \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0.$$

Аналогично записывается кинетическое уравнение для периметров:

$$\left( \frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) \frac{\partial N}{\partial P} + \frac{\partial N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial l} \times (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \left( \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(P, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(P, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0.$$

Пусть  $dF$  – ожидание количества точек пересечения единичного отрезка, нормального прямой с углом наклона  $\varphi$ , с прямыми, чьи углы наклона между  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ . Определим функцию  $F(\varphi)$  как предел  $F(\varphi) = \lim_{d\varphi \rightarrow 0} (dF / d\varphi)$ . Кинетические уравнения площадей таковы:

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial l} \times (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N (G_1(\alpha_1) + G_2(\alpha_2)) - F(\alpha_1) \cdot \int_0^{\alpha_1} \left( N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} \right) d\varphi - F(\alpha_2) \cdot \int_0^{\alpha_2} \left( N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} \right) d\varphi, G_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} \left( F(\varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\alpha)} \right) d\varphi \text{ и } G_2(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} \left( F(\pi - \varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\alpha)} \right) d\varphi.$$

**Теорема 2 (переход к распределениям на всей плоскости).** *Пространственные функции распределения, связанные с площадями, периметрами, а также совместное распределение площади и периметра выражаются через плотности вероятностей распределений вдоль секущей прямой следующим образом:*

$$N(S) = \frac{1}{Q_S} \cdot \int_{t>0} \frac{N(S, O, t)}{t} dt, \quad \text{где } Q_S = \iint_{t>0} \frac{N(S, O, t)}{t} dt dS, \quad (2)$$

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{Q_P} \cdot \int_{t>0} \frac{\mathcal{N}(P, O, t)}{t} dt, \quad \text{где } Q_P = \iint_{t>0} \frac{\mathcal{N}(P, O, t)}{t} dt dP, \quad (3)$$

$$\mathcal{N}(S, P) = \frac{1}{Q_{S, P}} \cdot \int_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, t)}{t} dt, \quad \text{где } Q_{S, P} = \iiint_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, t)}{t} dt dS dP. \quad (4)$$

Аналогичные уравнения выполнены для мозаик Вороного.

**Доказательство.** Рассмотрим пуассоновский процесс точек на плоскости. С каждой такой точкой мы связываем ее область притяжения, т.е. множество точек, для которых эта точка находится ближе, чем любая другая отмеченная. Задача состоит в нахождении функций распределения. При этом распределения оказываются такими же, как и для случайного поля линий [10, 11]. Поясним почему. В пространстве прямых существует мера, инвариантная относительно движений плоскости. Опишем ее. Прямая может быть задана углом  $\alpha$  и расстоянием  $p$  до фиксированной точки  $O$ , и эта мера равна  $d\alpha dp$ .

Если мы рассмотрим пуассоновский процесс точек на плоскости и зафиксируем точку  $O$  из этого пуассоновского множества и выберем любую другую пуассоновскую точку  $P$ , то плотность вероятности, соответствующая линии, разделяющей плоскость на областях, близких к  $O$  и близких к  $P$ , будет иметь одинаковую плотность, пропорциональную  $d\alpha dp$ , где  $p$  — расстояние от  $P$  до  $O$ .

При изучении отрезка движения прямой  $L$  области  $P$  (многоугольника Вороного) в качестве  $O$  берется его точка пуассоновского процесса, соответствующая  $P$ , т.е. такая, что любая другая точка в процессе дальше от любой другой точки, кроме  $O$ . Мы видим, что вероятности перехода такие же, как и в случае разбиения прямыми линиями (мы дали другое доказательства этого известного факта [10]).  $\square$

При рассмотрении движения одного конца сечения естественным образом определяются приращения площади, периметра (см. рис. 2). Пусть произошло два последовательных перехода:  $\alpha \rightarrow \alpha'$  и  $\alpha' \rightarrow \alpha''$ . Первый характеризуется приращениями —  $t_1, \Delta P_1, \Delta S_1$  и  $\Delta l_1$ , а второй —  $t_2, \Delta P_2, \Delta S_2$  и  $\Delta l_2$ . Тогда сквозной переход характеризуется величинами —  $t_1 + t_2, \Delta P_1 + \Delta P_2, \Delta l_1 + \Delta l_2$  и  $\Delta S_1 + t_2 \Delta l_1 + \Delta S_2$ .

Второй член для площадей вызван сдвигом начала координат на  $\Delta l_1$ .

**Теорема 3 (независимость концов, уравнение Маркова).** *Естественно определяемая функция перехода  $\alpha \xrightarrow{t, l} \alpha'$ ,  $\alpha \xrightarrow{t, S, l} \alpha'$  и  $\alpha \xrightarrow{t, P, S, l} \alpha'$  удовлетворяет уравнениям:*

$$\left( l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{t, S, l} \alpha' = 0, \quad (5)$$

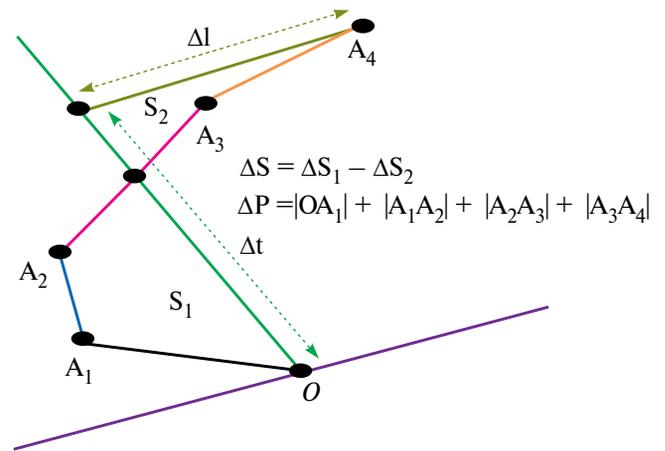
$$\left( \frac{1}{\sin(\alpha')} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{t, P, l} \alpha' = 0, \quad (6)$$

$$\left( l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{\sin(\alpha')} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{t, P, S, l} \alpha' = 0, \quad (7)$$

где

$$Q_1^F(\mathfrak{R}(*, *, l, \alpha, \alpha')) = \cot(\alpha) \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial l} + G_1(\alpha') \cdot \mathfrak{R} - F(\alpha') \cdot \mathfrak{R}(*, *, l, \alpha, \varphi) \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi. \quad (8)$$

$*, *$  означают набор аргументов, отличных от длины  $l$  и углов (для уравнения (5) — это  $s$  и  $t$ ,



**Рис. 2.** Площадь, периметр и смещение, связанные с одним концом.

для уравнения (6) – это  $p$  и  $t$ , для уравнения (7) – это  $p, s$  и  $t$ ).

Через функции перехода выражаются распределения вдоль секущей прямой в теореме 1 (см. рис. 3). Для распределения площадей имеем:

$$\mathcal{N}(S, t) = \frac{1}{C^2} \times \int_{\mathcal{D}_1} \left( \alpha_1^0 \frac{t}{l_1, s_1} \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2^0 \frac{t}{l_2, s_2} \rightarrow \alpha_2 \right) dl_1 ds_1 d\alpha_1^0 d\alpha_2^0, \quad (9)$$

где область интегрирования  $\mathcal{D}_1$  устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, S_1 + S_2 = S, \alpha_1^0, \alpha_2^0 > 0 \text{ и } \alpha_1^0 + \alpha_2^0 < \pi.$$

Для распределений, связанных с периметрами, имеем:

$$\mathcal{N}(P, t) = \frac{1}{C^2} \times \int_{\mathcal{D}_2} \left( \alpha_1^0 \frac{t}{l_1, p_1} \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2^0 \frac{t}{l_2, p_2} \rightarrow \alpha_2 \right) dl_1 dp_1 d\alpha_1^0 d\alpha_2^0, \quad (10)$$

где область интегрирования  $\mathcal{D}_2$  устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, P_1 + P_2 = P, \alpha_1^0, \alpha_2^0 > 0 \text{ и } \alpha_1^0 + \alpha_2^0 < \pi.$$

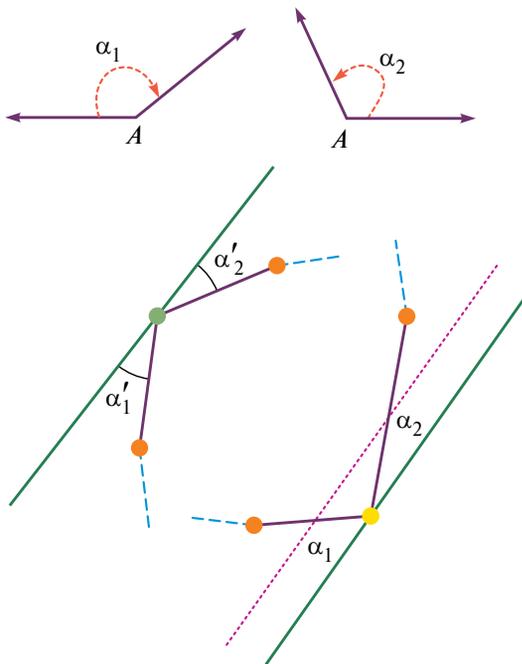


Рис. 3. Свертка, независимость движения концов.

Для совместных распределений имеем:

$$\mathcal{N}(S, P, t) = \frac{1}{C^2} \times \int_{\mathcal{D}_3} \left( \alpha_1^0 \frac{t}{l_1, s_1} \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2^0 \frac{t}{l_2, s_2} \rightarrow \alpha_2 \right) \times dl_1 dp_1 ds_1 d\alpha_1^0 d\alpha_2^0, \quad (11)$$

где область интегрирования  $\mathcal{D}_3$  устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, P_1 + P_2 = P, S_1 + S_2 = S, \alpha_1^0, \alpha_2^0 > 0 \text{ и } \alpha_1^0 + \alpha_2^0 < \pi.$$

Следствием данной теоремы является точное выражение задачи для периметров. Сделав в уравнении (9) преобразование Лапласа по  $S, t$  и  $l$ , в уравнении (10) – по  $P, t$  и  $l$  и в уравнении (11) – по  $P, S$  и  $l$ , имеем:

$$\left( -\tilde{l}\tilde{S} - \tilde{t} + \tilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \frac{t}{\tilde{S}, \tilde{l}} \alpha' = H_1, \quad (12)$$

$$\left( -\frac{1}{\sin \alpha'} \tilde{P} - \tilde{t} + \tilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \frac{t}{\tilde{P}, \tilde{l}} \alpha' = H_2, \quad (13)$$

$$\left( -\tilde{l}\tilde{S} - \frac{1}{\sin \alpha'} \tilde{P} - \tilde{t} + \tilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \frac{t}{\tilde{P}, \tilde{S}, \tilde{l}} \alpha' = H_3, \quad (14)$$

где

$$\tilde{Q}_1^F [\tilde{\mathfrak{R}}(*, *, \tilde{l}, \alpha, \alpha')] = -\cot \alpha' \cdot \tilde{l} + G_1(\alpha') \cdot \tilde{\mathfrak{R}} - \mathfrak{R}(*, *, \tilde{l}, \alpha, \varphi) \cdot F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Функции  $H_1, H_2$  и  $H_3$  определяются граничными условиями.

Заметим, что плотность экспоненциально уменьшается по отношению к периметру и квадратному корню площади, поэтому преобразование Лапласа корректно.

Уравнения, где фигурирует площадь, проинтегрировать не удастся, однако уравнение (13) сводится к уравнению Риккати. Через  $\mathcal{N}(\alpha, p, t, l, \alpha')$  мы обозначим  $\alpha \frac{t}{S, l} \rightarrow \alpha'$ . Тогда уравнение (12) переписется в виде

$$\left[ -\frac{1}{\sin(\alpha)} \cdot \tilde{P} - \tilde{t} - \cot(\alpha') \cdot \tilde{l} + G_1(\alpha') \right] \times \mathcal{N}(\alpha, p, t, l, \alpha') - F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\mathcal{N}(\alpha, \tilde{p}, \tilde{l}, \tilde{t}, \beta) \sin(\alpha' - \beta)}{\sin(\beta)} d\beta = H. \quad (15)$$

Положим

$$T(\alpha, \tilde{p}, \tilde{l}, \tilde{t}, \alpha') =$$

$$= (-\tilde{P} - \tilde{t} \sin(\alpha') - \tilde{l} \cos \alpha' + G_1(\alpha') \sin(\alpha')) / F(\alpha'),$$

$$\widehat{H} = H / F(\alpha').$$

Уравнение (15) переписывается в виде:

$$\mathcal{T} \widehat{N} + \int (\widehat{N}(\alpha, \beta) \sin(\alpha' - \beta)) d\beta = \widehat{H}. \quad (16)$$

Дважды продифференцировав по  $\alpha'$  и сложив его с собой, получим:

$$\mathcal{T} \widehat{N}'' + \mathcal{T} \widehat{N} + \widehat{N} = \widehat{H}'' + \widehat{H},$$

где ' означает дифференцирование по  $\alpha'$ . Откуда, положив  $\mathcal{Y} = \mathcal{T} \widehat{N}$  и  $v = \widehat{H}'' + \widehat{H}$ , имеем:

$$\mathcal{Y}'' + \mathcal{Y} \cdot (\mathcal{T} + 1) / \mathcal{T} = v.$$

Пусть  $\mathcal{G} = (\mathcal{T} + 1) / \mathcal{T}$ . Тогда имеем уравнение:

$$\mathcal{Y}'' + \mathcal{G} \cdot \mathcal{Y} = v,$$

которое, как известно, сводится к уравнению Риккати.

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть  $L$  – секущая прямая, движущаяся с единичной скоростью по плоскости, сохраняя направление. Рассмотрим многоугольники разбиения, которые  $L$  пересекает, и их части, лежащие “под” прямой  $L$ .

Рассмотрим многоугольник разбиения  $M$ , лежащий под  $L$ , сторона которого образована отрезком прямой  $L$ . Через  $S$  мы будем обозна-

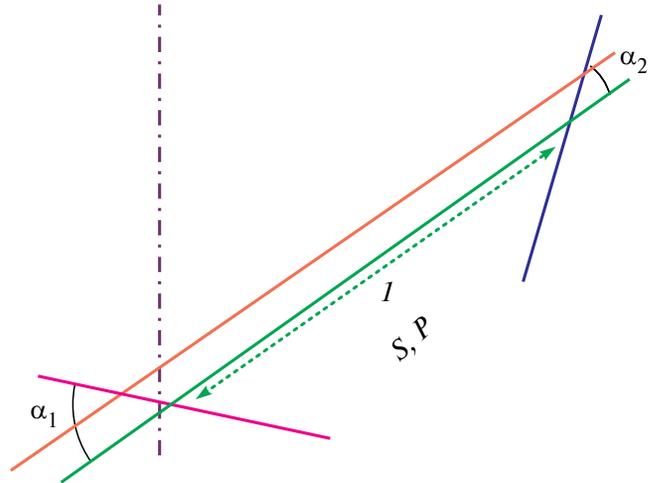


Рис. 4. Изменения параметров при движении секущей прямой.

чить пройденную площадь,  $l$  – длину сечения многоугольника  $M$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, образованные  $L$  со сторонами  $M$  (см. рис. 4).

Предположим, что  $\alpha$  – это старый угол, а  $\alpha'$  – новый угол. Угол изменится с вероятностью  $p dt = dp = \lambda dt (\sin(\alpha' - \alpha) / \sin(\alpha))$ . На предыдущем рисунке  $l$ ,  $S$  и  $P$  обозначают длину отрезка, пройденную площадь и пройденный периметр. Кроме того,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  обозначают углы между поперечным сечением и боковыми прямыми соответственно. Следовательно,  $dl$  представляет собой приращение длины отрезка, и тогда  $dl = dt (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2))$ . Кроме того,  $dS = l dt$ , и  $dP = dt ((1 / \sin(\alpha_1)) + (1 / \sin(\alpha_2)))$ .

При сдвиге прямой  $L$  на расстояние  $dt$  возможны следующие события.

1. Сдвинутая прямая  $L'$  не пересечет никакую другую сторону  $M$ . В этом случае,

$$S' = S + l dt, l' = l + dt (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)), \alpha_{1'} = \alpha_1, \text{ и } \alpha_{2'} = \alpha_2. \quad (17)$$

2. Прямая  $L'$  пересечет одну новую сторону  $M$ . Тогда  $dS = l dt$  и один из углов  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$  изменится. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай, когда изменится  $\alpha_1$ . Новая сторона имеет больший угол наклона  $\alpha_{1'}$ , чем угол наклона старой  $\alpha_1$ .

Рассмотрим отрезок  $[A, A']$ . Его длина равна  $1 / \sin(\alpha_1)$ . Вероятность перехода  $\alpha \rightarrow \beta$ , где  $\alpha' < \beta < \alpha' + d\alpha'$ , есть вероятность того, что от-

резок  $[A, A']$  будет пересечен прямой с таким углом наклона. Эта вероятность равна проекции отрезка  $[A, A']$  на нормаль к прямой, образующей с  $L$  угол  $\alpha'$  ( $d\alpha'$  – мало), умноженный на  $\lambda d\alpha'$ , где параметр  $\lambda$  характеризует интенсивность пуассоновского процесса прямых.

Соответствующая проекция  $[A, A']$  равна

$$|AA'| \sin(\alpha' - \alpha), \text{ или } \frac{dt \sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

Итак, искомая плотность вероятности равна

$$\frac{\lambda dt \sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha)} + \mathcal{O}(dt^2).$$

3. Прямая  $L$  пересечет две новые стороны  $M$ . Вероятность этого события имеет величину порядка  $\mathcal{O}(dt^2)$ , поэтому мы ею пренебрегаем.

Поскольку число сторон многоугольника конечно, в случае 2 можно считать, что  $dl = dt(\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2))$ , поскольку ошибка, полученная для целого многоугольника, имеет порядок  $dt \cdot N$ , где  $N$  – число сторон многоугольника. Устремляя  $dt$  к 0, мы получим точный результат.

Напомним **определение плотности распределения**  $N$ . Через  $N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$  обозначим плотность числа пройденных частей, примыкающих к  $L$ , с пройденной площадью  $S$ , длиной следа  $l$ , углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на концах следа и самая нижняя вершина которых находится на расстоянии  $t$  от  $L$  (см. рис.4) Определим  $N$  через предел:

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \lim_{\substack{W_{S, l, \alpha_1, \alpha_2, t}^{\Delta S, \Delta l, \Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \Delta t} \\ \Delta S \cdot \Delta l \cdot \Delta \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_2 \cdot \Delta t}} \quad (18)$$

где  $W$  – относительное число частей (в единице длины сечения), чьи параметры заключены в пределах

$$[S, S + \Delta S], [l, l + \Delta l], [\alpha_1, \alpha_1 + \Delta \alpha_1],$$

$$[\alpha_2, \alpha_2 + \Delta \alpha_2] \text{ и } [t, t + \Delta t].$$

Запишем соотношение баланса:

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) =$$

$$N\left(\begin{matrix} S - ldt, l - dt(\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)), \\ \alpha_1, \alpha_2, t - dt \end{matrix}\right) -$$

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)\lambda dt \times$$

$$\times \left( \int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} d\varphi + \int_{\alpha_2}^{\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2)} d\varphi \right) +$$

$$\lambda dt \left( \int_0^{\alpha_1} N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\alpha_2} N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi \right). \quad (19)$$

Первый член первой части соответствует отсутствию пересечений за  $dt$ , второй член соответствует уходу из состояния  $(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$ , а третий – приходу в это состояние. Перепишем уравнение (19) в виде кинетического уравнения:

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) \frac{\partial N}{\partial l} + \frac{\partial N}{\partial t} +$$

$$+ \lambda N \left( \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) -$$

$$\lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi -$$

$$- \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (20)$$

Аналогично можно выписать кинетическое уравнение периметров и для совместных распределений (см. формулы из теоремы 1).

В знаменателе стоит  $\sin(\varphi)$ . Хотя при  $\varphi$ , стремящемся к нулю,  $\sin(\varphi)$  стремится к нулю, но интеграл сходится, потому что  $N$  тоже стремится к нулю. Аналогично выписываются кинетические уравнения для произвольного закона  $F(\varphi)$  распределения углов наклона (см. формулировку теоремы 1). Граничные условия выписываются исходя из того, что при  $t \rightarrow 0$  возникает треугольник, для которого наши параметры  $t, p, S$  и  $l$  связаны очевидными соотношениями.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393). Также работа была поддержана грантом РФФИ № 22-1920073.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miles R.E.* The random division of space // *Advances in Applied Probability.* 1972. Vol. 4. P. 243–266.
2. *Белов А.Я.* Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, н. рук. Р.Л. Салганик. М.: МГИ, 1991. С. 190.
3. *Miles R.E.* Poisson flats in Euclidean spaces // *Advances in Applied Probability.* 1969. Vol. 1. P. 211–237.
4. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972.
5. *Белов А.Я.* О случайных разбиениях // Деп. в ВИНТИ. М., 1991. № 273-В91. С. 26.

6. *Kanel-Belov A., Golafshan M., Malev S., Yavich R.* About random splitting of the plane // Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, KROMSH. 2020. P. 294–295.
7. *Kabluchko Z.* Angles of random simplices and face numbers of random polytopes // Advances in Mathematics. 2021. Vol. 380. No. 107612.
8. *Pierre Calka.* An explicit expression for the distribution of the number of sides of the typical Poisson-Voronoi cell // Adv. Appl. Probab. 2003. Vol. 35 (4). P. 863–870.
9. *Calka P.* Precise formulae for the distributions of the principal geometric characteristics of the typical cells of a two-dimensional Poisson-Voronoi tessellation and a Poisson line process // Advances in Applied Probability. 2016. Vol. 35. No. 3. P. 551–562.
10. *Сентало Д.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности // М.: Наука, 1983.
11. *Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штоян Д.* Введение в стохастическую геометрию // М.: Наука, 1989.

## FINDING THE AREA AND PERIMETER DISTRIBUTIONS FOR FLAT POISSON PROCESSES OF A STRAIGHT LINE AND VORONOI MOSAICS

**A. Kanel-Belov<sup>a,b,d</sup>, M. Golafshan<sup>b</sup>, S. Malev<sup>c</sup>, R. Yavich<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel*

<sup>b</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia*

<sup>c</sup>*Ariel University, Ariel, Israel*

<sup>d</sup>*Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia*

The study of distribution functions (by areas, perimeters) for partitioning a plane (space) by a random field of straight lines (hyperplanes) and for Voronoi mosaics is a classical problem of statistical geometry. Starting from 1972 [1] to the present, moments for such distributions have been investigated. We give a complete solution of these problems for the plane, as well as for Voronoi mosaics. We investigate the following tasks:

**1.** A random set of straight lines is given on the plane, all shifts are equally probable, and the distribution law has the form  $F(\varphi)$ . What is the distribution of the parts of the partition by areas (perimeters)?

**2.** A random set of points is marked on the plane. Each point  $A$  is associated with a “region of attraction”, which is a set of points on the plane to which the point  $A$  is the closest of the set marked.

The idea is to interpret a random polygon as the evolution of a segment on a moving one and construct kinetic equations. At the same time, it is sufficient to take into account a limited number of parameters: the area covered (perimeter), the length of the segment, the angles at its ends. We will show how to reduce these equations to the Riccati equation using the Laplace transform. (see theorems 1, 1 and 2).

*Keywords:* geometric probabilities, Poisson line process, Voronoi diagram, kinetic equation, Markov equation, random sets, statistical geometry, distributions of random variables