

УДК 519.676

ЧИСЛЕННО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СУПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА СРЕДНЕГО ПОТОКА ЧАСТИЦ, РАЗМНОЖАЮЩИХСЯ В ОДНОРОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. чл.-корр. РАН Г. А. Михайлов^{1,2,*}, Г. З. Лотова^{1,2,**}

Поступило 14.04.2023 г.

После доработки 18.09.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

Для эффективного численно-аналитического исследования суперэкспоненциального роста среднего потока частиц с размножением в случайной среде вводится новая корреляционно-сеточная аппроксимация однородного случайного поля плотности. Сложность реализации траектории частицы при этом не зависит от корреляционного масштаба. Тестовые расчеты для критического шара с изотропным рассеянием показали высокую точность соответствующих оценок среднего потока. Для сеточной аппроксимации случайного поля плотности обоснована возможность гауссовской асимптотики средней скорости размножения частиц при уменьшении корреляционного масштаба.

Ключевые слова: численное статистическое моделирование, поток частиц, суперэкспоненциальная асимптотика, случайная среда, поле Вороного, сеточная аппроксимация

DOI: 10.31857/S2686954323600210, **EDN:** CZXVJY

1. Известно (см., например, [1]), что плотность потока частиц $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ в системе, образованной размножающей средой в области $\mathbf{D}$, в достаточно широких условиях является асимптотически экспоненциальной по времени t : $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \sim e^{\lambda t} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $t \rightarrow \infty$. Временная постоянная λ является ведущим характеристическим числом соответствующего однородного стационарного кинетического уравнения [1, 2], а $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — стационарная плотность потока (характеристическая функция этого уравнения). Используемые здесь и далее обозначения: $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — полное сечение (коэффициент ослабления); $\sigma = \sigma_s + \sigma_f + \sigma_c$, σ_s — сечение рассеяния, σ_f — сечение деления, σ_c — сечение поглощения; v — число частиц, вылетающих из точки деления; $\mathbf{v} = v\omega$ — вектор скорости, ω — единичный вектор направления, $v = |\mathbf{v}|$; $\mathbf{r}$ — пространственная точка.

С целью построения и исследования алгоритмов метода Монте-Карло далее в качестве соот-

ветствующей (см., например, [2]) математической модели процесса переноса используется однородная обрывающаяся с вероятностью единица цепь Маркова, состояниями которой являются фазовые точки $x_n = (\mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n, t_n)$, ($n = 0, 1, \dots, N$) последовательных “столкновений частицы с элементами вещества” (где $\mathbf{r}_n$ — точка n -го столкновения, $\mathbf{v}_n$ — скорость непосредственно перед столкновением, $t_n = t_{n-1} + |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|/|\mathbf{v}_n|$), которая определяется плотностью $f(x)$ распределения начального столкновения x_0 и субстохастической плотностью $k(x', x)$ перехода из состояния x' в x [2]. Плотность

столкновений $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ представляет собой ряд Неймана для интегрального уравнения второго рода $\varphi = K\varphi + f$, $f \equiv \varphi_0$, где K — интегральный оператор с ядром $k(\cdot, \cdot)$ [2]; предполагается, что $\|K\|_{L_1} < 1$.

Используемая обычно в теории переноса интенсивность излучения $\Phi(x)$ (плотность потока частиц) связана с плотностью столкновений соотношением $\varphi(x) = \sigma(x)\Phi(x)$. Методы Монте-Карло, как правило, используются для оценки линейных функционалов вида $J_h = (\varphi, h) = (\sigma\Phi, h)$, $h \in L_\infty$. Для построения весовых алгоритмов используется цепь Маркова с начальной плотностью $f_0(x)$ и плотностью перехода $p(x', x)$. При этом вводятся вспомогательные веса по форму-

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

*E-mail: gam@sscc.ru

**E-mail: lot@osmf.sscc.ru

лам $Q_0 = f(x_0)/f_0(x_0)$, $Q_n = Q_{n-1}k(x_{n-1}, x_n)/p(x_{n-1}, x_n)$. Если выполняются “условия несмещенности”

[2], то $J_h = E\xi$, где $\xi = \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n)$. Если, кроме того, $\|K_p\| < 1$, где K_p – оператор с ядром $k^2(x', x)/p(x', x)$, и $f^2/f_0 \in L_1(X)$, то $D\xi < +\infty$. Случайная величина ξ называется “оценкой по столкновениям” для функционала J_h . Если все весовые множители меньше единицы, то при $\|K\| < 1$ имеем и $\|K_p\| < 1$. Известно (см., например, [2]) соотношение, состоящее в том, что если в реализуемой вспомогательной модели используется сечение поглощения $\sigma_c + \lambda_0/v$, то текущий вес частицы в момент времени t после реализации столкновения домножается на величину $\exp(\lambda_0 t)$ и, следовательно, к получаемой в результате расчетов оценке значения λ надо добавлять λ_0 .

2. Далее рассматривается односкоростной процесс переноса ($v = \text{const}$) с изотропным рассеянием (в том числе после деления).

Лемма 1. Согласно кинетическому уравнению [2] односкоростной процесс переноса с изотропным рассеянием можно упростить с сохранением потока $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ путем следующей замены параметров:

$$\begin{aligned} \sigma_s, \sigma_c &\mapsto 0, \quad \sigma_f \mapsto \sigma_s + \sigma_f + \sigma_c, \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v}^* = \frac{\sigma_s + \mathbf{v}\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}. \end{aligned} \quad (1)$$

В упрощенном процессе каждое столкновение – это деление с коэффициентом $\mathbf{v}^*$, а длина свободного пробега распределена с плотностью $p(\ell) = \sigma(r(\ell))\exp(-\tau_{op}(\ell))$, где $\tau_{op}(\ell)$ – оптическая длина пробега [2]. Введя дополнительное искусственное поглощение, согласно замечанию в конце пункта 1, можно перейти к моделированию процесса без размножения.

Предполагается, что $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r})$ – однородное изотропное случайное поле, причем отношения σ_s/σ , σ_f/σ фиксированы. Если $h_0(\mathbf{r}) = I_D(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$, где I_D – индикатор области $\mathbf{D}$, то функционал $J(t, \sigma) = (\Phi, h_0) = \iint \Phi(\mathbf{r}, \omega, t) h_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\omega$ представляет собой полный поток частиц в области $\mathbf{D}$ для заданного момента времени t .

Как и в [3] полагаем, что $J(t, \sigma) \sim \exp^{\lambda(\sigma)t}$ при $t \rightarrow \infty$ для $f_0(t) = \delta(t)$ и $\int_0^\infty f(t)\exp^{-\lambda(\sigma)t} dt < C_0 < +\infty$. Соответственно этому, предполагая гауссовость случайной величины $\lambda(\sigma)$ и равномерность (по σ) предельного перехода $J(t, \sigma) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} C(\sigma)e^{\lambda(\sigma)t}$, мож-

но оценить асимптотику функции $EJ(t, \sigma) = J_t$ при $t \rightarrow \infty$:

$$J_t \approx \frac{C}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2d^2}\right) dx,$$

где $a = E\lambda(\sigma)$, $d^2 = D\lambda(\sigma)$. При этом также предполагается, что множители $C(\sigma)$ и $e^{\lambda(\sigma)t}$ в асимптотике слабо коррелированы и, следовательно, $C \approx EC(\sigma)$. Используя интегральную формулу из [4], далее получаем

$$J_t \approx C \exp\left(\frac{d^2}{2} t^2 + at\right). \quad (2)$$

Следовательно, можно предположить, что

$$\frac{d \ln J_t}{dt} \approx d^2 t + a. \quad (3)$$

Определяемый формулой (2) закон роста среднего числа частиц можно назвать “суперэкспоненциальным”. Отметим, что формулы (2), (3) могут служить основой для численных исследований конкретных вариантов задачи при $t < T < +\infty$ [3].

3. Символом $f_t^{(m)}$ далее обозначается m -кратная производная от функции f по t . Предполагается, что $f(\mathbf{r}, \omega, t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Лемма 2. [3] Пусть точка $(\mathbf{r}_0, \omega_0)$ распределена для $t_0 \equiv 0$ с плотностью $f_0(\mathbf{r}, \omega)$, выполняются условия несмещенности [2],

$$|f_t^{(m)}(\mathbf{r}, \omega, t)/f_0(\mathbf{r}, \omega)| < C_0 < +\infty, \quad \|K_p\| < 1.$$

Тогда выполняется соотношение $J^{(m)}(t) = E\xi_t^{(m)}$, где

$$\begin{aligned} \xi_t^{(m)} &= \sum_{k=0}^{N_c} Q_k h(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) f_t^{(m)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t - t_k) / f_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0), \\ Q_0 &\equiv 1, \end{aligned} \quad (4)$$

причем $D\xi_t^{(m)} < +\infty$, $m = 0, 1, \dots, n$. Справедливо равенство

$$\frac{J'_t}{J_t} = \frac{d \ln J_t}{dt} = \frac{E\xi'_t(\Omega, \sigma)}{E\xi_t(\Omega, \sigma)} \approx \frac{\tilde{J}'_t}{\tilde{J}_t}, \quad (5)$$

где $\tilde{J}'_t$, $\tilde{J}_t$ – соответствующие статистические оценки, получаемые методом двойной рандомизации [3].

Для каждой реализации среды здесь можно строить лишь одну траекторию Ω частицы, используя (5) для $m = 0; 1$.

Отметим, что полная дисперсия оценки $\tilde{J}'_t/\tilde{J}_t$ оценивается сверху стандартным способом с помощью линеаризации дроби (5).

4. Постановка задачи (мотивация работы). Ранее суперэкспоненциальный рост среднего потока был получен авторами для сферически симмет-

ричного случайного поля $\sigma(\mathbf{r})$ [3]. Целью настоящей работы является проведение аналогичного исследования для более реалистичного (см., например, [5]) однородного поля типа случайной мозаики Вороного (см. далее пункт 5). Для повышения эффективности численно-статистических расчетов предложена универсальная корреляционно-сеточная аппроксимация однородного поля с сохранением осредненного по реализациям корреляционного радиуса L , что обеспечивает, как показали расчеты, достаточно точную оценку среднего потока при достаточно малых L . Кроме весьма существенного уменьшения трудоемкости моделирования, такая аппроксимация дает возможность исследовать флуктуации результатов, соответствующие флуктуациям $\sigma(\mathbf{r})$, и выяснить возможность нормализации распределения параметра $\lambda(\sigma)$ при уменьшении корреляционного масштаба среды.

5. Детальные численные исследования (см., например, [6]) показали, что осредненная вероятность прохождения частицы в значительной степени определяется корреляционным радиусом

$$L = \int_0^\infty k(l)dl, \text{ где } k(l) - \text{коэффициент корреляции}$$

между значениями поля $\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r}')$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = l$, и одномерным распределением среды. В связи с этим в настоящей работе для исследования осредненного потока частиц в качестве базового используется имеющее простой геометрический смысл мозаичное поле Вороного. Оно строится на основе пуассоновского точечного потока $\{\mathbf{r}_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ интенсивности λ_p , который определяет разбиение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек, наиболее близких к одной из точек потока (мозаика или диаграмма Вороного). Геометрические свойства такого разбиения детально изучены, например, в [7]. Элементы разбиения являются выпуклыми многогранниками, и $L \approx 0.459\lambda_p^{-1/3}$ [7].

Предлагаемая в настоящей работе корреляционно-сеточная аппроксимация поля $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_h(\mathbf{r})$ строится путем разбиения пространства R^3 на ансамбль $\{S_h\}$ кубиков с ребром h , в каждом из которых значения поля выбираются независимо из одномерного распределения σ (с конечной дисперсией). Соответствующий эффективный корреляционный радиус ℓ_h получается путем осреднения указанного выше коэффициента корреляции $k(\ell)$ по $\mathbf{r} \in S_h$ и случайному направлению $\omega = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, т.е. по формуле

$$\ell_h = \frac{1}{4\pi h^3} \int \int_{S_h} \ell(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r} d\omega, \quad (6)$$

где $\ell(\mathbf{r}, \omega)$ – расстояние от $\mathbf{r} \in S_h$ до границы S_h в направлении ω . Ясно, что $L = \ell_h = h\ell_1$ и $h = L/\ell_1$. Расчеты дали значение $\ell_1 = 0.44831$ с точностью, не превосходящей 10^{-5} . Отметим, что трудоемкость (сложность) построения траектории частицы для $\sigma_h(\mathbf{r})$ не зависит от h , что позволяет эффективно оптимизировать сеточную модель по числу M траекторий, моделируемых для каждой реализации $\sigma_h(\mathbf{r})$ в алгоритме двойной рандомизации при $h \rightarrow 0$.

6. Для проведения тестовых расчетов рассматривался односкоростной процесс переноса частиц в шаре радиуса $R = 7.72043$ со случайной плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r})$ и макроскопическими сечениями $\rho\sigma^{(0)}$, $\rho\sigma_s^{(0)}$, $\rho\sigma_f^{(0)}$, где

$$\sigma^{(0)} = 1, \quad \sigma_s^{(0)} = 0.97, \quad \sigma_f^{(0)} = 0.03, \\ v = 2.5, \quad v = 1.$$

Одномерное распределение поля $\rho(r)$ равномерно на отрезке $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. При $\rho \equiv 1$ шар критичен: $\lambda = 0 \pm 10^{-7}$.

Для построения эффективных алгоритмов метода Монте–Карло в сформулированную модель было введено поглощение с постоянным неслучайным коэффициентом σ_c/v , который приводит к замене $\lambda \mapsto \lambda - \sigma_c/v \forall \sigma(\mathbf{r})$, как указано в конце пункта 1. Отметим, что такой прием является универсальным и может существенно повысить эффективность весового метода, исключая необходимость ветвления моделируемых траекторий.

На основе формулы (1) было использовано осреднение, состоящее в том, что моделировался процесс с константами $\sigma_s^* = 0$, $\sigma_f^* = \rho\sigma_s + \rho\sigma_f + \sigma_c$, $v^* = 1$, а вес в каждой точке столкновения домножался на величину

$$q^*(\rho) = \frac{\sigma_s + v\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/\rho} \leq \frac{\sigma_s + v\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/(1 + \varepsilon)} = 1$$

при $\sigma_c = \sigma_f(v - 1)(1 + \varepsilon)$.

В расчетах, как и в [3], был использован метод максимального сечения (см., например, [2]) с $\sigma_{\max} = 1 + \varepsilon$. Для уменьшения дисперсии оценок, основанных на соотношении (5), значения ξ_i и ξ'_i вычислялись для всех столкновений, включая “дельта-рассеяние”, в отличие от работы [3], где они вычислялись только для “физических” столкновений.

Плотность распределения первых столкновений была взята в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = 4t \exp(-2t)g(\mathbf{r}), \quad t > 0, \quad r = |\mathbf{r}| < R, \quad (7)$$

где $g(\mathbf{r}) = C \sin(\alpha(1)r)/r$ – улучшенное диффузионное приближение к пространственной характе-

Таблица 1. Значения $\tilde{J}_t \exp(-\sigma_c t) \pm \delta$ при $N_s = 4 \times 10^9$, $L = 2.186$

t	Поле Вороного	Сеточная аппроксимация
1	0.124241 ± 0.000002	0.124242 ± 0.000002
5	0.173513 ± 0.000002	0.173495 ± 0.000002
10	0.129121 ± 0.000002	0.129093 ± 0.000002
15	0.096155 ± 0.000002	0.096152 ± 0.000002
20	0.071678 ± 0.000002	0.071699 ± 0.000002

ристической функции для $\sigma = 1$, $\alpha(1) = 0.3739866$ [8]. В (4) полагали также $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h_1(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$, где $h_1(\mathbf{r}) = \sin(\alpha(1)r)/r$, причем (см. [8]) $\alpha(\rho) = (\pi(\sigma_s + v\sigma_f)\rho)/(R(\sigma_s + v\sigma_f) + 0.71044)$. При этом $J_t^{(m)} = (\Phi, h_1 f_t^{(m)}/f_0)$, т.е. вычисляются функционалы от потока частиц. Расчеты показали, что использование таких функциональных параметров алгоритма существенно улучшает важную здесь сходимость $J_t'(\rho)/J_t(\rho) \rightarrow \lambda$ при $t \rightarrow \infty$, $\forall \rho$, сравнительно с вариантом, в котором $f(\mathbf{r}, t)$ определяется формулой (7), а $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv 1$. Отметим, что формула (6) для сеточной мозаики дает значения $L = \ell_{4.8762} = 2.186$ при $h = 4.8762$.

Базовый пуассоновский точечный поток для поля Вороного строился в шаре радиуса $R_1 = 10 \approx R + L$. Проведенные в [6] модельные расчеты показывают, что такое ограничение потока может обеспечить достаточно высокую точность оценки средней вероятности вылета частицы, которая играет определенную роль в рассматриваемой задаче.

В сеточной модели трудоемкость построения конкретной траектории частицы существенно меньше трудоемкости реализации поля $\sigma_h(\mathbf{r})$, т.к. не требуется “перебор” по $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ для определения $\sigma_h(\mathbf{r})$.

В табл. 1 приведены оценки функции $J_t \exp(-\sigma_c t)$ и соответствующие значения средне-квадратических погрешностей δ для поля Вороного (при $m = 0$) и сеточной аппроксимации (при $M=1 \approx M_{\text{опт}}$). Здесь N_s – число траекторий.

Для двух вариантов поля – сеточного и Вороного – при $L = 2.186$ были вычислены оценки функции J_t'/J_t в точках $t = 1, \dots, 10, \dots, 20$, приведенные на графиках рис. 1, причем доверительные интервалы имеют ширину $\pm \tilde{\sigma}_t = \pm \sqrt{\tilde{D}(J_t'/J_t)/N}$, почти точно совпадающую с размерами значков узловых значений. Затем на основе линейной регрессионной аппроксимации (при $15 \leq t \leq 20$) были получены оценки коэффициентов d^2 , a (см. табл. 2).

Таким образом можно констатировать, что в решаемой задаче результаты, полученные на основе поля Вороного и соответствующей сеточной аппроксимации, практически совпадают. Трудоемкость при переходе к оптимальной аппроксимации сокращается примерно в 2 раза.

Расхождение оценок можно, в частности, объяснить ограничением области моделирования вспомогательного точечного потока, хотя значение L вычисляется без этого ограничения.

7. Остановимся теперь вкратце на возможности обоснования предельного гауссовского распределения величины λ для сеточной модели поля σ в рассматриваемой задаче. Обозначим через

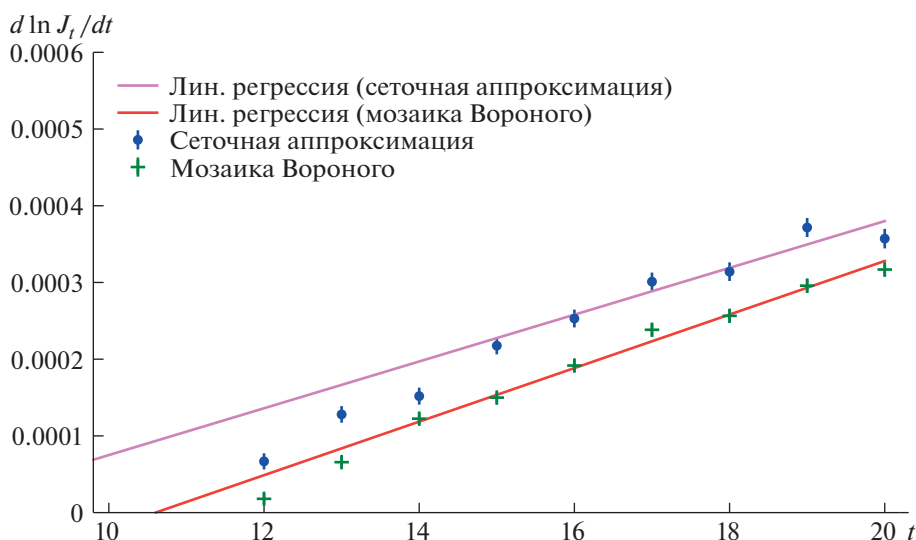


Рис. 1. Оценки логарифмической производной и регрессионная аппроксимация.

$N = N_h$ число элементов сетки (кубиков), полностью или частично принадлежащих области $\mathbf{D}$ объема V . Предполагается, что при $h \rightarrow 0$ выполняется соотношение (в частности, для куба, цилиндра, шара)

$$N_h = n_h + o(n_h), \quad (8)$$

где n_h – размер вписанной в $\mathbf{D}$ части сетки. Рассмотрим равенство $\lambda = \lambda_N(\tau_1, \dots, \tau_N)$, причем $\tau_i = v_i(\sigma_{h,i} - 1)$, где v_i – “действующий” объем в $\mathbf{D}$ сеточного элемента (в основном, вследствие (8) $v_i = h^3 \sim V/n_h$), а $\sigma_{h,i}$ – независимые значения поля $\sigma(\mathbf{r})$, равномерно распределенные в $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, причем $D\tau_i \sim (1/3)\epsilon^2 V^2/n_h^2$.

Далее предполагается, что

$$\left| \frac{\partial^2 \lambda_N}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right| \leq C_1 < +\infty; \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Формула Тейлора 2-го порядка с малыми приращениями $\tau_i = \tau/N$, $i = 1, \dots, N$, дает соотношение

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \sim \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \lambda_N}{\partial \tau_i},$$

которое позволяет сделать предположение (фактически численно проверенное, как и (9), для тестового шара [3]) о том, что

$$0 < C_0^{(1)} < \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_i} < C_0^{(2)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Используя полученные соотношения на основе формулы Тейлора 2-го порядка, получаем следующее асимптотическое представление

$$\lambda \sim C \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^N \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i)}{\sqrt{D \left(\sum_{i=1}^N \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i) \right)}} + \frac{\sqrt{n}}{2C \epsilon_{i,j=1}^N} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \tau_i \tau_j \right) = \\ = C \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} (\xi_N + \eta_N),$$

причем $D \left(\sum_{i=1}^N \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i) \right) \sim C^2 \epsilon^2 / n$, $|\eta_N| \leq C_1 V^2 \epsilon \sqrt{n} / (2C)$. Отсюда, используя метод характеристических функций и выполнение $\forall \epsilon \in (0, 1)$ условий Линдеберга ([9], глава 3, параграф 4, (с)) для $\sum_{i=1}^N n \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i)$ вследствие ограниченности величин $n \tau_i$, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполняются соотношения (9), (10) и $\lambda_N(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad \forall N$. Тогда, если $n =$

Таблица 2. Регрессионные оценки коэффициентов a и d^2

t	Сеточная аппроксимация	Поле Вороного $L = 2.186$
$\tilde{a} \times 10^5$	-23 ± 5.0	-37 ± 5.0
$\tilde{d}^2 \times 10^5$	3.0 ± 0.3	3.5 ± 0.2

$= n_h \rightarrow \infty$, $a \epsilon \sqrt{n} \rightarrow 0$, то величина $\frac{\sqrt{n}}{\epsilon} C^{-1} \lambda$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Отметим, что использование формулы Тейлора более высокого порядка при условии равномерной ограниченности соответствующих производных сохраняет утверждение Теоремы 1, так как дополнительные слагаемые в асимптотике оцениваются степенями величины ϵ .

Напомним, что $h = L/\ell_1$ и, следовательно, $n \sim V/h^3 = (V\ell_1/L)^3$.

Интересно отметить, что Теорема 1 согласуется с результатами работы [5], в которой нормализация распределения λ была получена на основе экспериментов для малой величины типа $D\tau$. Фактически это же показали расчеты для модельной сферически слоистой мозаики [3].

В заключение отметим, что разработанная методика может быть использована для исследования потока частиц любого типа. В частности, в [3] путем исследования мировой статистики ВОЗ для COVID-19 был выявлен интервал значимого суперэкспоненциального роста числа зараженных индивидиумов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0251-2022-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960, 514 с.
2. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 283 с.
3. Лотова Г.З., Михайлов Г.А. Численно-статистическое и аналитическое исследование асимптотики среднего потока частиц с размножением в случайной среде. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. V. 61. № 8. Р. 1353–1362. <https://doi.org/10.31857/S0044466921060077>
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

5. *Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A.* Neutron multiplication in random media: Reactivity and kinetics parameters // *Annals of Nuclear Energy*. 2018. V. 111. P. 391–406.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2017.09.006>
6. *Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.* Solution of radiative transfer theory problems for ‘realistic’ models of random media using the Monte Carlo method // *Rus. J. Num. Anal. Math. Model*. 2016. V. 31. № 3. P. 1–10.
<https://doi.org/10.1515/rnam-2016-0013>
7. *Gilbert E.N.* Random subdivisions of space into crystals // *Ann. Math. Statist.* 1962. № 33. P. 958–972.
<https://doi.org/10.1214/aoms/1177704464>
8. *Романов Ю.А.* Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // *Исследование критических параметров реакторных систем*. М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.
9. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. 575 с.

NUMERICAL-STATISTICAL INVESTIGATION OF SUPEREXPONENTIAL GROWTH OF THE MEAN PARTICLE FLUX WITH MULTIPLICATION IN A HOMOGENEOUS RANDOM MEDIUM

G. A. Mikhailov^{a,b} and G. Z. Lotova^{a,b}

^a*Institute of computational mathematics and mathematical geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation*

^b*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

The new correlative-grid approximation of a homogeneous random field is introduced for the effective numerically-analytical investigation of the superexponential growth of the mean particles flux with multiplication in a random medium. A complexity of particle trajectory realization is not dependent on the correlation scale. The test computations for a critical ball with isotropic scattering showed high accuracy of the corresponding mean flux estimates. For the correlative-grid approximation the possibility of Gaussian asymptotics of the mean particles multiplication rate when the correlation scale decreases is justified.

Keywords: numerical statistical simulation, particles flux, superexponential asymptotics, random medium, the Voronoi mosaic, grid approximation