

УДК 517.968.43

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-КОНСТАНТНЫХ ЯДЕР

© 2024 г. М. В. Николаев^{1, *}, А. А. Никитин^{2, **}, У. Дикман^{3, ***}

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым

Поступило 31.08.2023 г.

После доработки 14.11.2023 г.

Принято к публикации 15.11.2023 г.

Работа посвящена анализу нелинейного интегрального уравнения, которое возникает в результате параметрического замыкания третьего пространственного момента в одновидовой модели логистической динамики У. Дикмана и Р. Лоу. Разбирается случай кусочно-константных ядер, который очень важен для дальнейшего компьютерного моделирования. Были найдены достаточные условия, гарантирующие существование нетривиального решения уравнения равновесия. Использование константных ядер позволило получить более точные по сравнению с более ранними работами результаты, в частности были получены более точные оценки на -норму решения, а также на параметр замыкания.

Ключевые слова: функциональный анализ, нелинейные интегральные уравнения, математическая биология

DOI: 10.31857/S2686954324010074, **EDN:** ZTSGZU

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается модель самоструктурирующихся биологических сообществ, предложенная Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу в [1, 2]. Данная модель использует информацию о поведении каждого индивида и его влиянии на все сообщество в целом, что дает преимущества в описании динамики.

Основным предметом изучения в работе является нелинейное интегральное уравнение, описывающее состояние равновесия сообщества при однопараметрическом замыкании третьего пространственного момента в специальном случае так называемых константных ядер разброса и конкуренции. Рассмотрение подобного типа ядер позволяет выявить наиболее простые условия существования решения, что помогает при анализе более сложных вариантов пространственного распределения взаимодействия между особями сообщества.

2. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Модель биологических сообществ

Пусть некоторое одновидовое сообщество неподвижных организмов обитает в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Модель описывается гомогенными биологическими параметрами: $d \geq 0$ — естественная смертность, $s > 0$ — смертность от конкуренции, $b > d$ — интенсивность рождения новых видов; а также двумя функциями: m — ядро разброса и w — ядро конкуренции, принадлежащими классу:

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, г. Москва, Россия

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия

³Высший университет Окинавского института науки и технологий, г. Онна, Япония, Международный институт прикладного системного анализа, г. Лаксенбург, Австрия, Высший университет повышения квалификации, г. Хаяма, Япония

*E-mail: nikolaev.mihail@inbox.ru

**E-mail: nikitin@cs.msu.ru

***E-mail: dieckmann@iiasa.ac.at

$$\mathcal{K}_n = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) \mid f(x) \geq 0, \|f\|_{L_1} = 1, \right. \\ \left. f(x) = F(\|x\|_{\mathbb{R}^n}), \lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0 \right\}.$$

Ядра являются плотностями вероятности событий рождения новых особей и конкуренции между индивидами.

Состояние изучаемого сообщества характеризуется пространственными моментами, которые являются усреднениями по всевозможным конфигурациям сообщества некоторых статистических характеристик. В работе будут рассмотрены первые три из них:

$N(t)$ — средняя плотность особей;

$C(x, t)$ — средняя плотность пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен x ;

$T(x, y, t)$ — средняя плотность троек особей, в которых сдвиг второго и третьего индивидов относительно первого равен x и y соответственно.

Пространственные моменты удовлетворяют выведенной в работе [2] системе интегро-дифференциальных уравнений, называемой системой динамики сообщества:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - s \int_{\mathbb{R}^n} C(y, t) w(y) dy, \\ \dot{C}(x, t) = bm(x)N(t) + \int_{\mathbb{R}^n} bm(y)C(x + y, t) dy - \\ - (d + sw(x))C(x, t) - \int_{\mathbb{R}^n} sw(y)T(x, y, t) dy. \end{cases} \quad (1)$$

Стационарная точка системы (1) называется состоянием равновесия сообщества.

2.2. Константные ядра

Основной целью текущей работы является исследование состояния равновесия в самом простом из возможных случаев пространственного распределения конкуренции и рождаемости. Это позволяет найти наиболее простой вид модели, что полезно для проверки некоторых гипотез касательно динамики одновидовых сообществ. Конкретно используются так называемые константные ядра разброса и конкуренции m и w , т.е. функции, равные константе на некотором шаре с центром в начале координат (носители) и равные нулю всюду вне его. Подобные ядра характеризуют популяцию, в которой

каждая особь может породить нового индивида (или убить уже существующего) в любой точке с одинаковой вероятностью при условии, что эта точка располагается от нее не дальше, чем на некотором расстоянии r .

Из принадлежности ядер классу $\mathcal{K}_n$ (в частности, условия равенства L_1 -нормы единице) можно вывести вид константных ядер. Обозначим за r_m и r_w радиус носителей ядер разброса и конкуренции соответственно и пусть $B(r)$ обозначает замкнутый шар радиуса r с центром в начале координат. Положим

$$I_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B(r), \\ 0, & \text{если } x \notin B(r). \end{cases}$$

Тогда

$$m(x) = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_m^n} I_{r_m}(x),$$

$$w(x) = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_w^n} I_{r_w}(x),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Введем вспомогательные обозначения

$$\bar{b} = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_m^n} b, \\ \bar{s} = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_w^n} s.$$

После подстановки константных ядер в систему динамики (1) и рассмотрения состояния равновесия сообщества (отсутствия зависимости от времени) получим:

$$\begin{cases} 0 = (b - d)N - \bar{s} \int_{B(r_w)} C(y) dy, \\ 0 = \bar{b} I_{r_m}(x) N + \bar{b} \int_{B(r_m)} C(x + y) dy - \\ - (d + \bar{s} I_{r_w}(x)) C(x) - \bar{s} \int_{B(r_w)} T(x, y) dy. \end{cases} \quad (2)$$

2.3. Замыкание третьего момента

В систему из двух уравнений (2) входят три неизвестные величины: первый, второй и третий пространственные моменты. Поэтому данная система незамкнута. Попытка вывести динамику третьего момента (как это было сделано для

первых двух) приведет к появлению новой неизвестной (четвертого момента) и т.д. Поэтому в работе [3] был предложен так называемый метод замыканий. Идея этого метода заключается в нахождении эвристическим путем выражения для $T(x, y)$ через первый и второй пространственные моменты (замыкания). В указанной работе были описаны необходимые условия, которым должно удовлетворять замыкание, и предложены несколько возможных замыканий.

В текущей статье будет рассмотрено однопараметрическое семейство замыканий второго порядка, имеющее вид:

$$T_\alpha(x, y) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{C(x)C(y)}{N} + \frac{C(x)C(x-y)}{N} + \frac{C(x-y)C(y)}{N} - N^3 \right) + (1-\alpha) \frac{C(x)C(y)}{N} \quad (3)$$

при $N \neq 0$, $\alpha \in [0; 1]$. Подстановка (3) в (2) после некоторых преобразований приводит нас к основному предмету изучения данной статьи – системе

$$\left\{ \begin{aligned} N &= \frac{\bar{s}}{b-d} \int_{B(r_w)} C(y) dy, \\ 0 &= \bar{b} I_{r_m}(x) N + \bar{b} \int_{B(r_m)} C(x-y) dy - \\ &\quad - \left(\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) b + \frac{\alpha}{2} d + \bar{s} I_{r_w}(x) \right) C(x) - \\ &\quad - \frac{\alpha \bar{s}}{2N} C(x) \int_{B(r_w)} C(x-y) dy - \\ &\quad - \frac{\alpha \bar{s}}{2N} \int_{B(r_w)} C(x-y) C(y) dy + \frac{1}{2} \alpha s N^3, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

которая дополняется условием на бесконечности ()

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow +\infty} C(x) = N^2. \quad (5)$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

3.1. Вывод уравнения равновесия

Проведем некоторые вспомогательные преобразования. Пусть $\bar{C} = C / N^2$, тогда после

деления второго уравнения системы (4) на N^2 получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{b} I_{r_m}(x)}{N} + \bar{b} \int_{B(r_m)} \bar{C}(x-y) dy - \\ &\quad - \left(\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) b + \frac{\alpha}{2} d + \bar{s} I_{r_w}(x) \right) \bar{C}(x) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N \bar{C}(x) \int_{B(r_w)} \bar{C}(x-y) dy - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N \int_{B(r_w)} \bar{C}(x-y) \bar{C}(y) dy + \frac{1}{2} \alpha s N. \end{aligned} \quad (6)$$

Из условия (5) следует, что $\bar{C} = Q + 1$, где Q – исчезающая на бесконечности функция. В терминах Q уравнение (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{b} I_{r_m}(x)}{N} + b + \bar{b} \int_{B(r_m)} Q(x-y) dy - \\ &\quad - \left(\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) b - \frac{\alpha}{2} d - \bar{s} I_{r_w}(x) \right) - \\ &\quad - \left(\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) b + \frac{\alpha}{2} d + \bar{s} I_{r_w}(x) \right) Q(x) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha s N - \frac{1}{2} \alpha s N Q(x) - \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N \times \\ &\quad \times \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy - \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N Q(x) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha s N \int_{B(r_w)} (Q(y) + 1) dy - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy - \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N \times \\ &\quad \times \int_{B(r_w)} Q(x-y) Q(y) dy + \frac{1}{2} \alpha s N. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} N &= N(Q) = \frac{b-d}{\bar{s} \int_{B(r_w)} (Q(y) + 1) dy} = \\ &= \frac{b-d}{s + \bar{s} \int_{B(r_w)} Q(y) dy}, \end{aligned} \quad (8)$$

после упрощения уравнения (7) и некоторых вспомогательных преобразований получим уравнение

$$\begin{aligned}
Q(x) = & \frac{1}{D(Q,x)} \frac{1}{D(Q,x)} \times \\
& \times \left(\frac{1}{N(Q)} \bar{b} I_{r_m}(x) + \bar{b} \int_{B(r_m)} Q(x-y) dy \right) - \frac{1}{D(Q,x)} \times \\
& \times \left(\bar{s} I_{r_w}(x) + \alpha \bar{s} N(Q) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy \right) - \frac{\alpha \bar{s} N(Q)}{2D(Q,x)} \times \\
& \times \left(Q(x) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy + \int_{B(r_w)} Q(x-y) Q(y) dy \right),
\end{aligned} \quad (9)$$

где для упрощения записи введено обозначение

$$D(Q,x) = \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) b + \frac{\alpha}{2} d + \bar{s} I_{r_w}(x) + \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N(Q). \quad (10)$$

В дальнейшем мы будем называть уравнение (9) уравнением равновесия, подразумевая, что входящая в него величина $N(Q)$ вычисляется через неизвестную функцию Q по формуле (8).

3.2. Вспомогательные леммы

Теперь изучим вопрос о разрешимости уравнения равновесия. Данное уравнение специально было записано в виде $Q = A(Q)$ для того, чтобы можно было воспользоваться одной из теорем о неподвижной точке. В рамках текущей работы мы будем опираться на результат М.А. Красносельского [4].

Теорема 1 (Красносельский). Пусть операторы A и B действуют в некотором банаховом пространстве $\mathbb{B}$, причем A — компактный, а B — сжимающий. Пусть $V \subset \mathbb{B}$ является замкнутым выпуклым ограниченным множеством, причем $\forall x \in V, \forall y \in B \quad Ax + By \in V$, тогда у оператора $C = A + B$ существует по крайней мере одна неподвижная точка в V .

Таким образом, нам необходимо представить правую часть уравнения (9) в виде суммы компактного и сжимающего операторов в некотором банаховом пространстве. В качестве такого пространства мы будем рассматривать пространство $L_1(\mathbb{R}^n)$. Из биологического смысла второго момента ясно, что функция Q должна быть неотрицательна. Поэтому в качестве замкнутого выпуклого ограниченного множества, в котором будет производиться поиск неподвижной точки, мы рассмотрим множество вида

$$\mathfrak{B}^+(R) = \{f \in L_1(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{L_1} \leq R, f(x) \geq 0\}$$

при некотором $R > 0$.

Прежде чем приступить к разделению оператора, задаваемого уравнением равновесия на сумму компактного и сжимающего операторов, установим некоторые свойства величин $N(Q)$ и $D(Q,x)$, доказываемые путем простейших оценок.

Лемма 1. Величина $N(Q)$, определяемая выражением (8), равномерно по Q отделена от нуля и бесконечности на множестве $\mathfrak{B}^+(R)$ при любом $R > 0$.

Лемма 2. Величина $D(Q,x)$, определяемая выражением (10), равномерно по Q и x отделена от нуля и бесконечности на множестве $\mathfrak{B}^+(R) \times \mathbb{R}^n$ при любом $R > 0$.

Используя критерий Рисса предкомпактности множеств в L_1 , а также стандартные приемы функционального анализа, можно доказать следующую лемму:

Лемма 3. Оператор $C_r f = \int_{B(r)} f(x-y) dy$ является компактным как действующий в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ при любом $r > 0$.

Также, используя теорему Фубини и Лебега, можно доказать вспомогательные утверждения относительно оператора самосвертки и оператора умножения на свертку.

Лемма 4. Операторы $S_r f = \int_{B(r)} f(x-y) f(y) dy$ и $P_r f = f(x) \int_{B(r)} f(x-y) dy$ при любом $r > 0$ являются липшицевыми в любом ограниченном подмножестве M пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$ с константой Липшица $L = 2 \max_{f \in M} \{ \|f\|_{L_1} \}$.

3.3. Существование решения

Используя приведенные выше вспомогательные утверждения, можно доказать следующую теорему существования решения уравнения равновесия.

Теорема 1. При выполнении условий

- 1) $R \leq \frac{\pi^{n/2} r_w^n (2b-d)}{\Gamma(n/2+1)(b-d)},$
- 2) $\alpha < \frac{2b}{9b-5d}$

уравнение равновесия (9) имеет по крайней мере одно решение $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$.

Мы опустим все технические моменты и приведем лишь основные идеи доказательства. Поскольку сумма компактных операторов является компактным оператором, а умножение оператора на величину, равномерно отделенную от нуля и бесконечности, не меняет его компактности, можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \mathcal{T}Q = & \frac{1}{D(Q, x)} \times \\ & \times \left(\frac{1}{N(Q)} \bar{b} I_{r_m}(x) + \bar{b} \int_{B(r_m)} Q(x-y) dy \right) - \\ & - \frac{1}{D(Q, x)} \left(\bar{s} I_{r_w}(x) + \alpha \bar{s} N(Q) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy \right) \end{aligned}$$

является компактным оператором в $\mathfrak{B}^+(R)$ при любом $R > 0$ в силу лемм 1, 2 и 3. Кроме того, в условиях теоремы, используя оценки сверху и снизу для величин $N(Q)$ и $D(Q, x)$ соответственно, а также лемму 4, можно показать, что оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Q = & -\frac{\alpha \bar{s} N(Q)}{2D(Q, x)} \times \\ & \times \left(Q(x) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy + \int_{B(r_w)} Q(x-y) Q(y) dy \right) \end{aligned}$$

является сжимающим на множестве $\mathfrak{B}^+(R)$. Далее показывается, что для любых $f, g \in \mathfrak{B}^+(R)$ выполняется условие $\mathcal{T}f + \mathcal{R}g \in \mathfrak{B}^+(R)$. Вышеизложенные факты в применении к теореме Красносельского позволяют заключить, что оператор $\mathcal{T} + \mathcal{R}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку в $\mathfrak{B}^+(R)$, что говорит о существовании решения уравнения равновесия на том же множестве.

Отметим также, что Q не может быть нулевой функцией, поскольку путем явной подстановки такой функции в уравнение (9) можно показать, что она ему не удовлетворяет.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках текущей работы был поставлен и исследован вопрос о разрешимости уравнения равновесия (9) в случае однопараметрического замыкания третьего пространственного момента при константных ядрах разброса и конкуренции. Были найдены достаточные условия, гарантирующие существование нетривиального решения уравнения равновесия. Использование константных ядер позволило получить более точные по сравнению с работой [5] результаты, в частности были получены более точные оценки на L_1 -норму решения, а также на параметр замыкания. Дальнейшие исследования могут быть направлены на поиск некоторых классов решений уравнения (9) в аналитическом виде, а также исследование условий единственности и устойчивости решения.

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены А.А. Никитиным при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Остальные результаты получены всеми авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press, 2000. P. 252–270.
2. Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 412–455.
3. Murrell D.J., Dieckmann U., Law R. On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 2004. Vol. 229. P. 421–432.
4. Красносельский М.А. Два замечания о методе последовательных приближений // УМН. 1955. 10:1(63). С. 123–127.
5. Никитин А.А., Николаев М.В. Принцип Лере–Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. С. 1209–1217.

SOLVABILITY ANALYSIS OF THE NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS SYSTEM ARISING IN THE LOGISTIC DYNAMICS MODEL IN THE PIECEWISE CONSTANT KERNELS CASE

M. V. Nikolaev^a, A. A. Nikitin^b, U. Dieckmann^c

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation,
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^b *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^c *Okinawa Institute of Science and Technology Graduate University, Onna, Japan,
International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, Graduate University
for Advanced Studies, Hayama, Japan*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

The work is devoted to the analysis of a nonlinear integral equation that arises as a result of parametric closure of the third spatial moment in a single-species model of logistic dynamics by U. Dieckmann and R. Law. The case of piecewise constant kernels is analyzed, which is very important for further computer modeling. Sufficient conditions have been found to guarantee the existence of a nontrivial solution to the equilibrium equation. The use of constant kernels made it possible to obtain more accurate results compared to earlier works, in particular, more accurate estimates were obtained for the norm of the solution, as well as for the closure parameter.

Keywords: functional analysis, nonlinear integral equations, mathematical biology