ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 515, с. 18–27

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.225

АПЕРИОДИЧЕСКАЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ПЛАНАРНАЯ ЗАДАЧА УСРЕДНЕНИЯ С КРИТИЧЕСКИМ ДИАМЕТРОМ: ОБЩИЙ НЕЛОКАЛЬНЫЙ СТРАННЫЙ ЧЛЕН ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ОДНОСТОРОННЕГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

© 2024 г. Ж. И. Диаз[1, *], Т. А. Шапошникова[2, **], А. В. Подольский[2, *]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 07.11.2023 г.
После доработки 22.12.2023 г.
Принято к публикации 20.01.2024 г.

В статье изучено асимптотическое поведение решения уравнения диффузии в плоской области, перфорированной мелкими множествами разной формы, имеющими постоянный периметр и диаметр которых равномерно ограничен, в случае, когда расстояние между частицами ε стремится к 0. Так как частицы имеют разную форму, то в общем структура области апериодична. На границе выбрасываемых включений (или частиц, как в химической инженерии) поставлены динамические условия Синьорини, содержащие быстрорастущий параметр $\beta(\varepsilon)$. При условии, что параметры задачи принимают «критические значения», построена и обоснована усредненная модель (общая в том смысле, что она не зависит от формы частиц), которая содержит «странный член», заданный нелинейным, нелокальным, монотонным оператором $\mathbf{H}$, определяемым через решение задачи с препятствием для обыкновенного дифференциального оператора. Решение предельной задачи может принимать отрицательные значения, даже если для произвольного ε в исходной задаче решение неотрицательно на границе перфораций или частиц.

Ключевые слова: усреднение параболического уравнения, перфорированная область, критический случай, странный нелокальный член

DOI: 10.31857/S2686954324010037, **EDN:** ZUARWU

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает исследования, проведенные в [5, 7] для $n \geq 3$ на случай области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В ней рассмотрена задача усреднения для уравнения Пуассона в области на плоскости, из которой выброшены мелкие частицы разной геометрической формы, но с одним и тем же периметром (при этом диаметр частиц равномерно ограничен), на границе которых задано динамическое условие Синьорини, содержащее параметр, зависящий от величины $\varepsilon > 0$, отвечающей за расстояние между соседними частицами. Усреднение задач с условиями Синьорини вида $u_\varepsilon \geq 0$, $\partial_\nu u_\varepsilon + \alpha(\varepsilon)\sigma(u_\varepsilon) \geq 0$, $u_\varepsilon\left(\partial_\nu u_\varepsilon + \alpha(\varepsilon)\sigma(u_\varepsilon)\right) = 0$, (где $\sigma(u)$ – функция, зависящая от решения задачи), заданными на границе выбрасываемых частиц, изучалось во многих работах разных авторов [3, 4, 8]. В работе [8] доказано, что при «критических» значениях входящих в задачу параметров в усредненной модели возникает так называмый «странный член» (см. [2]) вида $\mathcal{A}H\left(u_0^+\right) - \mathcal{B}u_0^-$, где $H(u)$ определяется как решение некоторого функционального уравнения, если выбрасываемые частицы имеют форму шара, а в общем случае $H(u)$ определяется через решение некоторой внешней краевой задачи, причем зависит он только от положительной части решения усредненной задачи. В отличие от упомянутых работ, в данной статье рассматривается динамическое краевое условие, в котором «странный член» представляет собой нелокальный нелинейный монотонный оператор, определяемый через решение задачи с препятствием для обыкновенного дифференциального оператора, причем новый оператор применяется не только к положительной части решения u_0 усредненной задачи, но и к отри-

[1]*Институт междисциплинарной математики, Мадридский университет Комплютенсе, Мадрид, Испания.*
[2]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.*
**E-mail: jidiaz@ucm.es*
***E-mail: shaposh.tan@mail.ru*
****E-mail: avpodolskiy@yandex.ru*

цательной части u_0^-. Отметим, что в статье [3] изучена задача усреднения во внешности периодически расположенных частиц критического размера с классическими условиями Синьорини на их границе, т.е. с условиями вида $u_\varepsilon \geq 0$, $\left(A\left(x/\varepsilon\right)\nabla u_\varepsilon, \nu\right) \geq 0$, $u_\varepsilon\left(A\left(x/\varepsilon\right)\nabla u_\varepsilon, \nu\right) = 0$ для эллиптического дивергентного оператора с быстро осциллирующими коэффициентами. В усредненной задаче появляется слагаемое вида μu_0^-, где μ — это некоторая мера. Более того, когда частицы имеют одинаковую форму и их размер есть величина порядка периода структуры, а $n \geq 3$, предельная задача зависит от формы перфораций (а не только от периметра). Поэтому, выбирая подходящую форму частиц, можно оптимизировать коэффициент эффективности диффузии (см. [15]).

В работе [18] изучено асимптотическое поведение решения краевой задачи, заданной в области, перфорированной вдоль $(n-1)$-мерного многообразия без условия периодичности расположения выбрасываемых частиц. Рассматривается некритическое значение входящих в задачу параметров.

Отметим также отличие результатов данной статьи от случая «больших» частиц радиуса порядка ε. В работе [11] изучена задача усреднения эллиптического оператора с быстро осциллирующими коэффициентами во внешности частиц размера ε с классическими условиями Синьорини. Показано, что решение усредненной задачи всегда неотрицательно. Используя результаты работ [12] и [13], нетрудно показать, что для области, перфорированной множествами размера периода структуры с динамическими условиями Синьорини на границе перфораций, решение усредненной задачи будет опять неотрицательной функцией.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК РЕШЕНИЯ

Пусть Ω — ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $Y = (-1/2,\ 1/2)^2$ и $A_1, A_2, \ldots$ — различные области с липшицевой границей, принадлежащие кругу $T_{1/4}^0$ радиуса 1/4 с центром в начале координат. Предположим, что для произвольного $i = 1, 2, \ldots,$ множество A_i диффеоморфно кругу и $|\partial A_i| = l$, где $l = const > 0$, не зависящая от i. Также можно рассматривать включения, состоящие из конечного набора таких множеств с суммарной длиной границ, равной l.

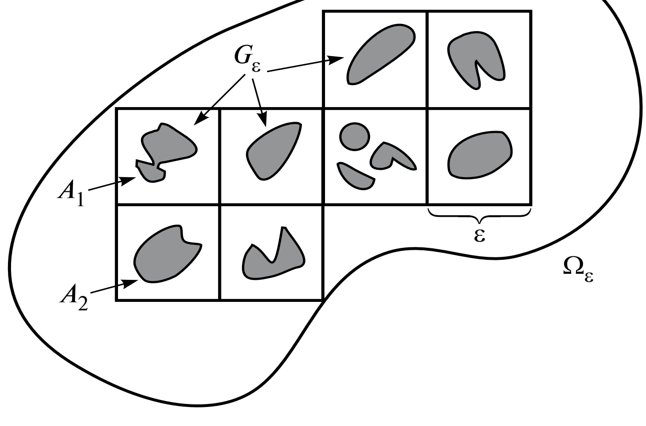

Рис. 1. Перфорированная область Ω_ε и множество перфораций G_ε.

Для множества B и положительного числа δ обозначим $\delta B = \{x : \delta^{-1}x \in B\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр и $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho\left(x, \partial\Omega\right) > 2\varepsilon\}$.

Пусть a_ε и $\beta(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta\left(\varepsilon\right)a_\varepsilon\varepsilon^{-2} = C_1^2, \tag{1}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\beta\left(\varepsilon\right)a_\varepsilon \ln\left(\dfrac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} = -C_2^2, \tag{2}$$

где $C_1, C_2 \neq 0$. Например, условия (1) и (2) выполняются, если $a_\varepsilon = \varepsilon\exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{\varepsilon^2}\right)$, $\beta\left(\varepsilon\right) = \varepsilon\exp\left(\dfrac{\alpha^2}{\varepsilon^2}\right)$, $\alpha \neq 0$.

Положим

$$G_\varepsilon^j = a_\varepsilon G^j + \varepsilon j,\quad G_\varepsilon = \bigcup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j,$$

где G^j совпадает с одним из множеств $A_i, i = 1, 2, \ldots,$ $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^2 : G_\varepsilon^j \subset Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + \varepsilon j, G_\varepsilon^j \cap \widetilde{\Omega}_\varepsilon \neq \varnothing\}$, $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-2}$, $d = const > 0$. Отметим, что в качестве G^j мы можем выбирать одно из изопериметрических множеств A_i случайным образом, тем не менее наша постановка отличается от исследования, проведенного в [16].

Заметим, что

$$\overline{G_\varepsilon^j} \subset T_{a_\varepsilon}^j \subset T_{\varepsilon/4}^j \subset Y_\varepsilon^j,$$

где T_r^j —круг радиуса r с центром в точке $P_\varepsilon^j = \varepsilon j$.

Определим множества

$$
\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon},\ S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon,\ \partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \bigcup \partial\Omega,
$$
$$
Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0,T),\ T > 0, \tag{3}
$$
$$
S_\varepsilon^T = S_\varepsilon \times (0,T),\ \Gamma^T = \partial\Omega \times (0,T).
$$

Заметим, что Ω_ε — перфорированная область, вообще говоря, с непериодической структурой. На рис. 1 приводится пример перфорированной области указанной структуры.

Рассмотрим в Q_ε^T начально-краевую задачу с динамическими условиями Синьорини, заданными на границе выбрасываемых включений

$$
\begin{cases}
-\Delta_x u_\varepsilon = f(x,t), & (x,t) \in Q_\varepsilon^T,\\
u_\varepsilon \geq 0, & (x,t) \in S_\varepsilon^T,\\
\beta(\varepsilon)\partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon \geq 0, & (x,t) \in S_\varepsilon^T,\\
u_\varepsilon\left(\beta(\varepsilon)\partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon\right) = 0, & (x,t) \in S_\varepsilon^T,\\
u_\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma^T,\\
u_\varepsilon(x,0) = 0, & x \in S_\varepsilon,
\end{cases} \tag{4}
$$

где $f \in H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, ν — вектор внешней единичной нормали к границе S_ε^T. Для упрощения исследования задачи усреднения мы полагаем нулевые начальные данные, но дальнейшие рассуждения могут быть перенесены и на случай ненулевых начальных данных, как было сделано, например, в [5].

Через $H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)$ обозначим замыкание в $H^1(\Omega_\varepsilon)$ множества бесконечно дифференцируемых в Ω_ε функций, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega$. Пространства $L^2\left(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)\right)$, $L^2\left(0,T;L^2(S_\varepsilon)\right)$, $H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, используемые ниже, определяются стандартным образом (см. [19], [20]).

Введем выпуклые замкнутые множества вида

$$
\mathscr{K}_\varepsilon = \left\{v \in H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega) : v \geq 0 \text{ для п.в. } x \in S_\varepsilon\right\},
$$
$$
\mathcal{K}_\varepsilon = \Big\{v \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)\right) : v(\cdot,t) \in
$$
$$
\in \mathscr{K}_\varepsilon \text{ для п.в. } t \in (0,T)\Big\}.
$$

Функцию $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$, такую, что $\partial_t u_\varepsilon \in L^2\left(0,T;L^2(S_\varepsilon)\right)$, $u_\varepsilon(x,0) = 0$, назовем сильным решением задачи (4), если для произвольной функции $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$ выполнено вариационное неравенство

$$
\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon(v - u_\varepsilon)dsdt +
$$
$$
+\int_{Q_\varepsilon^T}\nabla u_\varepsilon\nabla(v - u_\varepsilon)dxdt \geq \tag{5}
$$
$$
\geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(v - u_\varepsilon)dxdt.
$$

Теорема 1. *Существует единственное сильное решение $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (4), и для него справедливы оценки*

$$
\|u_\varepsilon\|_{L^2\left(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon)\right)} + \sqrt{\beta(\varepsilon)}\|u_\varepsilon\|_{C\left([0,T];L^2(S_\varepsilon)\right)} \leq
$$
$$
\leq K\|f\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}, \tag{6}
$$

и

$$
\sqrt{\beta(\varepsilon)}\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2\left(0,T;L^2(S_\varepsilon)\right)} +
$$
$$
+\|\nabla u_\varepsilon\|_{C\left([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon)\right)} \leq \tag{7}
$$
$$
\leq K\|f\|_{H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}.
$$

Доказательство. Доказательство следует идеям, разработанным в работах [5] и [6].

Рассмотрим вспомогательную задачу со штрафом

$$
\begin{cases}
-\Delta u_{\varepsilon,\delta} = f(x,t), & (x,t) \in Q_\varepsilon^T,\\
\beta(\varepsilon)\partial_t u_{\varepsilon,\delta} + \partial_\nu u_{\varepsilon,\delta} + & \\
+\beta(\varepsilon)\delta^{-1}\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^- = 0, & (x,t) \in S_\varepsilon^T,\\
u_{\varepsilon,\delta}(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma^T,\\
u_{\varepsilon,\delta}(x,0) = 0, & x \in S_\varepsilon,
\end{cases} \tag{8}
$$

где $\delta = const > 0$ — параметр, $u^+ = \sup(0,u)$, $u^- = u - u^+$. Заметим, что функция $\sigma(u) = u^-$ — монотонная.

Функцию $u_{\varepsilon,\delta} \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)\right)$ назовем сильным решением задачи (8), если $\partial_t u_{\varepsilon,\delta} \in L^2\left(0,T;L^2(S_\varepsilon)\right)$, а также $u_{\varepsilon,\delta}(x,0) = 0$ при $x \in S_\varepsilon$ и выполнено интегральное тождество

$$
\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t u_{\varepsilon,\delta} v dsdt + \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_{\varepsilon,\delta}\nabla v dxdt +
$$
$$
+\delta^{-1}\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^- v dsdt = \int_{Q_\varepsilon^T} fv dxdt, \tag{9}
$$

где v – произвольный элемент $L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega\right)\right)$. В силу результатов работы [6], задача (8) имеет единственное решение и для него справедливы оценки

$$\begin{gathered}\left\|u_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)\right)}+\\+\sqrt{\beta(\varepsilon)}\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\left\|u_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2\left(S_\varepsilon\right)}\leq\\\leq K\|f\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)},\end{gathered}\tag{10}$$

$$\begin{gathered}\sqrt{\beta(\varepsilon)}\left\|\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^-\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(S_\varepsilon)\right)}\leq\\\leq K\sqrt{\delta}\|f\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)},\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\sqrt{\beta(\varepsilon)}\left\|\partial_t u_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(S_\varepsilon)\right)}+\\+\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\left\|\nabla u_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\leq\\\leq K\|f\|_{H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)},\end{gathered}\tag{12}$$

где постоянная K не зависит от ε и δ.

Из оценок (10)–(12) следует, что для некоторой подпоследовательности (мы используем для нее обозначение исходной последовательности) при $\delta\to 0$ имеем

$$\begin{gathered}u_{\varepsilon,\delta}\rightharpoonup u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega\right)\right),\\u_{\varepsilon,\delta}\to u_\varepsilon \text{ сильно в } C\left([0,T];L^2\left(S_\varepsilon\right)\right),\\\partial_t u_{\varepsilon,\delta}\rightharpoonup\partial_t u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2\left(0,T;L^2\left(S_\varepsilon\right)\right),\\\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^-\to 0 \text{ сильно в } L^2\left(0,T;L^2\left(S_\varepsilon\right)\right).\end{gathered}\tag{13}$$

Покажем, что u_ε – решение задачи (4). Учитывая, что $\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^-\to 0$ в $L^2\left(0,T;L^2\left(S_\varepsilon\right)\right)$, если $\delta\to 0$, получим $u_\varepsilon\geq 0$ для п.в. $x\in S_\varepsilon$ и $t\in[0,T]$, т.е. $u_\varepsilon\in\mathcal{K}_\varepsilon$.

Пусть $v\in\mathcal{K}_\varepsilon$. Из интегрального тождества (9) имеем

$$\begin{gathered}\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t u_{\varepsilon,\delta}\left(v-u_{\varepsilon,\delta}\right)dsdt+\\+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_{\varepsilon,\delta}\nabla\left(v-u_{\varepsilon,\delta}\right)dsdt+\\+\delta^{-1}\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^-\left(v-u_{\varepsilon,\delta}\right)dsdt=\\=\int_{Q_\varepsilon^T}f\left(v-u_{\varepsilon,\delta}\right)dxdt.\end{gathered}\tag{14}$$

В силу (13) при $\delta\to 0$ имеем

$$\begin{gathered}\lim_{\delta\to 0}\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t u_{\varepsilon,\delta}\left(v-u_{\varepsilon,\delta}\right)dsdt=\\=\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon\left(v-u_\varepsilon\right)dsdt,\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}\lim_{\delta\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_{\varepsilon,\delta}\nabla\left(v-u_{\varepsilon,\delta}\right)dxdt\leq\\\leq\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla\left(v-u_\varepsilon\right)dxdt.\end{gathered}\tag{16}$$

Легко видеть, что

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^-\left(v-u_{\varepsilon,\delta}\right)dsdt=\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^-vdsdt-\\-\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\left|\left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^-\right|^2dsdt\leq 0.\end{gathered}$$

Следовательно, $u_\varepsilon\in\mathcal{K}_\varepsilon$ удовлетворяет для произвольного $v\in\mathcal{K}_\varepsilon$ неравенству (5).

Докажем, что решение задачи (4) единственно. Пусть задача имеет два решения $u_{1,\varepsilon},u_{2,\varepsilon}\in\mathcal{K}_\varepsilon$ и для каждого из них выполнено вариационное неравенство (5). Полагая в неравенстве для $u_{1,\varepsilon}$ $v=u_{2,\varepsilon}$, а в неравенстве для $u_{2,\varepsilon}$ выбирая тестовую функцию $v=u_{1,\varepsilon}$ и складывая полученные неравенства, придем к неравенству

$$\begin{gathered}\beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t\left(u_{1,\varepsilon}-u_{2,\varepsilon}\right)\left(u_{1,\varepsilon}-u_{2,\varepsilon}\right)dsdt+\\+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\left|\nabla\left(u_{1,\varepsilon}-u_{2,\varepsilon}\right)\right|^2dxdt\leq 0,\end{gathered}\tag{17}$$

из которого следует, что $u_{1,\varepsilon}=u_{2,\varepsilon}$ п.в. в Q_ε^T.

Известно (см. работу [10]), что существует линейный оператор продолжения $P_\varepsilon: H^1\left(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega\right)\to H_0^1(\Omega)$, что

$$\begin{gathered}\left\|\nabla\left(P_\varepsilon u\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\leq K\|\nabla u\|_{L^2\left(\Omega_\varepsilon\right)},\\\left\|P_\varepsilon u\right\|_{H_0^1(\Omega)}\leq K\|u\|_{H^1\left(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega\right)},\end{gathered}$$

где $K>0$ – постоянная, не зависящая от ε. В силу оценок (6), (7) имеем

$$\left\|P_\varepsilon u_\varepsilon\right\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}\leq K,\tag{18}$$

и, следовательно, для некоторой подпоследовательности (мы сохраним для нее обозначение прежней последовательности) при $\varepsilon \to 0$ выполнено

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ слабо } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \tag{19}$$

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА И ПОСТРОЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕСТОВОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 2. *Пусть $a_\varepsilon, \beta(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (1), (2) и u_ε — решение задачи (4). Тогда u_0 — обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + 2\pi C_1^2 C_2^2\left(u_0 - H_{u_0}\right) = \\ = f(x,t), \quad (x,t) \in Q^T = \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ H_{u_0} \geq 0, \partial_t H_{u_0} + \mathcal{L} H_{u_0} \geq \mathcal{L} u_0, \\ H_{u_0}\left(\partial_t H_{u_0} + \mathcal{L}\left(H_{u_0} - u_0\right)\right) = 0, \quad (x,t) \in Q^T, \\ H_{u_0}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{20}$$

где $\mathcal{L} = \dfrac{2\pi C_2^2}{l}$, $l = \left|\partial A_j\right|$, $j = 1,2,\ldots$.

Замечание 1. *Для построения «странного члена» H_{u_0} (который не появляется при рассмотрении «больших» частиц) в усредненной задаче (20) необходимо решить вариационную задачу для обыкновенного дифференциального оператора*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} H_\phi + \mathcal{L} H_\phi \geq \mathcal{L}\phi, \ H_\phi \geq 0, \\ H_\phi\left(\dfrac{d}{dt} H_\phi + \mathcal{L} H_\phi - \mathcal{L}\phi\right) = 0, \quad t \in (0,T), \\ H_\phi(0) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

В работах [5] и [7] была изучена данная задача и исследованы свойства оператора $\mathbf{H} : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$, $\mathbf{H}(\phi) = H_\phi$, где $\phi \in L^2(0,T)$, H_ϕ — решение задачи (21).

Известно (см. [5, 7]), что для любого $\phi \in L^2(0,T)$ существует единственная функция $H_\phi \in H^1(0,T)$, удовлетворяющая вариационному неравенству

$$\int_0^T \frac{d}{dt} H_\phi\left(v - H_\phi\right)dt + \mathcal{L}\int_0^T H_\phi\left(v - H_\phi\right)dt \geq \\ \geq \mathcal{L}\int_0^T \phi\left(v - H_\phi\right)dt, \tag{22}$$

где v — произвольный элемент из пространства $L^2(0,T)$ такой, что $v \geq 0$, и $H_\phi(0) = 0$, $H_\phi(t) \geq 0$ для любого $t \in (0,T)$. Неравенство (22) является вариационной формулировкой задачи (21).

Кроме этого, в работах [5, 7] исследованы свойства оператора $\mathbf{H}$, которые мы приводим в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Оператор $\mathbf{H} : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$, переводящий функцию ϕ в решение H_ϕ задачи* (21), *является непрерывным по Липшицу и монотонным, т.е. для любых функций ϕ и ψ из $L^2(0,T)$ и соответствующих им решений задачи* (21) *H_ϕ и H_ψ имеем неравенства*

$$\left\|H_\phi - H_\psi\right\|_{L^2(0,T)} \leq \left\|\phi - \psi\right\|_{L^2(0,T)}, \\ \int_0^T \left(H_\phi - H_\psi\right)(\phi - \psi)\,dt \geq 0. \tag{23}$$

Замечание 2. *В силу свойств оператора $\mathbf{H}$, сформулированных в теореме 3, усредненная задача* (20) *имеет единственное решение $u_0 \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, понимаемое в смысле интегрального тождества*

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v\,dxdt + 2\pi C_1^2 C_2^2 \int_0^T\int_\Omega \left(u_0 - \mathbf{H}(u_0)\right)v\,dxdt = \\ = \int_0^T\int_\Omega fv\,dxdt, \tag{24}$$

где v — произвольная функция из $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. Доказательство данного факта аналогично доказательству, проведенному в работе [5].

Пусть $H^j_{\phi,\varepsilon}(t)$, ($j \in \Upsilon_\varepsilon$) — решение на $(0,T)$ задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} H^j_{\phi,\varepsilon} + \mathcal{L} H^j_{\phi,\varepsilon} \geq \mathcal{L}\phi\left(P^j_\varepsilon, t\right), H^j_{\phi,\varepsilon} \geq 0, \\ H^j_{\phi,\varepsilon}\left(\dfrac{d}{dt} H^j_{\phi,\varepsilon} + \mathcal{L} H^j_{\phi,\varepsilon} - \mathcal{L}\phi\left(P^j_\varepsilon, t\right)\right) = 0, \\ H^j_{\phi,\varepsilon}(0) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $\phi(x,t) = \psi(x)\eta(t)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \in C^1([0,T])$, $x \in \Omega$ — параметр в задаче (25).

Для построения тестовой функции нам потребуются еще две вспомогательные задачи, связанные с емкостью соответствующих множеств,

$$\begin{gathered}\Delta q_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j};\\ q_\varepsilon^j = 1, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j; \quad q_\varepsilon^j = 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j,\end{gathered} \tag{26}$$

и

$$\begin{gathered}\Delta w_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j};\\ w_\varepsilon^j = 1, \quad x \in \partial T_{a_\varepsilon}^j; \quad w_\varepsilon^j = 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j.\end{gathered} \tag{27}$$

Введем функции

$$q_\varepsilon = \begin{cases} q_\varepsilon^j, & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, j \in \Upsilon_\varepsilon,\\ 1, & x \in G_\varepsilon^j, j \in \Upsilon_\varepsilon,\\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j},\end{cases} \tag{28}$$

и

$$w_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}, j \in \Upsilon_\varepsilon,\\ 1, & x \in T_{a_\varepsilon}^j, j \in \Upsilon_\varepsilon,\\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j}.\end{cases} \tag{29}$$

Заметим, что решение задачи (27) имеет вид

$$w_\varepsilon^j(x) = \frac{\ln\left(\dfrac{4r}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\dfrac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)},$$

где используется обозначение $r = \left|x - P_\varepsilon^j\right|$.

Следующий результат является характерным для размерности $n = 2$ и является ключевым моментом некоторых утверждений, которые будут использоваться позже.

Теорема 4. *Пусть $n = 2$. Справедливо неравенство*

$$\|w_\varepsilon - q_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le K\varepsilon, \tag{30}$$

где постоянная K здесь и далее не зависит от ε.

Доказательство этой теоремы дано в [14]. Легко видеть, что $w_\varepsilon \rightharpoonup 0$ и $q_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что в рамках метода, разработанного для случайных перфораций в работе [16], предполагается, что $w_\varepsilon = q_\varepsilon$. В этом смысле подход, предложенный в настоящей работе, более общий, поскольку одинаковым должен быть только периметр.

Введем вспомогательную функцию

$$W_{\varepsilon,\phi}(x,t) = \\ = \begin{cases} q_\varepsilon^j(x)\left(\phi(x,t) - H_{\phi,\varepsilon}^j(t)\right), & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, j \in \Upsilon_\varepsilon,\\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j}.\end{cases} \tag{31}$$

Учитывая свойства функций w_ε, q_ε и $H_{\phi,\varepsilon}^j$, имеем $P_\varepsilon W_{\varepsilon,\phi} \rightharpoonup 0$ слабо в $H^1\left(Q^T\right)$ при $\varepsilon \to 0$.

Ниже при доказательстве Теоремы 2 мы будем использовать «осциллирующую тестовую функцию»

$$v = \phi(x,t) - W_{\varepsilon,\phi}(x,t) \tag{32}$$

в вариационном неравенстве, соответствующем задаче (4). Заметим, что $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Действительно, для $x \in \partial G_\varepsilon^j$, $t \in [0,T]$ имеем

$$v(x,t) = \phi(x,t) - \phi(x,t) + \\ + H_{\phi,\varepsilon}^j(t) = H_{\phi,\varepsilon}^j(t) \ge 0.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство. Так как u_ε удовлетворяет вариационному неравенству (5), то u_ε удовлетворяет и интегральному неравенству вида

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v \nabla(v - u_\varepsilon)\,dxdt + \\ + \beta(\varepsilon)\int_0^T\int_{S_\varepsilon} \partial_t v(v - u_\varepsilon)\,dsdt \ge \\ \ge \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon)\,dxdt - \\ - \frac{1}{2}\beta(\varepsilon)\|v(x,0)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2,\end{gathered} \tag{33}$$

где v — произвольный элемент $\mathcal{K}_\varepsilon$ такой, что $\partial_t v \in L^2\left(0,T;L^2(S_\varepsilon)\right)$.

Возьмем в этом неравенстве в качестве v функцию, заданную формулой (32). Учитывая, что $v(x,0) = H^j_{\phi,\varepsilon}(0) = 0$, получим

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi}\right)\nabla\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)dxdt + \\ +\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\partial_t H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\left(H^j_{\phi,\varepsilon} - u_\varepsilon\right)dsdt \geq \\ \geq \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)dxdt. \tag{34}$$

Учитывая, что $W_{\varepsilon,\phi} \rightharpoonup 0$ слабо в $H^1\left(Q^T\right)$ при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)dxdt = \\ = \int_0^T\int_{\Omega} f\left(\phi - u_0\right)dxdt. \tag{35}$$

Аналогично,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\phi\nabla\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)dxdt = \\ = \int_0^T\int_{\Omega}\nabla\phi\nabla\left(\phi - u_0\right)dxdt. \tag{36}$$

В силу определения $W_{\varepsilon,\phi}$ и Теоремы 4, имеем

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla W_{\varepsilon,\phi}\nabla\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)dxdt = \\ = \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}}\left(\phi(x,t) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times \\ \times\nabla q^j_\varepsilon\nabla\left(\phi(x,t) - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)dxdt + \\ + \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} q^j_\varepsilon\nabla\phi\nabla\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)dxdt = \\ = \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}}\nabla q^j_\varepsilon\nabla\left(\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times\right. \\ \left.\times\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)\right)dxdt + \kappa_\varepsilon = \\ = \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}}\nabla\left(q^j_\varepsilon - w^j_\varepsilon\right)\nabla\left(\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}\right)\times\right. \\ \left.\times\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)\right)dxdt + \\ + \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}}\nabla w^j_\varepsilon\nabla\left(\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times\right. \\ \left.\times\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)\right)dxdt + \kappa_\varepsilon = \\ = \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{T^j_{a_\varepsilon}}}\nabla w^j_\varepsilon\nabla\left(\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times\right. \\ \left.\times\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)\right)dxdt + \theta_\varepsilon \equiv J_\varepsilon + \theta_\varepsilon, \tag{37}$$

где κ_ε, $\theta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

$$J_\varepsilon \equiv \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{T^j_{a_\varepsilon}}}\nabla w^j_\varepsilon\nabla\left(\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times\right. \\ \left.\times\left(\phi - W_{\varepsilon,\phi} - u_\varepsilon\right)\right)dxdt.$$

Учитывая, что $\partial_\nu w^j_\varepsilon\,|_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} = \dfrac{4}{\varepsilon\ln\left(\dfrac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$, $\partial_\nu w^j_\varepsilon\,|_{\partial T^j_{a_\varepsilon}} = -\dfrac{1}{a_\varepsilon\ln\left(\dfrac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$, получим

$$J_\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon\ln\left(\dfrac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\times \\ \times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\left(\phi(x,t) - u_\varepsilon\right)dsdt - \\ - \frac{1}{a_\varepsilon\ln\left(\dfrac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{a_\varepsilon}}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,x\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times \\ \times\left(H^j_{\phi,\varepsilon} - u_\varepsilon\right)dsdt.$$

Воспользуемся оценкой, полученной в [14]

$$\left|\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times\right. \\ \times\left(\phi(x,t) - u_\varepsilon\right)dsdt - \\ -\frac{l}{2\pi}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{a_\varepsilon}}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right) - H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\right)\times \\ \left.\times\left(\phi(x,t) - u_\varepsilon\right)dsdt\right| \leq Ka_\varepsilon\varepsilon^{-1}. \tag{38}$$

В силу условий (1) и (2), правая часть оценки (38) стремится к нулю, если $\varepsilon \to 0$.

Из оценки (38) выводим

$$-\frac{1}{a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\times$$

$$\times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{a_\varepsilon}}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)-H^j_{\phi,\varepsilon}\right)\left(H^j_{\phi,\varepsilon}(t)-u_\varepsilon\right)dsdt=$$

$$=\left\{-\frac{\beta(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)a_\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\times\right.$$

$$\times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{a_\varepsilon}}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)-H^j_{\phi,\varepsilon}\right)\left(H^j_{\phi,\varepsilon}(t)-u_\varepsilon\right)dsdt+$$

$$+\frac{2\pi\beta(\varepsilon)}{l\beta(\varepsilon)a_\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\times \tag{39}$$

$$\left.\times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)-H^j_{\phi,\varepsilon}\right)\left(H^j_{\phi,\varepsilon}(t)-u_\varepsilon\right)dsdt\right\}-$$

$$-\frac{2\pi\beta(\varepsilon)}{l\beta(\varepsilon)a_\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\times$$

$$\times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)-H^j_{\phi,\varepsilon}\right)\left(H^j_{\phi,\varepsilon}(t)-u_\varepsilon\right)dsdt\equiv$$

$$\equiv B_{1,\varepsilon}+B_{2,\varepsilon}.$$

В силу (38) имеем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}B_{1,\varepsilon}=0$. Учитывая (2), выводим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}B_{2,\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\pi C_2^2\beta(\varepsilon)}{l}\times$$
$$\times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\left(\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)-H^j_{\phi,\varepsilon}\right)\times \tag{40}$$
$$\times\left(H^j_{\phi,\varepsilon}(t)-u_\varepsilon\right)dsdt=0.$$

Принимая во внимание (39), (40) и (34), соберем все интегралы по S_ε. Тогда получим

$$\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\partial_t H^j_{\phi,\varepsilon}(t)\left(H^j_{\phi,\varepsilon}-u_\varepsilon\right)dsdt+$$
$$+\frac{2\pi C_2^2\beta(\varepsilon)}{l}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\left(H^j_{\phi,\varepsilon}-\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)\right)\times \tag{41}$$
$$\times\left(H^j_{\phi,\varepsilon}(t)-u_\varepsilon\right)dsdt=$$
$$=\beta(\varepsilon)\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G^j_\varepsilon}\left(\partial_t H^j_{\phi,\varepsilon}\frac{2\pi C_2^2}{l}\times\right.$$
$$\left.\times\left(H^j_{\phi,\varepsilon}-\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)\right)\right)\left(H^j_{\phi,\varepsilon}-u_\varepsilon\right)dsdt\le 0.$$

Для интегралов по $\partial T^j_{\varepsilon/4}$ имеем ([5])

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{4}{\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\right)\times$$
$$\times\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\left(H^j_{\phi,\varepsilon}-\phi\left(P^j_\varepsilon,t\right)\right)\times \tag{42}$$
$$\times\left(\phi-u_\varepsilon\right)dsdt=2\pi C_1^2C_2^2\int_0^T\int_\Omega\left(H_\phi-\phi\right)\times$$
$$\times\left(\phi-u_0\right)dxdt.$$

Из неравенства (34) и из (35)–(42) следует, что u_0 удовлетворяет неравенству

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla\phi\nabla\left(\phi-u_0\right)dxdt+$$
$$+2\pi C_1^2C_2^2\int_0^T\int_\Omega\left(\phi-H(\phi)\right)\left(\phi-u_0\right)dxdt\ge \tag{43}$$
$$\ge\int_0^T\int_\Omega f\left(\phi-u_0\right)dxdt,$$

где ϕ – произвольная функция из $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. Теперь, используя непрерывность оператора $\mathbf{H}$, выводим, что u_0 – единственное обобщенное решение задачи (20). Для этого подставим $\phi=u_0\pm\lambda w$, где $w\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, $\lambda>0$, и перейдем к пределу при $\lambda\to 0$ в интегральном неравенстве. Тогда получим, что функция u_0 удовлетворяет в точности интегральному тождеству (24).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования Ж.И. Диаза были частично профинансированы проектом PID2020-112517GB-I00 Испанского государственного исследовательского агентства (The Spanish State Research Agency, AEI).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzov V.V.* Attractors and a "strange term" in homogenized equation // Comptes Rendus Mecanique. 2020. V. 348. I. 5. P. 351–359.
2. *Cioranescu D., Murat F.* Un terme étrange venu d'ailleurs // Nonlinear Part. Diff. Eq. Appl. 1982. V. 60. P. 98–138.
3. *Conca C., Murat F., Timofte C.* A generalized strange term in Signorini's type problems // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2003. V. 57. I. 3. P. 773–805.
4. *Díaz J.I., Gómez-Castro D., Shaposhnikova T.A.* Nonlinear Reaction-Diffusion Processes for Nanocomposites. Anomalous improved homogenization. Berlin. De Gruyter. 2021. P. 184. doi: https://doi.org/10.1515/9783110648997
5. *Díaz J.I., Podolskiy A.V., Shaposhnikova T.A.* Unexpected regionally negative solutions of the homogenization of Poisson equation with dynamic unilateral boundary conditions: critical symmetric particles. // Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 2023. V. 118. I. 9. https://doi.org/10.1007/s13398-023-01503-w
6. *Díaz J.I., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* A strange non-local monotone operator arising in the homogenization of a diffusion equation with dynamic nonlinear boundary conditions on particles of critical size and arbitrary shape // EJDE. 2022. V. 2022, No. 52, P. 1–32.
7. *Подольский А.В., Шапошникова Т.А.* Усреднение параболического уравнения в перфорированной области с односторонним динамическим граничным условием: критический случай. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 68, № 4 (2022), С. 671–685.
8. *Jager W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A.* Homogenization of a variational inequality for the Laplace operator with nonlinear restriction for the flux on the interior boundary of a perforated domain // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2014. V. 15. P. 367–380.
9. *Sandrakov G.* Homogenization of variational inequalities with the Signorini condition on perforated domains. // Doklady Mathematics. 2004. V. 70. No. 3. P. 941–944.
10. *Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A.* On homogenization problem for the Laplace operator in partially perforated domains with Neumann's condition on the boundary of cavities // Rend. Mat. Acc. Lincei. 1995. V. 6. S. 9. P. 133–142.
11. *Пастухова С.Е.* Усреднение смешанной задачи с условием Синьорини для эллиптического оператора в перфорированной области // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 2. С. 87–102. https://doi.org/10.4213/sm544
12. *Anguiano M.* Existence, uniqueness and homogenization of nonlinear parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media. // Mediterr. J. Math. 2020. V. 17. No. 1. P. 1–22.
13. *Timofte C.* Parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media // Math. Model. Anal. 2003. V. 8. P. 337–350.
14. *Перес Е., Шапошникова Т.А., Зубова М.Н.* Задача усреднения в области, перфорированной мелкими изопериметрическими полостями с нелинейным краевым условием третьего типа на их границе // Доклады Академии Наук. 2014. Т. 457. № 5. С. 520–525. doi: 10.7868/S086956521423008X
15. *Díaz J.I., Gómez-Castro D., Timofte C.* The effectiveness factor of reaction-diffusion equations: homogenization and existence of optimal pellet shapes // Journal of Elliptic and Parabolic Equations. 2016. V. 2. I. 1. P. 119–129.
16. *Caffarelli L.A., Mellet A.* Random homogenization of an obstacle problem // Ann. l'Institut Henri Poincare Anal. Non Lineaire. 2009. V. 26. I. 2. P. 375–395.
17. *Wang W., Duan J.* Homogenized Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations with Dynamical Boundary Conditions // Commun. Math. Phys. 2007. V. 275. P. 163–186.
18. *Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И.* Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле // Матем. сб. 2021. Т. 212. № 8. С. 33–88.
19. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
20. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. AMS, 2010. 749 p.

APERIODICAL ISOPERIMETRIC PLANAR HOMOGENIZATION WITH CRITICAL DIAMETER: UNIVERSAL NON-LOCAL STRANGE TERM FOR A DYNAMICAL UNILATERAL BOUNDARY CONDITION

J. I. Diaz[a], T. A. Shaposhnikova[b], A. V. Podolskiy[b]

[a] *Institute of Interdisciplinary Mathematics, Complutense University of Madrid, Madrid, Spain*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We study the asymptotic behavior of the solution to the diffusion equation in a planar domain, perforated by tiny sets of different shapes with a constant perimeter and a uniformly bounded diameter, when the diameter of a basic cell ε goes to 0. This makes the structure of the heterogeneous domain aperiodical. On the boundary of the removed sets (or the exterior to a set of particles, as it arises in chemical engineering), we consider the dynamic unilateral Signorini boundary condition containing a large-growth parameter $\beta(\varepsilon)$. We derive and justify the homogenized model when the problem's parameters take the "critical values". In that case, the homogenized is universal (in the sense that it does not depend on the shape of the perforations or particles) and contains a "strange term" given by a non-linear, non-local in time, monotone operator $\mathbf{H}$ that is defined as the solution to an obstacle problem for an ODE operator. The solution of the limit problem can take negative values even if, for any ε, in the original problem, the solution is non-negative on the boundary of the perforations or particles.

Keywords: homogenization of parabolic equation, perforated domain, critical case, strange nonlocal term