

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ГЕССА

© 2024 г. Б. С. Бардин^{1,*}, А. А. Савин^{1,**}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 28.11.2023 г.

После доработки 06.12.2023 г.

Принято к публикации 12.12.2023 г.

Исследуется задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести. На основании анализа ли-неаризованной системы уравнений возмущенного движения доказана орбитальная неустойчивость маятниковых вращений. В случае маятниковых колебаний имеет место трансцендентная ситуация, когда вопрос об устойчивости не решается членами сколь угодно высокого порядка в разложении гамильтониана уравнений возмущенного движения. Доказано, что для большинства значений параметров задачи маятниковые колебания орбитально неустойчивы.

Ключевые слова: тяжелое твердое тело, тождественный резонанс, случай Гесса, орбитальная устойчивость

DOI: 10.31857/S2686954324010107, **EDN:** ZTILZT

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Для описания положения тела введем следующие системы координат: неподвижную систему координат $OXYZ$, ось Z которой направлена вертикально вверх, и жестко связанную с телом подвижную систему координат $Oxyz$, оси x , y и z которой направим вдоль главных осей инерции тела для точки O . Соответствующие главные моменты инерции обозначим через A , B и C . Положение тела (подвижных осей $Oxyz$) относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ . Далее предполагается, что геометрия масс тела отвечает случаю Гесса [1]. Это означает, что все три главных момента инерции различны ($A < C < B$), а центр масс тела лежит в плоскости Oxy , причем его координаты x_c , y_c удовлетворяют соотношению

$$y_c \sqrt{B(C-A)} = x_c \sqrt{A(B-C)}.$$

Поскольку центр масс тела лежит в плоскости главных осей инерции, то возможны маятниковые периодические движения тела (колебания или вращения) вокруг оси инерции Oz , сохраняющей неизменное горизонтальное положение в пространстве. На указанных решениях $\psi = \text{const}, \theta = \pi/2$, а изменение угла φ описывается уравнением математического маятника

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \mu^2 \sin(\varphi + \beta) &= 0, \\ \mu^2 &= \frac{mgl}{C}, \\ \beta &= \arctg \left(\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(C-A)}} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь β — угол между осью Ox и радиус-вектором центра масс.

Период маятниковых периодических движений зависит от их начальных условий, поэтому они неустойчивы по Ляпунову. Однако с теоретической и прикладной точек зрения значительный интерес представляет задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела выполнялось ранее для различных случаев геометрии масс [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. В упомянутых работах строгий анализ устойчи-

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: bsbardin@yandex.ru

**E-mail: savinaa.@mai.ru

ности был выполнен на основании метода нормальных форм [10, 11] и теории КАМ [12, 13]. В случаях интегрируемости уравнений движения твердого тела исследование орбитальной устойчивости периодических движений проводилось также на основании второго метода Ляпунова [14, 15] и при помощи топологического подхода [16].

В настоящей работе проводится анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений в рассматриваемом здесь случае геометрии масс Гесса.

2. ГАМИЛЬТониАН УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Выбирая в качестве обобщенных координат углы Эйлера ψ, θ, φ и вводя соответствующие им обобщенные импульсы $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$, уравнения движения тела можно записать в гамильтоновой форме. Координата ψ является циклической, поэтому соответствующий импульс p_ψ принимает на движениях тела постоянное значение. При исследовании задачи об орбитальной устойчивости будем рассматривать только такие возмущения, для которых $p_\psi = 0$. В этом случае движение тела описывается системой канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} p_\theta^2 \left(\frac{1}{B} \sin^2 \varphi + \frac{1}{A} \cos^2 \varphi \right) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) p_\theta p_\varphi \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{2} p_\varphi^2 \left(\frac{1}{B} \operatorname{ctg}^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{A} \operatorname{ctg}^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{C} \right) - mgl \sin \theta \sin(\varphi + \beta). \quad (2)$$

Введем безразмерное время $\tau = \mu t$ и безразмерные канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi - \frac{3\pi}{2} + \beta, \\ q_2 &= \theta - \frac{\pi}{2}, \\ p_1 &= \frac{p_\varphi}{C\mu}, \\ p_2 &= \frac{p_\theta}{C\mu}. \end{aligned} \quad (3)$$

В новых переменных функция Гамильтона задачи имеет вид

$$H = \frac{1}{4} \left(\operatorname{tg}^2 q_2 \left[2v \sin 2q_1 + (u+1) \times \right. \right. \\ \left. \times \cos 2q_1 + u + 3 \right] + 2 \right) \times \\ \times p_1^2 - \cos q_1 \cos q_2 + \\ + \frac{1}{4} \left[u + 3 - 2v \sin 2q_1 - (u+1) \cos 2q_1 \right] p_2^2 + \\ + \frac{1}{4} \operatorname{tg} q_2 \left[2v \cos 2q_1 - (u+1) \sin 2q_1 \right] p_1 p_2, \quad (4)$$

где безразмерные параметры u, v вычисляются по формулам

$$u = \frac{C}{A} + \frac{C}{B} - \frac{3}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{(B-C)(C-A)}{AB}}, \quad (5)$$

а область их допустимых значений задается неравенствами

$$0 < v < 1, \quad u > \frac{v^2(v^2 - 5)}{2(v^2 - 1)},$$

которые следуют из неравенств треугольника для главных моментов инерций тела.

В случае Гесса выполняется соотношение [17]

$$\{H, J_{\text{hess}}\} = -v p_1 J_{\text{hess}}, \quad (6)$$

где

$$J_{\text{hess}} = \frac{p_2 \cos q_2 \sin q_1 - p_1 \sin q_2 \cos q_1}{\cos q_2}, \quad (7)$$

а через $\{ \cdot, \cdot \}$ обозначена скобка Пуассона. Из (6) следует, что система с гамильтонианом (4) допускает частный первый интеграл $J_{\text{hess}} = 0$. На невозмущенном маятниковом периодическом движении $p_2 = q_2 = 0$, а изменение переменных p_1, q_1 , описывается системой с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1.$$

Введем новые переменные I, w так, чтобы на невозмущенном движении они являлись переменными действие—угол. В случае колебаний переменные I, w можно ввести при помощи замены переменных [2]

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 \arcsin \left[k_1 \operatorname{sn}(s, k_1) \right], \\ p_1 &= 2 k_1 \operatorname{cn}(s, k_1), \quad s = 2\pi^{-1} K(k_1) w, \end{aligned} \quad (8)$$

где $k_1 = k_1(I)$ — функция, обратная к функции $I = 8\pi^{-1} \left[E(k_1) - (1 - k_1^2) K(k_1) \right]$. В случае вращений замена переменных имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= 2am(s, k_2), \\ p_1 &= 2k_2^{-1} \operatorname{dn}(s, k_2), \quad s = 2\pi^{-1} K(k_2)w, \end{aligned} \quad (9)$$

где $k_2 = k_2(I)$ — функция, обратная к функции $I = 4E(k_2) / (\pi k_2)$.

На невозмущенном периодическом движении имеем

$$I = I_0 = \text{const}, w = \omega\tau + w(0), \quad (10)$$

где ω — частота периодического движения. В случае колебаний $\omega = \pi / (2K(k_1))$, а в случае вращений $\omega = \pi / (k_2 K(k_2))$. При этом $k_1^2(I_0) = (h+1)/2$, а $k_2^2(I_0) = 2/(h+1)$ (где h — значение интеграла энергии $H_0 = h$). Совместно с (10) формулы (8) и (9) определяют явную зависимость переменных q_1, p_1 от τ на невозмущенном движении.

Таким образом, в задаче об орбитальной устойчивости имеется три параметра: u , v и h . Параметры u , v определяют геометрию масс тела, а h является параметром семейства периодических орбит.

Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$ и разложим гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(w, r_1, q_2, p_2)$ в ряд по q_2, p_2, r_1 :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_{2m} + \dots \quad (11)$$

Через Γ_{2m} в (11) обозначены члены порядка $2m$, при этом учитывается, что переменные q_2, p_2 имеют первый порядок малости, а переменная r_1 — второй. Коэффициенты разложения (11) 2π -периодически зависят от w . Необходимые в дальнейшем члены второго порядка имеют следующий явный вид

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \omega r_1 + f_{20} q_2^2 + f_{11} q_2 p_2 + f_{02} p_2^2, \\ f_{20} &= \frac{1}{8} \{ 4vp_1^2 \sin 2q_1 + \\ &+ ((2u-1) \cos 2q_1 + 3 + 2u)p_1^2 + 4 \cos q_1 \}, \\ f_{11} &= \frac{1}{8} \{ 4vp_1 \cos 2q_1 - (2u-1)p_1 \sin 2q_1 \}, \\ f_{02} &= -\frac{1}{8} \{ 4v \sin 2q_1 + \\ &+ (2u-1) \cos 2q_1 + 3 + 2u \}, \end{aligned} \quad (12)$$

где q_1, p_1 задаются выражениями (8) в случае колебаний и выражениями (9) — в случае вращений.

Задача об орбитальной устойчивости плоских периодических движений эквивалентна задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (11) по отношению к переменным q_2, p_2, r_1 .

3. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

В первом приближении задача об орбитальной устойчивости периодической орбиты $I = I_0$ сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия $q_2 = p_2 = 0$ линейной системы

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_2}. \quad (13)$$

Правые части уравнений системы (13) 2π -периодически зависят от w . Выводы об устойчивости ее положения равновесия можно получить на основании анализа корней характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \quad (14)$$

где $\kappa = (x_{11} + x_{22})/2$, а x_{11}, x_{22} — диагональные элементы матрицы монодромии системы (13).

Линейная система (13) имеет первый интеграл $J_* = [p_2 \sin(q_1(w)) - p_1(w) q_2 \cos(q_1(w))] / e^{vq_1(w)}$, где функции $q_1(w), p_1(w)$ задаются формулами (8) или (9). Это позволяет проинтегрировать систему (13) в квадратурах и построить ее матрицу монодромии в явном виде. Для маятниковых вращений (когда $q_1(w), p_1(w)$ задаются формулами (9)) матрица монодромии имеет вид

$$X_{rot} = \begin{pmatrix} e^{2\pi v} & 0 \\ a_{21} & e^{-2\pi v} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -e^{-2\pi v} (1+h) \sqrt{2} \times \\ &\times \left[u Z_{rot}(h, v) + h \frac{\partial}{\partial h} Z_{rot}(h, v) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$Z_{rot}(h, v) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2vt}}{\sqrt{h + \cos t}} dt.$$

В этом случае $\kappa = (e^{2\pi\nu} + e^{-2\pi\nu}) / 2 > 1$, следовательно, характеристическое уравнение (14) всегда имеет корень с модулем, большим единицы. Поэтому положение равновесия системы (13) неустойчиво. Более того, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [18] неустойчивость имеет место и в полной нелинейной системе с гамильтонианом (11), поэтому маятниковые вращения твердого тела орбитально неустойчивы при всех допустимых значениях параметров.

В случае колебаний матрица монодромии имеет вид

$$X_{osc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$b_{21} = -(1+h)\sqrt{2} \left[u Z_{osc}(h, \nu) + h \frac{\partial}{\partial h} Z_{osc}(h, \nu) \right],$$

$$Z_{osc}(h, \nu) = \int_{-\arccos(-h)}^{\arccos(-h)} \frac{e^{2\nu t}}{\sqrt{h + \cos t}} dt.$$

Из (17) следует, что в случае маятниковых колебаний при всех значениях параметров задачи характеристическое уравнение (14) имеет кратный корень, равный единице, т.е. имеет место так называемый тождественный резонанс первого порядка [11]. Если $b_{21} \neq 0$, то в любой сколь угодно малой окрестности положения равновесия $q_2 = p_2 = 0$ существует решение системы (13), которое неограниченно возрастает с возрастанием переменной w . В этом случае положение равновесия системы (13) неустойчиво и, следовательно, маятниковые колебания неустойчивы в линейном приближении. Если же $b_{21} = 0$, то все решения системы (13) периодические и ее положение равновесия устойчиво. В данном резонансном случае выводы об устойчивости линейной системы не распространяются на полную нелинейную систему с гамильтонианом (11). Поэтому на основании проведенного здесь линейного анализа можно сделать выводы лишь об орбитальной устойчивости или неустойчивости в линейном приближении.

Вычисления показали, что в пространстве параметров имеется поверхность, на которой величина $b_{21} = 0$. Эта поверхность задается следующим уравнением

$$u = - \frac{h \frac{\partial}{\partial h} Z_{osc}(h, \nu)}{Z_{osc}(h, \nu)}.$$

На ней маятниковые колебания орбитально устойчивы в линейном приближении, а вне этой поверхности — орбитально неустойчивы в линейном приближении.

4. О ТРАНСЦЕНДЕНТНОМ СЛУЧАЕ В ЗАДАЧЕ ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний необходимо дополнительный анализ. Если $b_{21} \neq 0$, то при помощи линейной и 2π -периодической по w замены переменных $w, r_1, q_2, p_2 \rightarrow W, R, Q, P$ гамильтониан (11) можно привести к виду

$$\tilde{\Gamma} = \omega R + \frac{1}{2} P^2 + \tilde{\Gamma}_4 + \dots + \tilde{\Gamma}_{2m} + \dots, \quad (18)$$

где через $\tilde{\Gamma}_{2m}$ обозначены члены порядка $2m$.

Оказалось, что в данной задаче имеет место особый случай, когда вопрос об устойчивости не решается на основании нелинейного анализа с учетом членов любого сколь угодно высокого порядка в разложении гамильтониана (18). Поэтому здесь общая методика нелинейного исследования устойчивости, основанная на построении нормальной формы гамильтониана уравнений возмущенного движения, неприменима.

Следуя терминологии А.М. Ляпунова, мы будем называть такой случай трансцендентным. Наличие трансцендентного случая в данной задаче связано с тем, что маятниковые колебания принадлежат семейству периодических движений, период которых зависит только от постоянной интеграла энергии [19]. Поэтому в фазовом пространстве системы на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите, существует целое семейство периодических решений одного и того же периода. В этом случае на основании результатов работы [20] можно сделать строгий вывод об орбитальной неустойчивости маятниковых колебаний.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00729) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hess W. Über die Eulerschen bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.* 1890. Vol. 37. No. 2. P. 153–181.
2. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // *ПММ.* 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
3. Маркеев А.П., Медведев С.В., Чеховская Т.Н. К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // *Изв. РАН. МТТ.* 2003. № 1. С. 3–9.
4. Маркеев А.П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // *ПММ.* 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 282–293.
5. Bardin B.S. On the Orbital Stability of Pendulum-like Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov case // *Regul. Chaotic Dyn.* 2010 Vol. 15. No. 6. P. 702–714.
6. Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A. On the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov Case // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. Vol. 17. No. 6. P. 533–546.
7. Bardin B.S., Savin A.A. On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations and Rotations of a Symmetric Rigid Body with a Fixed Point // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. Vol. 17. No. 3–4. P. 243–257.
8. Бардин Б.С., Савин А.А. Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // *ПММ.* 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 806–821.
9. Bardin B.S., Chekina E.A. On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in the Bobylev–Steklov Case // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2021. Vol. 17. No. 4. P. 453–464.
10. Giacaglia G.E.O. *Perturbation Methods in Non-Linear System.* New York: Springer, 1972. 369 p.
11. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
12. Siegel C.L., Moser J.K. *Lectures on Celestial Mechanics.* Heidelberg: Springer, 1971. 290 p.
13. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *УМН.* 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
14. Иртегов В.Д. Устойчивость маятниковых колебаний гироскопа Ковалевской // *Тр. Казан. Авиац. ин-та мат. и мех.* 1968. Т. 97. С. 38–40.
15. Брюм А.З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // *ПММ.* 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 873–879.
16. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // *УМН.* 2010. Т. 65. Вып. 2. С. 71–132.
17. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
18. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
19. Гашененко И.Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // *Механика твердого тела.* 2010. Вып. 40. С. 12–20.
20. Бардин Б.С. Об устойчивости периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы в одном трансцендентном случае // *ДАН.* 2018. Т. 479. № 5. С. 485–488.

ON THE ORBITAL STABILITY OF PENDULUM PERIODIC MOTIONS OF A RIGID BODY IN THE HESS CASE

B. S. Bardin^a, A. A. Savin^a

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University) Moscow, Russian Federation.*

The problem of orbital stability of pendulum periodic motions of a heavy rigid body with one fixed point is investigated. Based on the analysis of the liberalized system of equations of perturbed motion, the orbital instability of pendulum rotations is proven. In the case of pendulum oscillations, a transcendental situation occurs when the question of stability cannot be solved by terms of an arbitrarily high order in the expansion of the Hamiltonian of the equations of perturbed motion. It is proven that for most values of the parameters, pendulum oscillations are orbitally unstable.

Keywords: heavy rigid body, identity resonance, Hess case, orbital stability