

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ПЛАЗМЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН Г. Г. Лазарева^{1,*}, И. П. Оксогоева^{1,**}, А. В. Судников^{2,***}

Поступило 03.08.2023 г.

После доработки 01.09.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

В работе представлена новая математическая модель переноса плазмы в спиральном магнитном поле. Удержание плазмы в установке осуществляется за счет передачи импульса от магнитного поля с винтовой симметрией вращающейся плазме. Математическая модель основана на стационарном уравнении переноса плазмы в аксиально-симметричной постановке. Модель использует экспериментальные данные, полученные на установке СМОЛА, созданной в ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН. Полученное с помощью численного моделирования распределение концентрации вещества подтвердило эффект удержания, полученный в эксперименте. Получены зависимости интегральных характеристик вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Математическая модель разработана для предсказания параметров удержания плазмы в проектируемых установках со спиральным магнитным полем.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнение переноса, винтовое магнитное поле

DOI: 10.31857/S2686954323600945, **EDN:** ZDEUXI

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование течения плазмы в магнитном поле на основе сложных математических моделей, включающих в себя описание многих тонких эффектов, имеет большую историю [1–6] и значительные достижения. Эти исследования представляют существенный интерес для управляемого термоядерного синтеза, изучения стойкости материалов под воздействием мощных тепловых нагрузок, лабораторного моделирования астрофизических процессов и ряда других фундаментальных и прикладных научных задач.

Основным методом термоизоляции плазмы является ее удержание в магнитном поле с различными конфигурациями. Наибольший прогресс достигнут в натурных и вычислительных экспериментах [7–9] для систем с тороидальной топологией магнитного поля. Современные успехи математики в этой области вышли на очень

высокий уровень, созданы общедоступные пакеты для математического моделирования работы таких систем.

Альтернативным подходом является удержание плазмы в открытых магнитных системах, где поле близко к осесимметричному, а его силовые линии пересекают границу области удержания в двух точках [10]. Плюсами данного подхода являются более эффективное использование энергии магнитного поля, масштабируемость и инженерная простота системы. Основной научной задачей физики открытых ловушек является снижение потерь частиц и энергии вдоль силовых линий магнитного поля в областях, где они покидают область удержания. Достигнут большой прогресс в понимании физики открытых магнитных конфигураций и достигнутых параметров плазмы [11]. Свой вклад внесло математическое моделирование установок, основанных на принципе многопробочного удержания [12–14].

Разнообразие и сложность параметров течения плазмы определяют необходимость создания специализированных моделей различных процессов. Универсальной модели нет. Математические модели физики плазмы характеризуются различными пространственно-временными масштабами и особенностями протекания процессов. Обычно такие модели объединяют уравнения механики сплошной среды с учетом действия электромагнитных сил и уравнения Максвелла.

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: lazareva-gg@rudn.ru

**E-mail: oksogi@mail.ru

***E-mail: a.v.sudnikov@inp.nsk.su

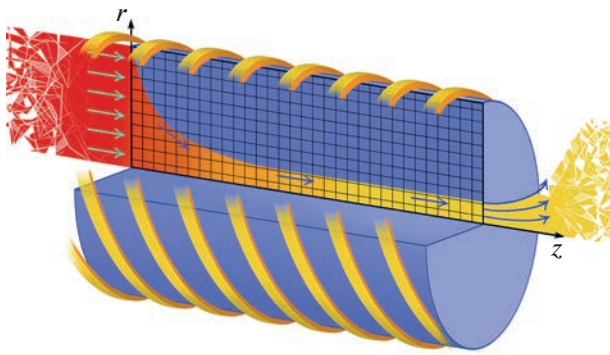


Рис. 1. Схема центральной части ловушки. Расчетная область в поперечном сечении образца, спиральные магниты (желтый) и течение плазмы (красно-желтый).

В зависимости от выбора приближения различают кинетические, магнитогидродинамические и транспортные модели плазмы [15].

Удержание плазмы магнитным полем с винтовой симметрией было предложено в качестве развития метода многопробочного удержания [16]. В системе отсчета вращающейся плазмы движение магнитных возмущений имеет компоненту скорости, сонаправленную с магнитным полем, что позволяет передавать импульс запертым частицам. Столкновения между пролетными и запертыми частицами обеспечивают эффективную силу, действующую на плазму в целом и способствующую возврату ионов в область удержания.

Установка СМОЛА (Спиральная Магнитная Открытая Ловушка) разработана и построена в 2017 г. в Институте ядерной физики СО РАН им. Будкера для экспериментальной проверки этой идеи [17, 18]. Область, в которой удерживается плазма в установке СМОЛА, с одной стороны, ограничена классической пробкой, с другой — многопробочной секцией с винтовым магнитным полем. В эксперименте варьируются такие параметры, как продольное магнитное поле, соотношение продольного и винтового магнитных полей, плотность и скорость вращения плазмы. Установка СМОЛА предназначена для моделирования эффектов винтового удержания при низкой (а потому легко достижимой) температуре плазмы. Для масштабирования винтового удержания на системы термоядерного класса необходимы детальное сравнение экспериментально наблюдаемых потоков вещества с модельными и дальнейший расчет эффективности системы большего масштаба на основе математической модели. В настоящее время показано соответствие наблюдаемых результатов приближенным теоретическим оценкам. В то же время, точного аналитического решения для теории винтового удержания не построено, поэтому сравнение мо-

жет опираться на результаты численного решения уравнений движения плазмы.

Математическая модель переноса вещества в винтовом магнитном поле построена на основе уравнений из работ [17–19] и параметров установки СМОЛА. Математическое моделирование процесса было проведено впервые в работе [20]. Развитием этого нового направления исследований является определение параметров процесса, которые невозможно измерить в эксперименте, включение в расчеты сложных конфигураций магнитного поля. Цель работы состоит в предсказании параметров удержания установок на стадии их проектирования.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В моделируемом эксперименте происходит установление параметров плазмы и электромагнитного поля в течение 40 мс и затем наступает фаза, когда процесс стационарен в течение 120 мс, после чего разряд отключается. Основная задача экспериментов и математического моделирования состоит в исследовании удержания плазмы, при которых все параметры постоянны. Рассмотрим движение плазмы в центральной части ловушки, имеющей форму цилиндра (см. рис. 1). Вещество входит в область удержания из источника плазмы через левый торец цилиндра и выходит в расширитель через правую границу. Течение плазмы осесимметрично, что позволяет ограничиться двумерной постановкой задачи [21]. Таким образом, удержание плазмы в спиральном магнитном поле должно описываться стационарными уравнениями в поперечном сечении центральной части установки в плоскости (r, z) .

В статье [19] получены выражения для компонентов радиального и продольного переноса частиц в винтовом магнитном поле. Система уравнений описывает динамику плазмы в МГД-приближении в аксиально-симметричной постановке. Различия в движении запертых и пролетных ионов учитываются в виде эффективной силы трения, зависящей от взаимной скорости компонент и доли запертых частиц. Продольная сила, действующая на плазму, возникает в результате взаимодействия радиального электрического тока захваченных ионов с азимутальной компонентой винтового магнитного поля. Учитывается диффузия плазмы поперек магнитного поля. Исключение зависимых переменных сводит систему уравнений к уравнению неразрывности потока.

Рассмотрим область $[0, r_{\max}] \times [0, z_{\max}]$ в поперечном сечении центральной части установки (рис. 1). В безразмерных величинах область является единичным квадратом. Считаем, что вещество не достигает стенок ловушки, на оси z ставим условие симметрии, на входе и выходе вещества

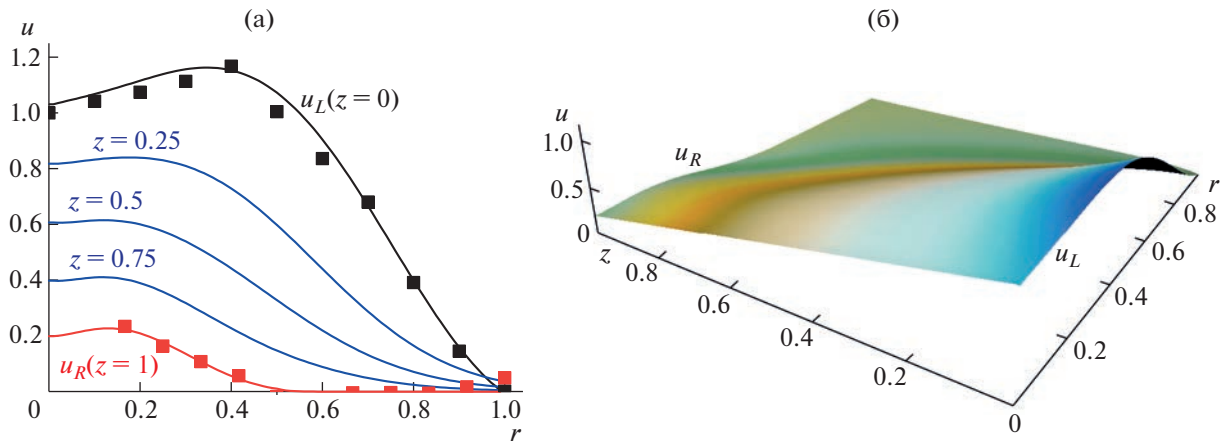


Рис. 2. Концентрация плазмы (а) по сечениям оси z . Расчетное (линия) и экспериментальное (квадратики) граничное распределение плазмы на входе (черный) и на выходе (красный). Расчетное распределение плазмы внутри области (синие линии). Распределение концентрации плазмы (б) в поперечном сечении установки.

задаем граничное распределение концентрации вещества $u(r, 0) = u^L(r)$ и $u(r, z_{\max}) = u^R(r)$. Для расчетов использованы экспериментальные данные [11] для распределения концентрации на границах (рис. 2 а). Таким образом, стационарная задача имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{l}{x(r)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial (T(r)u(r, z))}{\partial z} + \\ + l(1 + x(r)) \frac{\partial (\Phi(r, z)\zeta(r)u(r, z))}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} lZ^{-1}\zeta(r) \frac{\partial (T(r)u(r, z))}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} lD \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, z) = 0, \quad u(r, 0) = u_L(r), \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, z) = 0, \quad u(r, 1) = u_R(r), \end{cases} \quad (1)$$

где u — концентрация вещества, $T = T_i + T_e$, $T_i = 4$ ЭВ и $T_e = 30(1 - (r/r_0)^2)$ — ионная и электронная температуры, Λ — отношение длины системы к длине свободного пробега Λ иона, $\kappa(r, R_m)$ — доля запертых частиц, $l = 216$ см — длина системы вдоль силовой линии, Z — среднее зарядовое число одного иона, D — коэффициент диффузии в поперечном поле. Доля запертых частиц $\kappa(r, R_m) = 1 - 1/R(r, R_m)$, $R(r, R_m) = 2(R_m - 1)(r/a)^2 + 1$, где $R_m = 1.52$ — глубина гофрировки. Параметр $\zeta = c/V_z$ является отношением скорости звука $c_s = (T_e/M)^{1/2}$ и продольной скорости V_z движения магнитных возмущений при вращении плазмы в собственном амбиполярном электрическом поле. В уравнении (1) физические величины обезразмерены на: $r_0 = a$, $z_0 = l$, $\phi_0 = T_e/e$, $u_0 = u_{\max}$,

$T_0 = T_e$, где $a = 8$ см — граница камеры, в которой может существовать плазма.

Известно, что величина потенциала снижается с увеличением z за счет наличия поперечной проводимости плазмы. Его распределение в пространстве задается как убывающая вдоль оси производная абсолютной величины электрического поля (рис. 3 а):

$\Phi(r, z) = \left(1 - \frac{0.002z}{h}\right) \frac{\partial |\phi(r)|}{\partial r}$. Измеряемый с помощью зондов потенциал плазмы в экспериментах на установке СМОЛА зависит от параметров эксперимента. Максимум ϕ варьируется в пределах от $2T_e/e$ до $3T_e/e$. Максимальное значение безразмерного потенциала ϕ для установок следующего поколения, в которых возможно использование принципа винтового удержания, также лежит в этих же пределах [22, 23]. Экспериментально наблюдаемое распределение потенциала в центральной области плазмы (при значениях радиуса меньших 0.6 в безразмерных величинах) близко к квадратичному, далее в периферийной области плазмы производная потенциала по радиусу снижается. Погрешность измерения потенциала в эксперименте составляет около 5%. Степень и коэффициенты аппроксимирующего полинома подобраны таким образом, чтобы его отклонение от экспериментально измеренных в референсном эксперименте значений было сопоставимым с экспериментальной погрешностью.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача (1) была реализована методом установления [20] и более экономичным методом верхней релаксации [24] при параметре релаксации $\omega = 2 - O(h)$ и аппроксимации смешанной производной на шаблоне [25]. Можно заметить, что за-

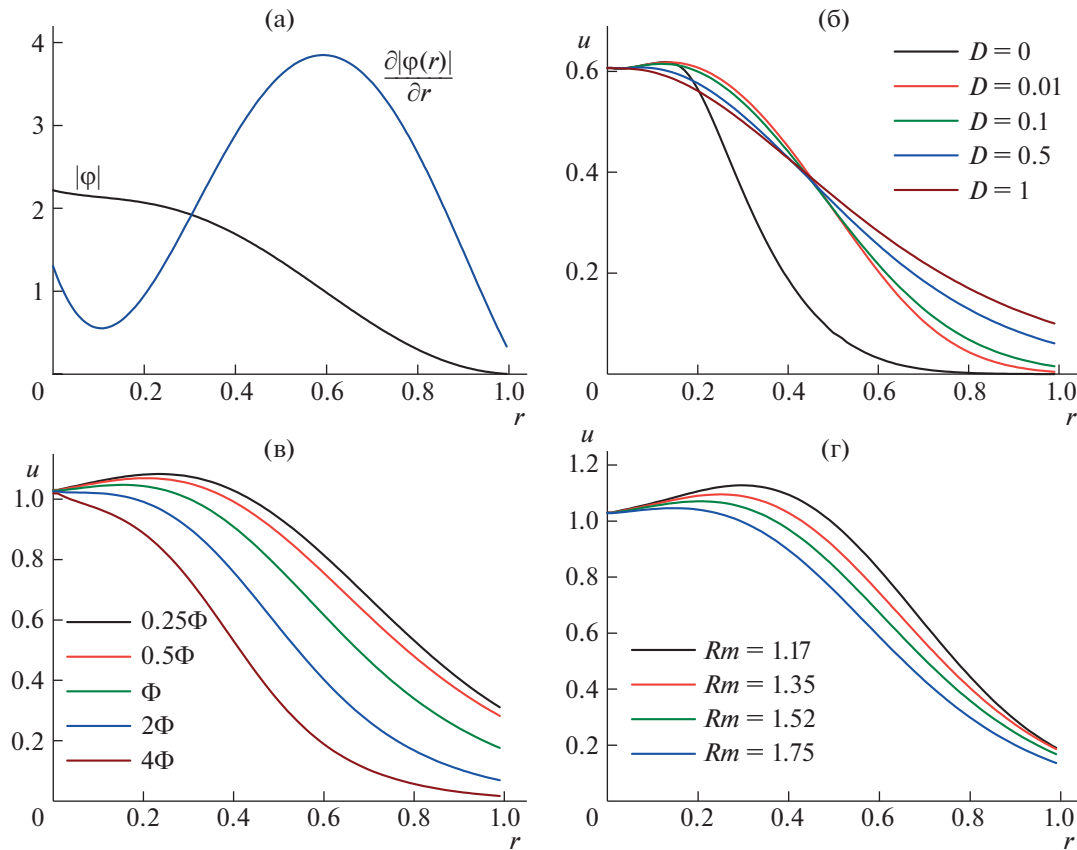


Рис. 3. Зависимости от радиуса установки (а) модуля потенциала электрического поля (черная линия) и его производной (синяя линия). Распределение концентрации плазмы по сечению оси $z = 0.4$ при различных значениях коэффициента диффузии (б), производной абсолютной величины электрического поля (в) и глубины гофрировки (г).

дача (1) содержит параметр $\zeta(r) = 1/Ar$, полученный аппроксимацией экспериментальных данных, здесь $A = 20$. На оси при $r = 0$ параметр ζ ограничен значением при $r = \rho_B$, где $\rho_B = V_{Ti}mc/eB$ — лармовский радиус. Для параметров установки СМОЛА $\rho_B \approx 0.3\text{--}0.4$ см. Это обусловлено тем, что ион движется по лармовской орбите (вращается в магнитном поле), поэтому его радиальная координата осциллирует. В рассматриваемой модели все воздействия усредняются, иону приписывается координата центра окружности, по которой он движется в магнитном поле. То есть координата равна нулю для ионов, которые облетают ось вокруг и находятся на расстоянии лармовского радиуса от нее. Поэтому для исключения особенностей решения при расчетах в окрестности оси симметрии безразмерный параметр ζ задается следующим образом:

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1/Ar, & r > \rho_B, \\ 1/A\rho_B, & \rho_B \geq r \geq 0. \end{cases}$$

Наряду с другими преимуществами, метод релаксации интересен удобством использования в

цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точки вида “крест” универсально и не зависит от выбора системы координат.

На рис. 2а приведены экспериментальные значения концентрации плазмы на входе (квадратики) и на выходе (кружочки) и их интерполяция вида:

$$u_L(r) = 1.03 + 0.46r - 1.52r^2 + 14.48r^3 - 44.17r^4 + 43.77r^5 - 14.05r^6,$$

$$u_R(r) = 0.2 - 0.12r + 9.11r^2 - 73.43r^3 + 210.13r^4 - 285.64r^5 + 188.54r^6 - 48.78r^7.$$

Потенциал электрического поля $\phi(r)$ введен в виде полинома (рис. 3а), интерполирующего экспериментальные данные:

$$\phi(r) = -2.21776 + 1.31r - 7.79r^2 + 31.18r^3 - 33.43r^4 + 10.94r^5.$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В ходе моделирования переноса вещества в винтовом магнитном поле получены распределения концентрации при различных значениях глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Для дальнейшего анализа результатов расчетов и сравнения с данными экспериментов приводятся сечения вдоль оси z (рис. 2а). Распределение концентрации плазмы показано в расчетной области, имеющей в безразмерном виде форму единичного квадрата (рис. 2б). Расчеты показывают убывание плотности плазмы, что подтверждает эффект удержания, наблюдаемый в экспериментах.

Так как в эксперименте датчик, измеряющий концентрацию плазмы, находится при $z = 0.4$, то на рис. 3 приведены результаты расчетов только в этом сечении. Проведены вычислительные эксперименты для различных допустимых значений коэффициента диффузии, производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки. Расчеты показали, что при уменьшении коэффициента диффузии в поперечном поле вещество начинает прижиматься к оси. Совпадение расчетных распределений с экспериментальными с учетом конечной точности экспериментальных изменений достигается при коэффициенте диффузии в диапазоне $D = 0.01–0.1$. Дальнейшие расчеты проводились при $D = 0.1$. С увеличением производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки наблюдается сжатие плазменного шнура к оси. Полученные результаты соответствуют экспериментальным данным. В дальнейшем описанный метод может быть использован для прогнозирования работы действующих и проектируемых установок для удержания плазмы в винтовом магнитном поле. Одной из основных задач для подобного прогнозирования будет корректное определение граничных условий и численных коэффициентов в уравнении переноса без использования априорно известных экспериментальных распределений параметров плазмы. Для этого планируется проведение расчетов, с использованием известного точного граничного условия на бесконечности. В качестве распределения плотности плазмы на выходе из секции улучшенного удержания будет приниматься значение решения при $z = 1$.

5. ВЫВОДЫ

Представлена математическая модель переноса плазмы в спиральной открытой магнитной ловушке СМОЛА. Получены зависимости интегральной характеристики плотности вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Наблюдается каче-

ственное соответствие смоделированных зависимостей экспериментальным данным при значениях безразмерного коэффициента диффузии $D = 0.01–0.1$ и средней по сечению глубины гофрировки $R_m = 1.52$. В расчетах наблюдается эффект пинчевания (уменьшения среднего радиуса) плазменной струи, проявляющийся и в эксперименте. Дальнейшая работа будет направлена на расширение области параметров, при которых модель обладает достаточной предсказательной силой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Численные методы решения многомерных задач механики и физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1416–1464.
2. Брушлинский К.В., Савельев В.В. Магнитные ловушки для удержания плазмы // Матем. Моделирование. 1999. Т. 11. № 5. С. 3–36.
3. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы // Серия “Компьютеры в физике”. М.: Физматлит, 1993.
4. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. Избранные труды. М.: Физматлит, 2001.
6. Березин Ю.А., Дудникова Г.И. Численные модели плазмы и процессы пересоединения. М.: Наука, 1985.
7. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. 020. 20.
8. Cohen B., Barnes D., Dawson J., Hammett G., Lee W., Kerbel G., Leboeuf J., Liewer P., Tajima T., Waltz R. The numerical tokamak project: simulation of turbulent transport // Comput. Phys. Commun. 1995. V. 87. I. 1–2. P. 1–15.
9. Грубер Р., Дегтярев Л.М., Купер А., Мартынов А.А., Медведев С.Ю., Шафранов В.Д. Трехмерная модель равновесия плазмы с полоидальным представлением магнитного поля // Физика плазмы. 1996. Т. 22. № 3. С. 204.
10. Бурдаков А.В., Поступаев В.В. Многопробочная ловушка: путь от пробкотрона Будкера к линейному термоядерному реактору // У.Ф.Н. 2018. Т. 188. № 6. С. 651–671.
11. Bagryansky P.A., Beklemishev A.D., Postupaev V.V. Encouraging Results and New Ideas for Fusion in Linear Traps // J. Fusion Energy. 2019. V. 38. P. 162–181.
12. Berendeev E.A., Dimov G.I., Dudnikova G.I., Ivanov A.V., Lazareva G.G., Vshivkov V.A. Mathematical and experimental simulation of a cylindrical plasma target trap

- with inverse magnetic mirrors // *J. Plasma Phys.* 2015. V. 81. I. 5.
13. *Пережёлкина А.Ю., Левченко В.Д., Горячев И.А.* Трёхмерный кинетический код CFHall для моделирования замагниченной плазмы // *Матем. Моделирование*. 2013. Т. 25. № 11. С. 98–110.
 14. *Астерлин В.Т., Бурдаков А.В., Поступаев В.В.* Моделирование динамики плотного излучающего плазменного сгустка для установки ГОЛ-3-II // *Сиб. журн. индустр. матем.* 1998. Т. 1. № 2. С. 45–50.
 15. *Калиткин Н.Н., Костомаров Д.П.* Математические модели физики плазмы (обзор) // *Матем. моделирование*. 2006. Т. 18. № 11. С. 67–94.
 16. *Beklemishev A.D.* Helicoidal System for Axial Plasma Pumping in Linear Traps // *Fusion Sci. Technol.* 2013. V. 63. № 1. P. 355–357.
 17. *Postupaev V.V., Sudnikov A.V., Beklemishev A.D., Ivanov I.A.* Helical mirrors for active plasma flow suppression in linear magnetic traps // *Fusion Eng. Des.* 2016. V. 106. P. 29–31.
 18. *Sudnikov A.V., Ivanov I.A., Inzhevatkina A.A., Larichkin M.V., Lomov K.A., Postupaev V.V., Tolkachev M.S., Ustyuzhanin V.O.* Plasma flow suppression by the linear helical mirror system // *J. Plasma Phys.* 2022. V. 88. № 1.
 19. *Beklemishev A.D.* Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation // *AIP Conference Proceedings*. 2016. V. 1771.
 20. *Lazareva G.G., Oksogoeva I.P., Sudnikov A.V.* Mathematical Modeling of Plasma Transport in a Helical Magnetic Field // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43. № 10. P. 2685–2691.
 21. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С.* Расчет осесимметричных МГД-течений в канале с внешним продольным магнитным полем // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46. № 3. С. 550–559.
 22. *Sudnikov A.V., Beklemishev A.D., Postupaev V.V., Burdakov A.V., Ivanov I.A., Vasilyeva N.G., Kuklin K.N., Sidorov E.N.* SMOLA device for helical mirror concept exploration // *Fusion Eng. Des.* 2017. V. 122. P. 86–93.
 23. *Сковородин Д.И., Черноштанов И.С., Амиров В.Х. и др.* Газодинамическая многопробочная ловушка ГДМЛ. Н.: Препринт ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН, 2023.
 24. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
 25. *Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П., Шишкин Г.И.* Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными // *Матем. Моделирование*. 2001. Т. 13. № 2. С. 17–26.

MATHEMATICAL MODEL OF PLASMA TRANSFER IN A HELICAL MAGNETIC FIELD

Corresponding member of the RAS G. G. Lazareva^a, I. P. Oksogoeva^a, and A. V. Sudnikov^b

^a *Peoples Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation*

^b *Budker Institute of Nuclear Physics of Siberian Branch Russian Academy of Sciences (BINP SB RAS), Novosibirsk, Russian Federation*

The paper presents the results of mathematical modeling of plasma transfer in a spiral magnetic field using new experimental data obtained at the SMOLA trap created at the Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS. Plasma confinement in the trap is carried out by transmitting a pulse from a magnetic field with helical symmetry to a rotating plasma. New mathematical model is based on a stationary plasma transfer equation in an axially symmetric formulation. The distribution of the concentration of the substance obtained by numerical simulation confirmed the confinement effect obtained in the experiment. The dependences of the integral characteristics of the substance on the depth of corrugation of the magnetic field, diffusion and plasma potential are obtained.

Keywords: mathematical modeling, transfer equation, helical magnetic field