

УДК 519.63

ОЦЕНКА ВЫРОЖДЕНИЯ ТЕТРАЭДРА В ТЕТРАЭДРАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

© 2023 г. Ю. А. Криксин^{1,*}, член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин^{1,**}

Поступило 06.07.2023 г.

После доработки 09.10.2023 г.

Принято к публикации 02.11.2023 г.

На основе геометрических характеристик тетраэдра предложены количественные оценки его вырождения и установлена их связь с числом обусловленности локальных базисов, порожденных ребрами, выходящими из одной и той же вершины. Вводится понятие индекса вырождения тетраэдра в нескольких версиях и устанавливается их практическая эквивалентность друг другу. Для оценки качества конкретного тетраэдрального разбиения предлагается вычислять эмпирическую функцию распределения индекса вырождения на ее тетраэдральных элементах. Предложена нерегулярная модельная триангуляция (тетраэдризация или тетраэдральное разбиение) трехмерного пространства, зависящая от управляющего параметра, определяющего качество ее элементов. Координаты вершин тетраэдров модельной триангуляции являются суммами соответствующих координат узлов некоторой заданной регулярной сетки и случайных приращений к ним. Для различных значений управляющего параметра вычисляется эмпирическая функция распределения индекса вырождения тетраэдра, рассматриваемая как количественная характеристика качества тетраэдров в триангуляции трехмерной области.

Ключевые слова: индекс вырождения, тетраэдр, триангуляция, регулярная сетка, псевдослучайный вектор, эмпирическая функция распределения

DOI: 10.31857/S2686954323600726, **EDN:** ZDDSR

1. Разбиение пространства на конечные элементы широко используется в различных целях в точных и прикладных науках, таких как классическая и вычислительная математика, физика, геодезия, навигация, метрология, астрометрия и т.д. В вычислительной математике разбиение на конечные элементы необходимо для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных в сложных нерегулярных областях соответствующими методами [1]. В числе этих методов отметим классический и разрывный методы Галеркина [2, 3], обладающие высокой степенью универсальности и потенциально высокой точностью, которые благодаря своей гибкости могут быть адаптированы к сложным нерегулярным пространственным областям и применены в частности для решения задач газовой динамики и гидродинамики. Точность численного решения во многом определяется вырождением используемых конечных элементов [4]. Одним из важных частных случаев разбиения является

триангуляция (тетраэдризация), под которой понимается разбиение заданной области n -мерного евклидова пространства на простейшие элементы — n -мерные симплексы. Настоящая работа посвящена установлению связи между собой различных оценок степени вырождения тетраэдров, используемых в качестве элементов тетраэдризации в трехмерном евклидовом пространстве. Такую оценку естественно связать с вырожденностью локального базиса в рассматриваемом тетраэдре, в координатах которого записываются уравнения метода. В связи с этим необходима удобная количественная характеристика вырождения тетраэдра, которая может быть легко вычислена.

Отметим, что в настоящее время в процессе построения триангуляции заданной области используются различные оценки качества тетраэдров [5–8], связь которых друг с другом необходимо выяснить.

Среди отечественных работ мирового уровня, посвященных вопросам триангуляции и тетраэдризации, можно выделить монографию [5], в которой рассмотрены главные направления исследований, включающие основные понятия, относящиеся к треугольным и тетраэдральным сеткам, алгоритмы построения неструктурированных сеток в произвольных областях, в том

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail: kriksin@imamod.ru

**E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

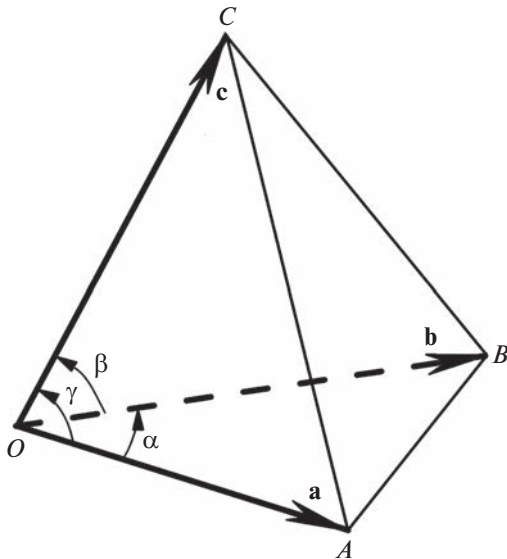


Рис. 1. Тетраэдр, представляющий собой элемент класса подобных тетраэдров, параметризованный соотношениями (1).

числе алгоритм построения тетраэдральной сетки методом продвигаемого фронта, принципы многоуровневого построения сеток, локальные модификации сеток и управление их свойствами.

Зарубежные исследования по алгоритмам триангуляции и тетраэдризации изложены, в частности, в известных монографиях [6–8].

В предлагаемой работе не рассматриваются алгоритмы построения тетраэдризации заданной области. Акцент делается на количественном контроле качества трехмерной триангуляции, в которой каждому принадлежащему ей тетраэдру сопоставляется индекс его вырождения, и производится сравнение друг с другом различных версий индекса, естественных с точки зрения авторов. Для оценки качества тетраэдризации в целом предлагается использовать эмпирическую функцию распределения (ЭФР) индекса вырождения на ее тетраэдрах. ЭФР дает представление о границах изменения индекса и доле его значений в заданном диапазоне чисел. С точки зрения сегодняшней вычислительной практики польза ЭФР не очевидна, но развитие вычислительных технологий имеет тенденцию к дальнейшему увеличению числа используемых конечных элементов. Поэтому мы не исключаем, что в перспективе при большом числе конановых элементов в ряде случаев может быть установлена связь между профилем ЭФР и его влиянием на точность численного решения конкретной прикладной задачи.

Кроме этого для тестирования точности конкретного численного метода желательно иметь простой и экономичный способ генерации модельной тетраэдризации, обладающей заданным

качеством ее конечных элементов. С этой целью, как и в нашей предыдущей работе [9], строится специальная сетка, зависящая от управляющего числового параметра ϵ , на основе которой генерируется модельная тетраэдризация с индексом вырождения тетраэдров, принимающим значения в заданном диапазоне. Поэтому настоящую работу следует рассматривать как распространение подхода работы [9] на трехмерное пространство.

2. Количественная величина, выражающая степень вырождения тетраэдра, должна быть безразмерной и одной и той же на множестве подобных тетраэдров. С целью ее введения рассмотрим тетраэдр OABC, являющийся элементом триангуляции некоторой области трехмерного евклидова пространства (см. рис. 1). В отличие от двумерного случая, когда класс подобных друг другу треугольников определяется значениями двух углов [9], для описания класса подобных друг с другом тетраэдров необходимо задать пять параметров. В качестве примера приведем одну из возможных параметризаций класса подобных между собой тетраэдров с помощью пяти угловых параметров

$$\begin{aligned} \angle AOB = \alpha, \quad \angle BOC = \beta, \quad \angle AOC = \gamma, \\ OA = \sin\theta \cos\varphi, \quad OB = \sin\theta \sin\varphi, \quad OC = \cos\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$; $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$; $\alpha + \beta > \gamma$; $\beta + \gamma > \alpha$; $\gamma + \alpha > \beta$; $\varphi, \theta \in (0, \pi/2)$.

Искомая величина должна быть связана с оценкой вырожденности локального базиса, построенного на трех векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, ($\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}] \neq 0$), начинающихся в одной из его вершин (на рис. 1 это точка O), концы которых находятся в соседних вершинах. Положим

$$d_O = \lambda_{\min} \lambda_{\max}^{-1}, \quad (2)$$

где $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ являются соответственно минимальным и максимальным собственным значением матрицы

$$D_O = \begin{pmatrix} |\mathbf{a}|^2 & (\mathbf{a} \mathbf{b}) & (\mathbf{a} \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a} \mathbf{b}) & |\mathbf{b}|^2 & (\mathbf{b} \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a} \mathbf{c}) & (\mathbf{b} \mathbf{c}) & |\mathbf{c}|^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которые являются действительными положительными числами благодаря линейной независимости векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Замечание 1. Отметим, что матрица перехода T_O от координат (ξ, η, ζ) в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к декартовым координатам (x, y, z) в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ связана с матрицей (2) равенством $T_O^* T_O = D_O$, поэтому $d_O^{-1/2}$ является числом обусловленности матрицы T_O , если рассматривать ее спектральную норму.

Существуют четыре способа построения локального базиса в тетраэдре ОАВС, если не принимать во внимание перестановки одних и тех же базисных векторов между собой. Меняя ролями все вершины О, А, В, С тетраэдра ОАВС на рис. 1, т.е. выбирая каждую из них в качестве начальной точки для векторов соответствующего локального базиса, получим еще три числа d_A , d_B и d_C , определяемые согласно формуле (2) с участием соответствующих базисных векторов. Введем величины

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min(d_O, d_A, d_B, d_C), \\ d_{\max} &= \max(d_O, d_A, d_B, d_C). \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть V – объем тетраэдра ОАВС, S – площадь его полной поверхности, R – радиус описанного около него шара и r – радиус вписанного в него шара.

Рассмотрим также безразмерные величины

$$f_{VS} = V^2 S^{-3}, \quad f_{rR} = r R^{-1}. \quad (5)$$

Величина $d_{\min}$ и величины (5) достигают своих максимумов на правильном тетраэдре. Соответствующие максимальные значения равны

$$(d_{\min})_{\max} = 1/4, \quad f_{VS, \max} = \sqrt{3}/648, \quad f_{rR, \max} = 1/3. \quad (6)$$

В отличие от перечисленных в (6) величин величина $d_{\max}$ достигает своего максимального значения 1 на тетраэдре, являющемся выпуклой оболочкой трех перпендикулярных друг другу ребер куба, выходящих из одной вершины. На правильном тетраэдре она имеет значение 1/4.

Каждую из величин (4) и (5) можно рассматривать как количественную оценку вырождения рассматриваемого тетраэдра. Чем ближе к нулю их значение, тем более вырожденным является тетраэдр. В дальнейшем будем использовать логарифмическую шкалу в отношении каждой из введенных в (4) и (5) величин. Введем следующие четыре версии индекса вырождения тетраэдра T , положив соответствующие им значения равными

$$\begin{aligned} I_{\min}(T) &= -\frac{1}{2} \lg(d_{\min}), \quad I_{\max}(T) = -\frac{1}{2} \lg(d_{\max}), \\ I_{VS}(T) &= -\frac{1}{2} \lg(f_{VS}), \quad I_{rR}(T) = -\lg(f_{rR}). \end{aligned} \quad (7)$$

Выбор основания логарифма равным 10 обусловлен удобством интерпретации индексов в используемой повсеместно десятичной системе исчисления. Наиболее легко интерпретируемым является значение индекса $I_{\min}$, который рассматривается далее в качестве основной оценки вырождения тетраэдра. В самом деле, увеличение индекса $I_{\min}$ на 1 означает дополнительную потерю точности вычислений при переходе от локальных координат в наиболее вырожденном из четырех возмож-

ных локальных базисов в тетраэдре к декартовым координатам примерно на одну значащую цифру.

Следующей задачей является установление взаимосвязи друг с другом между введенными индексами (7). Индексы вырождения (7) являются функциями пяти параметров. Аналитическое исследование взаимосвязи этих функций друг с другом представляет собой весьма сложную задачу.

Поставим эту задачу следующим образом. Рассмотрим однопараметрическое множество Q_I тетраэдров T , таких что $L(T) < I$, где $L(T)$ обозначает какой-либо из индексов (7). Индекс $L(T)$ будем называть *базовым*. Обозначим через $J(T)$ значение любого из оставшихся индексов, введенных в (7), и определим следующие функции

$$\begin{aligned} \underline{J}(I) &= \liminf_{\Delta I \rightarrow 0} J(T), \quad T \in Q_{I+\Delta I} \setminus Q_{I-\Delta I}, \\ \bar{J}(I) &= \limsup_{\Delta I \rightarrow 0} J(T), \quad T \in Q_{I+\Delta I} \setminus Q_{I-\Delta I}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для количественной оценки функций (8) будет использован метод статистических испытаний Монте-Карло [10].

3. Поскольку метод Монте-Карло подразумевает приближенную оценку функций (8), следует определить практически необходимую точность результата. С точки зрения сложившейся вычислительной практики можно условиться полагать ошибку в пределах одной значащей цифры соответствующего десятичного разряда заданной точности искомой величины вполне приемлемой.

С учетом принятой точности выберем сетку $\{I_k\}$ числовых значений I

$$I_k = I_0 + hk, \quad h = \frac{1}{2}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (9)$$

где $I_0 = h = 0.5$, $K = 12$. Выберем достаточно малое по сравнению с I числовое значение $\Delta I = 0.02$ и приблизительно оценим на ней значения функций (8).

С этой целью проведем серию следующих вычислительных экспериментов. Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат, определяемую уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (10)$$

Зафиксируем точку $O(1, 0, 0)$ и с помощью последовательности псевдослучайных векторов, равномерно и независимо распределенных на сфере (10) [11], определим три точки: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$. Для построенного таким способом тетраэдра ОАВС сфера (10) является описанной сферой. Очевидно, множество всех вписанных в сферу (10) тетраэдров исчерпывает элементы класса подобных друг другу тетраэдров. Генерацию множества тетраэдров ОАВС описанным выше способом продолжаем для каждого уз-

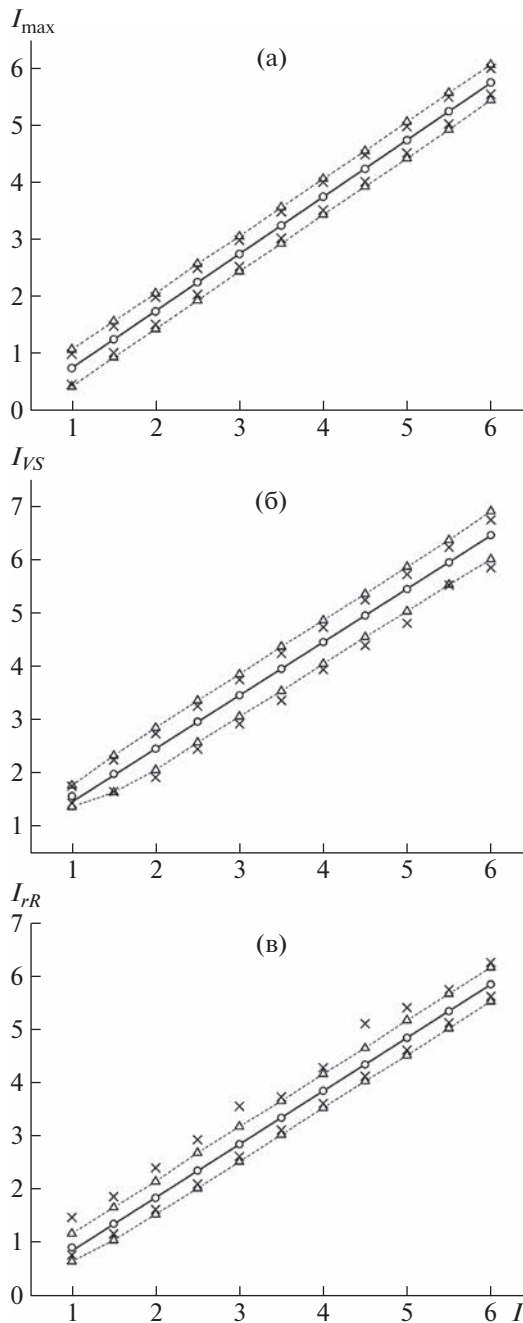


Рис. 2. Графическая иллюстрация связи индексов вырождения (7) друг с другом (а) – $I_{\max}$; б) – I_{VS} ; в) – I_{RR}), установленная в вычислительном эксперименте методом Монте-Карло. Сплошная прямая линия линейной регрессии построена с использованием значений соответствующих выборочных средних в узлах I_k ($k = 3, \dots, K$). Кружки “о” указывают положение выборочных средних на соответствующих им линиях регрессии. Треугольники “Δ” отмечают концы доверительного интервала $(a(I_k) - 3\sigma(I_k), a(I_k) + 3\sigma(I_k))$, а пунктирные линии ограничивают соответствующую “доверительную полосу”. Крестики “х” отвечают экстремальным значениям индекса в рассматриваемом узле I_k , в соответствующей выборке объема N .

ла сетки (9) $I = I_k$ до тех пор, пока число их, принадлежащих множеству $Q_{I+\Delta I} \setminus Q_{I-\Delta I}$, не достигнет заданного натурального числа $N = 1000$. В каждом таком численном эксперименте для каждой версии индекса вырождения (7) вычисляются выборочные среднее $a(I_k)$ и дисперсия $\sigma^2(I_k)$ [12] на основе N значений выборки соответствующего индекса. Для полученных таким способом сеточных функций $a(I_k)$ вычисляются коэффициенты уравнения линейной регрессии и доверительный интервал $(a(I_k) - 3\sigma(I_k), a(I_k) + 3\sigma(I_k))$, нижняя и верхняя границы которого являются соответственно приближенными оценками величин $\underline{J}(I_k)$ и $\overline{J}(I_k)$ в соотношениях (8).

Результаты серии проведенных вычислительных экспериментов для индексов $I_{\max}$, I_{VS} , I_{RR} при выборе $L = I_{\min}$ представлены на рис. 2 (за исключением индекса $I_{\min}$, ввиду того, что точки интервала $(I - \Delta I, I + \Delta I)$ визуально практически неотличимы друг от друга).

Отметим, что не менее 99% элементов выборки для каждого индекса в соответствующем узле сетки попадают в указанный выше доверительный интервал, длина которого не превышает во всех случаях 0.91, причем, угловой коэффициент линейной регрессии равен 1 с точностью 10^{-3} для всех версий индекса (7). Таким образом, все прямые регрессии на рис. 2 отличаются друг от друга сдвигом по вертикальной оси и имеют вид

$$\begin{aligned} I_{\min} &= I, & I_{\max} &= I + b_{\max}, \\ I_{VS} &= I + b_{VS}, & I_{RR} &= I + b_{RR}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $b_{\max} \cong -0.25$, $b_{VS} \cong 0.46$, $b_{RR} \cong -0.14$.

Также проведены расчеты в случае, когда в качестве базового индекса L выбирались индексы $I_{\max}$, I_{VS} , I_{RR} . Полученные уравнения линейной регрессии имеют единичный наклон и отличаются от уравнений (11) сдвигом на величину не более 1% относительно точки, взятой на середине соответствующей прямой. Длина доверительного интервала не превышает 0.91, а не менее 98% элементов выборки для каждого индекса в любом узле сетки (9) попадают в соответствующий доверительный интервал. Практическая независимость уравнений линейной регрессии от способа выбора индекса вырождения в качестве базового позволяет сформулировать *принцип взаимности*, заключающийся в том, что все индексы в (7) можно считать эквивалентными друг другу, и любой из введенных индексов вырождения (7) может быть использован для оценки степени вырождения тетраэдра, а уравнения линейной регрессии (11) позволяют оценить значения остальных индексов.

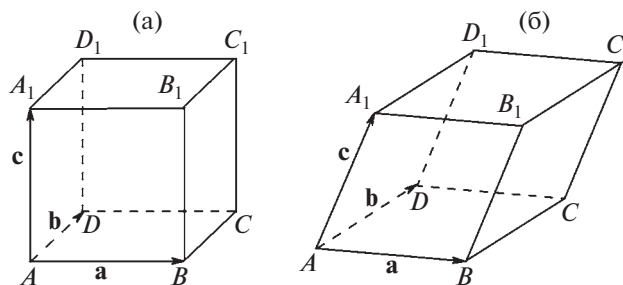


Рис. 3. Базовый параллелепипед модельной триангуляции: базисные вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеют единичную длину, начинаются в точке A и заканчиваются в точках B , D и A_1 соответственно: а) куб (базисные вектора ортогональны друг другу); б) ромбоэдр (базисные вектора попарно составляют друг с другом угол $\pi/3$).

Почти все значения любого индекса попадают в соответствующий доверительный интервал, отклонение конкретного значения от линии регрессии, как правило, не превышает 0.5. Конкретное применение того или иного индекса в (7) определяется соображениями удобства и наименьших вычислительных затрат.

Наиболее просто и экономично вычисляется индекс I_{VS} , так как для его вычисления достаточно найти объем V и площадь полной поверхности S тетраэдра $OABC$ (см. рис. 1)

$$V = \frac{1}{6} |(\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}])|, \quad (12)$$

$$S = \frac{1}{2} (\|\mathbf{a} \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} \mathbf{c}\| + \|\mathbf{a} \mathbf{c}\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{c} \mathbf{b} - \mathbf{c}\|).$$

Для вычисления индекса I_{rR} необходимо дополнительно найти радиус R описанного около тетраэдра шара. Вычисление индексов $I_{\min}$ и $I_{\max}$ предполагает нахождение спектральных норм матриц перехода от всех четырех локальных базисов, связанных с тетраэдром, в декартов базис и обратно и требует заметно больших вычислительных затрат. Заметим, что согласно рис. 2а вырождение тетраэдра может быть на практике оценено с заданной выше точностью в 1 значащую цифру через число обусловленности любого базиса из четырех возможных.

4. Рассмотрим алгоритм генерации модельной триангуляции (тетраэдрального разбиения) пространства E^3 на основе заданной регулярной сетки. С этой целью выберем некоторый базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ и построим сетку с узлами

$$\mathbf{r}_n = n_1 \mathbf{a} + n_2 \mathbf{b} + n_3 \mathbf{c} \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \quad (13)$$

$$(n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Параллелепипед, построенный на базисных векторах $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ (см. рис. 3), назовем базовым и разобьем последний на 6 тетраэдров с вершинами из множества вершин базового параллелепипеда таким образом, что ребра тетраэдров, совпадающие с диагоналями противоположных боковых гра-

ней параллелепипедов, оказываются параллельными друг другу. Конкретные способы разбиения будут рассмотрены ниже. Описанное выше разбиение на тетраэдры распространим на каждый параллелепипед, являющийся трансляцией базового, в соответствующий узел сетки (13). Полученную таким способом триангуляцию E^3 назовем базовой. Вершины, соединенные друг с другом ребрами тетраэдров, участвующих в базовой триангуляции, назовем соседними.

Используя регулярную сетку (13), построим возмущенную нерегулярную сетку

$$\tilde{\mathbf{r}}_n = \mathbf{r}_n + \epsilon \mathbf{u}_n, \quad |\mathbf{u}_n| \leq 1, \quad \epsilon > 0, \quad (14)$$

где отношение соседства между соответствующими узлами, введенное выше, сохраняется и для новых узлов $\tilde{\mathbf{r}}_n$ с теми же самыми номерами $\mathbf{n}$, что и в сетке (13). Отрезки прямых, соединяющие соседние узлы сетки (14), будем по-прежнему называть ребрами. Положительный числовой параметр ϵ предполагается достаточно малым, чтобы между точками пересечения ребер в исходной сетке (13) и в новой сетке (14) сохранялось взаимно однозначное соответствие и чтобы тетраэдры новой триангуляции с соответствующими вершинами оставались невырожденными. Таким образом, базовая триангуляция E^3 , построенная с помощью сетки (13), переносится на сетку (14) с сохранением исходной топологии. Между тетраэдрами базовой и новой триангуляции существует взаимно однозначное соответствие по принципу сохранения нумерации соответствующих вершин в соответствии с (13).

Ниже рассматриваются два конкретных способа модельной триангуляции (см. рис. 3).

На рис. 3а показан единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, выступающий в роли базового параллелепипеда. Триангуляция куба производится путем его разбиения на шесть конгруэнтных тетраэдров $DAA_1 B_1$, $DD_1 A_1 B_1$, $DABB_1$, $DCC_1 B_1$, $DD_1 C_1 B_1$ и $DCBB_1$. В первом тетраэдре попарно перпендикулярные ребра DA , AA_1 и $A_1 B_1$

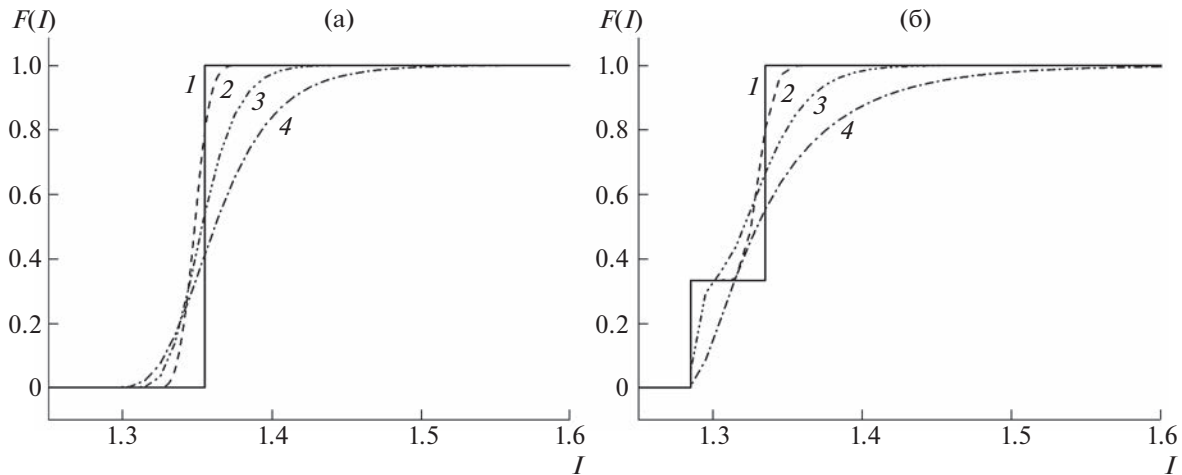


Рис. 4. Эмпирические функции распределения (16) индекса I_{VS} при различных значениях параметра ε : а) триангуляция на основе базового параллелепипеда куба ($1 - \varepsilon = 0$, $2 - \varepsilon = 0.05$, $3 - \varepsilon = 0.15$, $4 - \varepsilon = 0.235$); б) триангуляция на основе базового параллелепипеда ромбоэдра ($1 - \varepsilon = 0$, $2 - \varepsilon = 0.05$, $3 - \varepsilon = 0.15$, $4 - \varepsilon = 0.272$).

равны 1, ребра DA_1 и B_1A равны $\sqrt{2}$ и, наконец, ребро DB_1 равно $\sqrt{3}$. Оставшиеся тетраэдры устроены аналогичным образом.

Второй вариант базового параллелепипеда — ромбоэдр $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, изображенный на рис. 3б, разбивается на шесть тетраэдров равного объема $A_1 ABD$, $CC_1 D_1 B_1$, $BB_1 A_1 D_1$, $BCDD_1$, $A_1 DD_1 B$, и $CB_1 BD_1$. Тетраэдры $A_1 ABD$ и $CC_1 D_1 B_1$ являются правильными с единичными ребрами. В четырех тетраэдрах $BB_1 A_1 D_1$, $BCDD_1$, $A_1 DD_1 B$, и $CB_1 BD_1$ ребро $BD_1 = \sqrt{2}$, а остальные ребра равны 1.

Для того, чтобы топология базовой триангуляции сохранялась в возмущенной триангуляции, а тетраэдры в последней оставались невырожденными, управляющий параметр ε должен удовлетворять неравенству

$$\varepsilon < \frac{3V}{2 \max(S_1, S_2, S_3, S_4)}, \quad (15)$$

для всех шести тетраэдров, участвующих в триангуляции базового параллелепипеда, где V — объем, а S_i — площадь i -й грани рассматриваемого тетраэдра. Правая часть неравенства (15) равна половине минимальной высоты тетраэдра. В обоих случаях базового параллелепипеда, представленных на рис. 3а и 3б, управляющий параметр должен удовлетворять неравенству $\varepsilon < \sqrt{2}/4 \approx 0.3536$.

Одним из возможных вариантов оценки качества уже существующей триангуляции, является построение ЭФР $F(I)$ значений индексов (7). Если некоторая триангуляция всего содержит N тетраэдров, N_I из которых имеют значение рассмат-

риваемого индекса (7) меньшее I , то соответствующая ЭФР определяется следующим образом

$$F(I) = N^{-1} N_I. \quad (16)$$

Сгенерируем модельные триангуляции, описанные выше, на основе базовых параллелепипедов, показанных на рис. 3, используя в качестве $\mathbf{u}_n$ в (14) последовательность псевдослучайных векторов, равномерно распределенных в единичном шаре с центром в начале координат [11]. Каждая модельная триангуляция включает в себя более 1.6×10^8 тетраэдров. Построим для этих триангуляций ЭФР (16) индекса I_{VS} при различных значениях управляющего параметра ε (см. рис. 4). Отметим, что при значениях управляющего параметра ε , близких к критическому значению $\sqrt{2}/4 \approx 0.3536$, диапазон значений индекса I_{VS} становится достаточно широким, на котором плохо видны детали ЭФР исходных регулярных разбиений ($\varepsilon = 0$, сплошные кривые), поэтому для иллюстраций были выбраны значения ε , обеспечивающие достаточное разрешение.

Рассмотрим сначала исходную базовую триангуляцию ($\varepsilon = 0$). В случае куба плотность распределения соответствующей ЭФР (кривая 1 на рис. 4а) имеет вид

$$F'(I) = \delta\left(I - \frac{1}{2} \lg(36(1 + \sqrt{2})^3)\right), \quad (17)$$

так как все тетраэдры, участвующие в триангуляции, являются конгруэнтными. В отличие от куба для ромбоэдра плотность распределения ЭФР (кривая 1 на рис. 4б) является бимодальной и представляет собой сумму двух слагаемых

$$F'(I) = \frac{1}{3} \delta \left(I - \frac{1}{2} \lg(216\sqrt{3}) \right) + \frac{2}{3} \delta \left(I - \frac{1}{2} \lg(72(1 + \sqrt{3}/2)^3) \right), \quad (18)$$

так как одна третья часть тетраэдров является правильными тетраэдрами с ребром 1, а остальные две трети конгруэнтных тетраэдров имеют каждый по пять ребер длины 1 и одно ребро длины $\sqrt{2}$.

Как видно из рис. 4, с увеличением значений ϵ , профиль ЭФР размывается, становясь все более пологим, а верхняя граница значений индекса I_{VS} отодвигается вправо. Такое поведение ЭФР представляется естественным, так как соответствующая триангуляция становится все более и более нерегулярной и включает в себя тетраэдры, все более отклоняющиеся по форме от тетраэдров базовой триангуляции и имеющие все большие значения индекса вырождения.

В заключение отметим, что вычисление индекса I_{VS} и построение ЭФР для любой заданной триангуляции не составляют трудности, поскольку в процессе решения уравнений в частных производных, как правило, объем и площадь боковых граней тетраэдра, принадлежащего триангуляции, вычисляются как вспомогательные величины. В то же время следует принять во внимание, что индекс I_{VS} , как это показано в настоящей работе, практически эквивалентен мере, основанной на оценке вырождения любого локального базиса тетраэдра. В совокупности эти обстоятельства создают предпосылки для его широкого использования в прикладных задачах. Основной характеристикой ЭФР, по-видимому, следует считать диапазон значений, принимаемый индексом вырождения, и особенно его верхнюю границу, которая определяет максимальное вырождение. Насколько полезно использование профиля ЭФР (в предложенном виде или в иных версиях) в алгоритмах триангуляции и тетраэдризации, покажут дальнейшие исследования.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова. Авторы также благодарят центр информационных технологий Гронингенского университета (Нидерланды) за предоставленную возможность проведения расчетов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gallagher R.H.* Finite Element Analysis: Fundamentals. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 1976. 396 с.
2. *Fletcher C.A.J.* Computational Galerkin methods. NY, Berlin, Heidelberg, Tokio: Springer-Verlag, 1984. 309 с.
3. *Cockburn B., Shu C.-W.* The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems // *Journal of Computational Physics*, 1998, V. 141, С. 199–224. <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5892>
4. *Sugihara K.* Degeneracy and Instability in Geometric Computation. In: Kimura, F. (eds) *Geometric Modeling*. GEO 1998. IFIP V. 75. Boston: Springer, 2001, С. 3–17. https://doi.org/10.1007/978-0-387-35490-3_1
5. *Василевский Ю.В., Данилов А.А., Липников К.Н., Чу-гунов В.Н.* Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. “Нелинейная вычислительная механика прочности.” Т. IV. Под общ. ред. В.А. Левина. Москва: Физматлит, 2016. 216 с.
6. *Preparata F.P., Shamos M.I.* Computational Geometry: An introduction. NY, Berlin, Heidelberg, Tokio: Springer-Verlag, 1985. 400 с.
7. *Hjelle Ø., Dæhlen M.* Triangulations and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006, 240 с.
8. *De Loera J.A., Rambau J., Santos F.* Triangulations. Structures for Algorithms and Applications. (Algorithms and Computation in Mathematics, V. 25) First Edition. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 548 с.
9. *Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф.* Об одном подходе к оценке вырождения треугольного элемента в триангуляции // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 510. С. 52–56. <https://doi.org/10.31857/S2686954323600088>
10. *Barbu A., Zhu S.-Ch.* Monte Carlo Methods. Los Angeles: Springer, 2020. 433 с.
11. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. Москва: Наука, 1973. 312 с.
12. *Wackerly D.D., Mendenhall III W., Scheaffer R.L.* Mathematical Statistics with Applications. 7th edition. Belmont: Thomson Higher Education, 2008. 939 с.

DEGENERATION ESTIMATION OF A TETRAHEDRAL IN A TETRAHEDRAL PARTITION OF THE THREE-DIMENSIONAL SPACE

Yu. A. Kriksin^a and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Based on the geometric characteristics of the tetrahedron, quantitative estimates of its degeneracy are proposed and their relationship with the condition number of local bases generated by the edges emerging from the same vertex is established. The concept of the tetrahedron degeneracy index is introduced in several versions and their practical equivalence to each other is established. To assess the quality of a particular tetrahedral partition, it is proposed to calculate the empirical distribution function of the degeneracy index on its tetrahedral elements. A model irregular triangulation (tetrahedralization or tetrahedral partition) of three-dimensional space is proposed, depending on the control parameter that determines the quality of its elements. The coordinates of the tetrahedra vertices of the model triangulation tetrahedrons are the sums of the corresponding coordinates of the nodes of some given regular grid and random increments to them. For various values of the control parameter, the empirical distribution function of the tetrahedron degeneracy index is calculated, which is considered as a quantitative characteristic of the quality of tetrahedra in the triangulation of a three-dimensional region.

Keywords: degeneracy index, tetrahedron, triangulation, regular mesh, pseudo-random vector, empirical distribution function