ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 59–64

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4+517.956.8+517.955

СУЩЕСТВОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО СРЕДНЕГО ВРЕМЕННОГО СБОРА В КПП-МОДЕЛИ НА СФЕРЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ И ИМПУЛЬСНОМ ОТБОРАХ

Е. В. Винников[1,2,*], А. А. Давыдов[1,2,], Д. В. Туницкий[3,***]**

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 30.05.2023 г.
После доработки 23.10.2023 г.
Принято к публикации 03.11.2023 г.

На двумерной сфере рассматривается распределенный возобновляемый ресурс любой природы, динамика которого описывается моделью типа Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, и эксплуатация этого ресурса, осуществляемая путем постоянного или периодического импульсного отбора плотности ресурса. Показано, что после выбора допустимой стратегии эксплуатации динамика ресурса стремится к предельной динамике, соответствующей этой стратегии, и что существуют допустимые стратегии, доставляющие максимум среднего временного сбора ресурса.

Ключевые слова: Модель Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, параболическое полулинейное уравнение, слабое решение, стабилизация, оптимальное управление

DOI: 10.31857/S2686954323600453, **EDN:** DEDOKV

1. ВВЕДЕНИЕ

Качественный анализ динамики популяций и их предельных состояний является одной из востребованных задач прикладного характера. Если такое состояние является аттрактором всех нетривиальных динамик популяции, то в долгосрочной перспективе изучение изменения состояния популяции при наличии внешнего воздействия, связанного, например, с эксплуатацией популяции или изменениями в ее среде обитания, фактически сводится к анализу изменения этого предельного состояния и оценке скорости сходимости к нему. Это можно наблюдать уже на примере модели Ферхюльста $\dot{m} = am(1 - m/K)$, где m – масса популяции, а положительные константы a и K характеризуют восстановление популяции при ее малых объемах и емкость ареала ее обитания в целом [1–3].

В настоящей работе мы рассматриваем эксплуатацию распределенного возобновляемого ресурса любой природы (например, промысловой популяции), динамика которого описывается обобщением модели Ферхюльста, а именно моделью Колмогорова–Петровского–Пискунова и Фишера, доставляемой полулинейным параболическим уравнением второго порядка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp + a(x)p - b(x)p^2, \qquad (1)$$

где $p = p(t, x)$ – плотность ресурса в точке x области его распределения в момент времени t, L – стационарный самосопряженный эллиптический линейный дифференциальный оператор, учитывающий процесс диффузии ресурса, а функции a и $1/b$ являются аналогами коэффициентов a и K из модели Ферхюльста, только здесь они зависят от точки фазового пространства. Предполагается, что эти функции являются измеримыми ограниченными, при этом функция b положительна и отделена от нуля (т.е. $b \geq b_0 > 0$). Подобное уравнение появилось одновременно в работах [4] и [5], оно объединило в себе модель Ферхюльста и модель Фурье распространения тепла [6], появившуюся исторически раньше в начале девятнадцатого века. Информация по истории и библиографии работ, посвященных уравнению (1), можно найти в [7], а в статье [8] и монографии [9] приведен ряд приложений этого уравнения к моделям в биологии, чему и были посвящены работы [4] и [5] авторов модели.

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*НИТУ МИСИС, Москва, Россия*
[3]*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*
**E-mail: evinnikov@gmail.com*
***E-mail: davydov@mi-ras.ru*
****E-mail: dtunitsky@yahoo.com*

В работе [7] уравнение (1) изучается в n-мерном арифметическом пространстве с независящими от времени функциями a и b и оператором L, периодическими по всем координатам фазового пространства. В этом случае при коэффициентах класса $C^{1+\varepsilon}$ этого оператора и ограниченных неотрицательных нетривиальных начальных распределениях ресурса решения модели стремятся к общему аттрактору, являющемуся стационарным решением уравнения (1), как и в модели Ферхюльста. Это сводит анализ этих решений к изучению соответствующего уравнения на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$. В этом случае при естественных ограничениях на постоянный или импульсный отборы существование допустимой стратегии отбора, доставляющей максимум среднего временного сбора, было доказано в [10–12] и [13].

Естественно допускать, что доля постоянного (либо импульсного) отбора не является непрерывной и имеет разрывы, иначе трудно ожидать, что такой оптимальный отбор существует. В связи с этим разумно выбрать такой класс допустимых решений модели, который позволял бы построить удовлетворительную теорию разрешимости рассматриваемых уравнений при минимальных требованиях на регулярность их коэффициентов. В качестве такого класса в данной работе выступают слабые решения. В этом классе удается исследовать решения аналогов неоднородного уравнения (1) на сферах при довольно низких требованиях на регулярность его коэффициентов. Существование решений модели (1) при подобных ограничениях на ее параметры было установлено в [14] и [15].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Функциональные пространства. Мы будем рассматривать двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ радиуса 1, стандартно вложенную в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Это вложение индуцирует на ней риманову метрику g, имеющую вид $d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ в стандартных сферических координатах, порождает меру $V = V_g$ ($dV = |\sin\theta|\, d\theta d\varphi$) и связность Леви–Чевита со взаимно-однозначно определяемым ею оператором ковариантного дифференцирования $\nabla = \nabla_g$. С помощью этих метрики и меры стандартно вводятся L^p-пространства функций и тензорных полей, а с привлечением ковариантного дифференцирования ∇ конструируются $W^{k,p}$-пространства Соболева и $C^{k,\alpha}$-пространства Гельдера функций и тензорных полей, $k = 0,1,2,\ldots$; $0 < \alpha \leqslant 1$ (см. [16, п. 10.2.4], [17]).

Для $T \in (0,+\infty]$ на касательном расслоении декартова произведения $[0,T)\times\mathbb{S}^2$ определена метрика $\tilde{g}$:

$$\tilde{g} : T([0,T)\times\mathbb{S}^2) \ni (\tau,\xi) \mapsto \tau^2 + g(\xi,\xi)$$

и соответствующие ей ковариантное дифференцирование $\nabla_{\tilde{g}} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \nabla_g$ и мера $V_{\tilde{g}} = dt\times V_g$. Аналогично, как и выше, с их помощью конструируются функциональные пространства L^p, $C^{k,\alpha}$ функций и тензорных полей для этого декартового произведения.

Для произвольного банахового пространства B с нормой $\|\cdot\|_B$ стандартным образом определяются банаховы пространства $L^p([0,T);B)$, $p \geqslant 1$, с нормами

$$\|q\|_{L^p([0,T];B)} = \left(\int\limits_0^T \|q(t)\|_B^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1,$$

$$\text{и} \quad \|q\|_{L^\infty([0,T];B)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0;T)} \|q(t)\|_B,$$

соответственно (см. [18, гл. III, § 1], [19, гл. II, §2]). Наконец, определим банахово пространство

$$W([0,T);\mathbb{S}^2) = $$
$$= L^2((0,T);W^{1,2}(\mathbb{S}^2)) \cap L^\infty([0,T);L^2(\mathbb{S}^2)).$$

с нормой

$$\|q\|^2_{W([0,T);\mathbb{S}^2)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0;T)} \langle q(t),q(t)\rangle +$$
$$+ \int\limits_0^T \langle dq(t),dq(t)\rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} dt,$$

где $\langle .,. \rangle$ – знак скалярного произведения.

Для краткости будем использовать сокращение п.в., когда речь идет о выполнении каких-либо свойств почти всюду по мере V (1) на $\mathbb{S}^2$.

2.2. Эволюционное уравнение. Предположим, что наряду с метрикой g на сфере $\mathbb{S}^2$ задана еще одна измеримая метрика a, и существуют такие положительные числа a_0 и a_1, что п.в.

$$a_0 g(\eta,\eta) \leqslant a(\eta,\eta) \leqslant a_1 g(\eta,\eta) \qquad (2)$$

при всех $\eta \in T^*\mathbb{S}^2$. Обозначим через d_a^* и d_g^* операторы, формально сопряженные с оператором внешнего дифференцирования d относительно метрик a и g соответственно (см. [20, гл. VIII, § 1]). В частности, $\langle a(dq,v),1\rangle = \langle a(q,d_a^* v),1\rangle$ для всех дифференциальных k-форм q и $(k+1)$-форм v, $k = 0,1,\ldots,n-1$, и на k-формах $d_a^* = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$, где $* = *_a$ – оператор Ходжа, индуцированный метрикой a. Определим на функциях $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ *геометрический лапласиан (оператор Лапласа—де Рама)* — линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta = d_a^* \circ d, \tag{3}$$

см. [21, гл. IV, § 5]. Условие (2) означает, что оператор (3) равномерно эллиптичен на сфере. В локальных координатах x^1, x^2, введенных выше, он имеет вид

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{l,m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{a}a(dx^l, dx^m)\frac{\partial u}{\partial x^m}\right)$$

с $a = \det\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right)$.

Следовательно, эволюционное уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \Delta q = (A(x) - u(x))q - B(x)q^2 \tag{4}$$

параболическое. В контексте модели Колмогорова—Петровского—Пискунова—Фишера неизвестная функция $q = q(t,x)$ здесь соответствует плотности распределения некоторого возобновляемого ресурса в точке x сферы в момент времени t, метрика a в операторе Δ характеризует диффузию ресурса, функция u — управление, характеризующее интенсивность его перманентного сбора, а коэффициенты A и B — темпы обновления ресурса и насыщения им среды. Будем предполагать, что $A, u, B \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, и $B \geqslant \underline{B}$ п.в. для фиксированного числа $\underline{B} > 0$.

Слабым решением уравнения (4) на полуинтервале $[0,T)$ называется такая функция $q \in W([0,T); \mathbb{S}^2)$, что для любых $p \in C^\infty([0,T); \mathbb{S}^2)$ и $t \in [0,T)$ имеет место равенство

$$\langle q(t), p(t)\rangle + \int_0^t \Big(\langle dq(\tau), dp(\tau)\rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)}(\tau) - \langle q, p'\rangle(\tau)\Big)d\tau =$$
$$= \langle q(0), p(0)\rangle + \int_0^t \langle (A-u)q(\tau) - Bq^2(\tau), p(\tau)\rangle d\tau.$$

Слабое решение q уравнения (4), принимающее заданное начальное значение

$$q(0) = q_0, \quad q_0 \in L^\infty\left(\mathbb{S}^2\right), \quad q_0 \geqslant 0 \quad \text{п.в.}, \tag{5}$$

называется *слабым решением задачи Коши* (4), (5) на $[0,T)$.

Отметим, что в силу автономности уравнения (4) сдвиги его решений по времени остаются решениями, т.е. $q(t)$ тогда и только тогда является решением задачи (4), (5) на $[0,T)$, когда $q(t - T_0)$ для всякого $T_0 \in \mathbb{R}$ является решением этой задачи на $[T_0, T_0 + T)$.

2.3. Постановка задачи оптимизации. Моделирование эксплуатации возобновляемого ресурса приводит к поиску решений задачи (4), (5) на полуинтервале $[0,+\infty)$, на которые возможно накладываются дополнительно условия импульсного сбора с заданным периодом $\tau > 0$,

$$q(k\tau) = sq(k\tau-), \quad k = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

где функция $s \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$ п.в., характеризует интенсивность импульсного сбора.

Решением задачи (4), (6) называется такая функция $q \in L^\infty([0,\infty) \times \mathbb{S}^2)$, которая является решением уравнения (4) на полуинтервалах $[k\tau, (k+1)\tau)$, обладает левыми предельными значениями $q(k\tau-)$ и п.в. удовлетворяет равенствам (6). Если это решение еще и п.в. принимает начальное значение (5), то оно называется решением задачи (4)—(6). Решение задачи (4), (6) называется периодическим, если

$$q(0) = q(\tau). \tag{7}$$

Определим функционал Q качества эксплуатации ресурса как

$$Q : L^\infty(\mathbb{S}^2) \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{S} \ni (q_0, u, s) \mapsto$$
$$\mapsto \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left(\int_0^t \langle q(\xi; q_0, u, s), u\rangle d\xi + \right.$$
$$\left. + \sum_{0<kT\leqslant t}\langle q(k\tau-; q_0, u, s), 1-s\rangle\right),$$

где $q = q(t; q_0, u, s)$ — решение задачи (4)—(6), а $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ — фиксированные множества допустимых управлений сбором. Значение этого функционала — верхний предел временных средних суммы перманентного (первое слагаемое) и импульсного (второе слагаемое) сборов ресурса, плотность которого доставляет решение q.

Характерными для приложений допустимыми множествами перманентных и импульсных управлений являются

$$\mathfrak{U} = \left\{u \in L^\infty(\mathbb{S}^2) \mid U_1 \leqslant u \leqslant U_2\right\},$$
$$\mathfrak{S} = \left\{e^{-\gamma r} \mid r \in L^\infty(\mathbb{S}^2), R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \langle 1, r\rangle \leqslant E\right\},$$

где U_1, U_2, R_1, R_2 и γ — фиксированные ограниченные измеримые вещественнозначные функции на сфере, при этом U_1, R_1 и γ неотрицательны, а $E \in \mathbb{R}$ — *допустимое* усилие сбора — неотрицательно. Ограничение U_1 (или R_1) на перманентный отбор можно интерпретировать как минимально технически реализуемую плотность отбора, а U_2 (или R_2) — максимальную возможную плотность размещения ресурса сбора в силу экологических ограничений или из-за физической емкости среды, т.е. в точке ареала эти ограничения по сути характеризуют минимальное и максимальное усилия, которые можно приложить в этой точке для достижения своих целей. Появление экспоненты $e^{-\gamma r}$ в характеристике импульсного сбора происходит здесь из теории поиска и связано со сложностью обнаружения или извлечения ресурса в точке области его распределения при величине усилия r, а функция γ характеризует эту сложность [22, 23].

Нетрудно видеть, что определенные таким образом множества перманентных и импульсных управлений – выпуклые, замкнутые и ограниченные в пространстве $L^2(\mathbb{S}^2)$, и, следовательно, они слабо секвенциально компактны в этом пространстве. Значения управлений из этих множеств будем называть *допустимыми*.

Целью эксплуатации ресурса является получение максимального значения функционала качества Q путем выбора подходящих допустимых перманентного и импульсного управлений. Мы показываем, что это значение функционала достигается, т.е. существуют допустимые управления, доставляющие максимума этого функционала, при этом этот максимум не зависит от начального ненулевого неотрицательного распределения ресурса. Точнее, после выбора таких управлений плотность ресурса стремится к предельному состоянию, которое не зависит от его начального ненулевого неотрицательного распределения. Здесь и ниже ненулевые неотрицательные начальные условия q_0 означают, что $V(\{x \in \mathbb{S}^2 \mid q_0 \neq 0\}) > 0$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

3.1. Стабилизация и существование оптимального решения.

Теорема 1. *Пусть метрика* $a \in L^\infty$, *функции* A, u, B, q_0 *– измеримы и ограничены на сфере, причем* $B \geqslant \underline{B}$ *п.в. для фиксированного числа* $\underline{B} > 0$. *Тогда на полуинтервале* $[0, +\infty)$ *существует единственное решение* q *задачи* (4), 5), *причем* $q \in C([0, +\infty); L^2(\mathbb{S}^2)) \cap L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{S}^2)$.

Эта теорема существования и единственности решения следует из результатов, опубликованных в [14] и [15].

Известно, что решения задачи Коши (4), (5) локально непрерывны по Гельдеру. Точнее, справедливо следующее утверждение о регулярности решения.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты и правая часть уравнения* (4) *удовлетворяют всем условиям теоремы* 1. *Тогда для решения* $q \in L^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)$ *уравнения* (4), $T \in (0, +\infty)$, *и* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $\alpha = \alpha(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([0,T)\times\mathbb{S}^2)})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *и* $C = C(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([0,T)\times\mathbb{S}^2)}) \geqslant 0$, *что* $q \in C^{0,\alpha}([\varepsilon, T) \times \mathbb{S}^2)$ *и* $\|q\|_{C^{0,\alpha}([\varepsilon,T)\times\mathbb{S}^2)} \leqslant C$.

Доказательство этой теоремы при наложенных ограничениях вытекает из известных свойств решений линейных параболических уравнений (см. [24, гл. VI, § 7]). Естественно, что при дальнейшем повышении регулярности коэффициентов уравнения (4) соответствующим образом повышается и регулярность его решений, см. [24, гл. VI, § 2].

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение о существовании, единственности и регулярности решения изучаемой модели.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты, правая часть уравнения* (4) *и начальное значение* (5) *удовлетворяют всем условиям теоремы 1, и управления отбором допустимы. Тогда существует единственное решение q задачи* (4)–(6), *при этом для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие числа* $\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$, *и* $C \geqslant 0$, *зависящие от* ε, *что*

$$q \in C^{0,\alpha}([\varepsilon + (k-1)\tau, k\tau) \times \mathbb{S}^2),$$
$$\|q\|_{C^{0,\alpha}([\varepsilon+(k-1)\tau,k\tau)\times\mathbb{S}^2)} \leqslant C, \quad k = 1, 2, \ldots$$

С помощью теоремы 3 доказывается следующее утверждение о стабилизация к периодическому решению.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты, правая часть уравнения* (4) *и начальное значение* (5) *удовлетворяют всем условиям теоремы* 1, *и управления отбором допустимы. Тогда задача* (4), (6), (7) *имеет единственное решение* q_∞, *такое что для любого решения q задачи* (4)–(6) *с ненулевыми неотрицательными начальными условиями выполнено предельное соотношение*

$$\lim_{t \to +\infty} \|q(t) - q_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} = 0.$$

Последняя теорема позволяет редуцировать изучаемую задачу оптимизации к выбору допустимых управлений, доставляющих максимум функционала качества на соответствующих предельных решениях q_∞.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты, правая часть уравнения* (4) *и начальное значение* (5) *удовлетворяют всем условиям теоремы* 1, *и управления отбором допустимы. Тогда функционал качества Q при фиксированных допустимых управлениях принимает одно и то же значение для всех ненулевых неотрицательных начальных распределений ресурса, равное значению на соответствующем предельном распределении* q_∞. *Кроме того, значения этого функционала ограничены, и существуют допустимые управления, доставляющие точную верхнюю грань его значений.*

3.2. Выводы. Таким образом, после выбора стратегии эксплуатации эволюция плотности возобновляемого ресурса при любом начальном неотрицательном ненулевом распределении в силу теоремы 4 выходит на однозначно определенное предельное состояние, которое, если стратегия оптимальная, в силу теоремы 5 доставляет за каждый цикл отбора ресурса значение сбора, равное максимально возможному среднему временному сбору этого ресурса. Следовательно, выбор оптимальной стратегии эксплуатации ресурса (например, промысловой популяции) не только не ведет к истощению ресурса или к его исчезновению, а обеспечивает выход любой начальной ненулевой плотности ресурса к предельному состоянию, обеспечивающему близкий к максимальному сбор ресурса в натуральном виде за один цикл эксплуатации.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Verhulst P.F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance mathematique et physique. 1838. V. 10. P. 113–121.
2. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
3. *Арнольд В.И.* “Жесткие” и “мягкие” математические модели Электронное издание М.: МЦНМО, 2014. 32 с. ISBN 978-5-4439-2008-5.
4. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
5. *Fisher R.A.* The Wave of Advance of Advantageous Genes//Annals of Eugenics, 1937. 7 (4), pp. 353–369. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x
6. *Fourier J.B.J.* Theorie Analytique de la Chaleur. Paris: F. Didot, 1822.
7. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence// J. Math. Biol. 2005. V. 51. P. 75–113. https://doi.org/10.1007/s00285-004-0313-3
8. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model: II—biological invasions and pulsating travelling fronts. J. Math. Pures Appl. 2005. V. 84. P. 1101–1146. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2004.10.006
9. *Pethame B.* Parabolic equations in biology: Growth, reaction, movement and diffusion. Springer, 2015, Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences, 978-3-319-19499-8; 978-3-319-19500-1.
10. *Давыдов А.А.* Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией//Избранные вопросы математики и механики, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова, Труды МИАН, 310, МИАН, М., 2020. P. 135–142; Proc. Steklov Inst. Math. 2020. V. 310. P. 124–130. https://doi.org/10.1134/S0081543820050090
11. *Davydov A.A.* Optimal steady state of distributed population in periodic environment// AIP Conf. Proc. 2021. V. **2333**. P. 120007. https://doi.org/10.1063/5.0041960
12. *Давыдов А.А., Мельник Д.А.* Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором// Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 99–107. Optimal States of Distributed Exploited Populations with Periodic Impulse Harvesting // Proc. Steklov Inst. Math. 2021. V. 315 (Suppl. 1). P. S1–S8. https://doi.org/10.1134/S0081543821060079 https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-99-107
13. *Davydov A.A., Vinnikov E.V.* Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting// Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2023. V. 407. P. 101–112. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17558-9_5
14. *Туницкий Д.В.* О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях// Изв. РАН. Сер. матем. 2022. V. 86. № 5. P. 97–115. https://doi.org/10.4213/im9261
15. *Tunitsky D.V.* On Initial Value Problem for Semilinear Second Order Parabolic Equations on Spheres// Proceedings of the 15th International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD), 26–28 September, 2022, Moscow, Russia. IEEE Explore, 9 November 2022. P. 1–4. https://ieeexplore.ieee.org/document/9934193 https://doi.org/10.1109/MLSD55143.2022.9934193
16. *Nicolaescu L.I.* Lectures on the Geometry of Manifolds. New Jersey: World Scientific, 2021.
17. *Tunitsky D.V.* On Solvability of Second-Order Semilinear Elliptic Equations on Spheres / Proceedings of the 14th International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD), 27–29 September, 2021, Moscow, Russia. IEEE Explore, 22 November 2021. P. 1–4. https://ieeexplore.ieee.org/document/9600203. ISBN 978-1-6654-1230-8 https://doi.org/10.1109/MLSD52249.2021.9600203
18. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. AMS, Providence, RI, 1997.
19. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
20. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
21. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
22. *Koopman B.O.* The theory of search. III. The optimum distribution of search effort // Operations Res. 1957. V. 5. № 5. P. 613–626.
23. *Жиков В.В.* Математические проблемы теории поиска// Тр. Владимир. политех. ин-та. 1968. С. 263–270.
24. *Lieberman G.M.* Second Order Parabolic Differential Equations. New Jersey: World Scientific, 2005.

EXISTENCE OF MAXIMUM OF TIME AVERAGED HARVESTING IN THE KPP-MODEL ON SPHERE WITH PERMANENT AND IMPULSE COLLECTION

E. V. Vinnikov[a,b], A. A. Davydov[a,b], and D. V. Tunitsky[c]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *NUST MISIS, Moscow, Russian Federation*

[c] *Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

On a two-dimensional sphere, a distributed renewable resource is considered, the dynamics of which is described by a model of the Kolmogorov—Petrovsky—Piskunov—Fisher type, and the exploitation of this resource, carried out by constant or periodic impulse harvesting. It is shown that after choosing an admissible exploitation strategy, the dynamics of the resource tend to the limiting dynamics corresponding to this strategy, and that there is an admissible harvesting strategy that maximizes the time averaged harvesting of the resource.

Keywords: Kolmogorov—Petrovsky—Piskunov—Fisher model, parabolic semilinear equation, weak solution, stabilization, optimal control