ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 88–92

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП

 Н. А. Раутиан[1,*]

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим
Поступило 10.05.2023 г.
После доработки 12.07.2023 г.
Принято к публикации 23.10.2023 г.

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина-Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости и теории распространения тепла.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, полугруппы

DOI: 10.31857/S2686954323600283, **EDN:** XRBNBC

Работа посвящена применению теории полугрупп к изучению абстрактных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Упомянутые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в большом числе прикладных задач.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [1–10] и их библиографию).

Существуют и другие подходы для описания колебаний неоднородных многофазных сред, например, подход, связанный с применением эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, изложенный в работе [11].

В работе используется подход, связанный с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений (см., например, [1, 2, 13, 14]). Сформулированы результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве (Теоремы 1 и 2). Также сформулирована теорема об экспоненциальной устойчивости полученной полугруппы (Теорема 3) при дополнительных предположениях о ядрах интегральных операторов. Приведена формулировка соответствующей задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве. Основным результатом работы является теорема о корректной разрешимости этой задачи (Теорема 4), а также начальной задачи для исходного абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения. Устанавливается связь между классическими решениями этих задач.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ $(\kappa_0 > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий ограниченный обратный. Путь B — симметрический оператор, $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$ $(D(A) \subseteq D(B))$, неотрицательный $(Bx, x) \geqslant 0$, для любых $x, y \in D(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa \|Ax\|$,

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

$0 < \kappa < 1$ для любого $x \in D(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \\ - \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} R_k(t-s)(a_k A + b_k B)u(s)ds = f(t), \quad (1) \\ t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \\ u(t) = \varphi(t), \quad t \in (-\infty, 0], \quad (2)$$

где $a_k > 0, b_k \geqslant 0, k = 1,\ldots,N, \varphi(0) = \varphi_0, \varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что функции $R_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k(t) - \text{положительные} \\ \text{невозрастающие функции}, \quad (3) \\ R_k(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad k = 1,\ldots,N.$$

Замечание 1. *Из условий* (3) *следует, что* $\lim\limits_{t\to+\infty} R_k(t) = 0$, $k = 1,\ldots,N$.

Кроме того, будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(a_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right) < 1, \quad \sum_{k=1}^{N}\left(b_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right) < 1. \quad (4)$$

Положим

$$M_k(t) = \int_t^{+\infty} R_k(s)ds, \quad k = 1,\ldots,N. \quad (5)$$

Пусть

$$A_0 = \left(1 - \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right)\right)A + \\ + \left(1 - \sum_{k=1}^{N}\left(b_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds\right)\right)B, \quad (6) \\ A_k = a_k A + b_k B.$$

Из известного результата (см. [12], стр. 361) вытекает, что операторы A_0, A_k являются самосопряженными и положительными, для всех $k = 1,\ldots,N$.

Превратим область определения $D(A_0^{\beta})$ оператора A_0^{β}, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_{β}, введя на $D(A_0^{\beta})$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^{β}.

Замечание 2. *Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца* (см. [12, 13]) *следует, что операторы A_0, A_k являются обратимыми для всех $k = 1,\ldots,N$, операторы $Q_k := A_k^{1/2}A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание, оператор A_0^{-1} ограничен в H для всех $k = 1,\ldots,N$.*

Определение 1. *Будем называть вектор-функцию $u(t)$ классическим решением задачи* (1), (2), *если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению* (1) *для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию* (2).

Через Ω_k обозначим весовое пространство $L^2_{r_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} r_k(s)\|u(s)\|_H^2 ds\right)^{1/2}, \\ r_k(\tau) := R_k^{-1}(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad k = 1,\ldots,N.$$

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [14], с. 33): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t+\tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \partial\xi(\tau)/\partial\tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \partial\xi(\tau)/\partial\tau \in \Omega_k\}$, является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [14], с. 66).

Введем операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ $(k = 1,2)$, действующие, следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = R_k(\tau)Q_k v \quad k = 1,\ldots,N \quad \tau > 0.$$

Тогда сопряженные операторы имеют следующий вид: $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$ $(k = 1,2)$,

$$\mathbb{B}_k^*\xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(t,\tau)d\tau \quad k = 1,\ldots,N.$$

Введем гильбертово пространство

$$\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\oplus_{k=1}^{N}\Omega_k\right),$$

снабженное нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \\ + \sum_{k=1}^{N}\|\xi_k\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},\right.$$
$$\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \tag{7}$$
$$\left. k = 1, \ldots, N \right\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_N(\tau)) = \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right]^T, \right.$$
$$\left. A_0^{1/2} v,\ \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau),\ k = 1, \ldots, N \right)^T. \tag{8}$$

Введем $(2 + N)$ – компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \ldots, \xi_N(t,\tau)) \in \mathbb{H},$$
$$z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \ldots, \xi_{N0}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$
$$Z(0) = z. \tag{10}$$

Определение 2. *Вектор* $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \ldots, \xi_N(t,\tau)) \in D(\mathbb{A})$ *называется классическим решением задачи* (9), (10)*, если* $v(t), \xi_0(t) \in C^1((0,+\infty), H)$, $\xi_k(t,\tau) \in C^1((0,+\infty), H)$ *для любого* $\tau > 0$, $k = 1, \ldots, N$, $Z(t) \in C([0,+\infty), D(\mathbb{A}))$, *вектор* $Z(t)$ *удовлетворяет уравнению* (9) *для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *и начальному условию* (10).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда оператор* $\mathbb{A}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$ *с плотной областью определения* $D(\mathbb{A})$, *является максимально диссипативным.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда линейный оператор* $\mathbb{A}$ *является генератором сжимающей* C_0*-полугруппы* $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$*, при этом решение задачи* (9), (10) *представимо в виде:* $Z(t) = S(t)z$, $t > 0$, *и для любого* $z \in D(\mathbb{A})$ *справедливо энергетическое равенство:*

$$\frac{d}{dt} \|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2 =$$
$$= -\sum_{k=1}^{N} \left(\lim_{\tau \to 0+} r_k(\tau) \|\xi_k(t,\tau)\|_H^2 + \int_0^{+\infty} r_k'(\tau) \|\xi_k(t,\tau)\|_H^2 d\tau \right). \tag{11}$$

Замечание 3. *Поскольку функции* $r_k(\tau)$ *являются монотонными, то, согласно* [15] (стр. 372), *их производные* $r_k'(\tau)$ *существуют почти всюду при* $\tau \in [0, +\infty)$.

2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Предположим, что ядра интегральных операторов $R_k(\tau)$, $k = 1, \ldots, N$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k'(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leqslant 0, \tag{12}$$

для некоторого $\gamma > 0$ и почти всех $\tau > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $S(t)z$ – *решение задачи* (9), (10) *при* $t > 0$ *и пусть функции* $R_k(\tau)$ $(k = 1, \ldots, N)$ *удовлетворяют условиям* (3), (4) *и условию* (12) *для некоторого* $\gamma > 0$ *и почти всех* $\tau > 0$. *Тогда существуют такие постоянные* $\theta > 1$ *и* $\omega > 0$, *что для любого* $z \in \mathbb{H}$ *справедливо неравенство*

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leqslant \theta \|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t}. \tag{13}$$

Доказательства теорем 1, 2 содержатся в статье [9], доказательство теоремы 3 содержится в статье [10].

3. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (4)*, данные задачи* (9), (10) *удовлетворяют следующим условиям:* $F(t) := (f(t), 0, 0, 0)$, *где* $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$*–заданная вектор-функция,* $M_k(\cdot)$, $k = 1, 2$ *определяются формулами* (5), $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$ – *заданные векторы, вектор-функция*

$$z = \left(\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)\right) \in D(\mathbb{A}), \tag{14}$$

где функции $\xi_{0k}(\tau)$ $(k = 1, 2)$ *определены следующими формулами*

$$\xi_{0k}(\tau) := \int_{-\infty}^{0} R_k(\tau - s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds,$$
$$\tau > 0, \quad k = 1, 2,$$

вектор-функция $\varphi(t)$ *задана при* $t \in (-\infty, 0]$, *причем* $\varphi(t) \in H_1$, $\varphi'(t) \in H_1$ *при* $t \in (-\infty, 0]$, $\varphi(t) \in C((-\infty, 0], H_1)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C((-\infty, 0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$, *кроме того,* $\lim_{t \to -\infty} [A\varphi(t)] = 0$.

Пусть также выполнено любое из следующих условий:

1) *вектор-функция* $f(t) \in H_{1/2}$ *и* $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, $k = 1, \ldots, N$; *или*

2) *вектор-функция* $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = 1, \ldots, N$.

Тогда задача (9), (10) *имеет единственное классическое решение*

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ *— классическое решение задачи* (1), (2), *с соответствующими данными* $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива следующая оценка*

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant$$
$$\leqslant d\left[\|\varphi_1\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2 + \right.$$
$$+ \sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{-\infty}^{0} R_k(\tau - s)Q_k A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}ds\right\|_{\Omega_k}^2 +$$
$$\left. + \left(\int_0^t \|f(s)\|_H\, ds\right)^2\right]$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Более того, если функции $R_k(\tau)$ *удовлетворяют также и условию* (12), *тогда справедлива следующая оценка*

$$E_1(t) := \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant d\left[\left(\|\varphi_1\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2 + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{-\infty}^{0} R_k(\tau - s)Q_k A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}ds\right\|_{\Omega_k}^2\right)e^{-2\omega t} +$$
$$\left. + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\|f(s)\|\, ds\right)^2\right]$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f, *векторов* φ_0, φ_1 *и постоянной* ω, *определенной в формулировке теоремы* 3.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Теоремы 1–3 доказаны при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики. Теорема 4 доказана при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер проекта FSSF-2023-0016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland). 2003. V. 146. 444 p.
2. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with memory.Theory and applications. New-York–Dordrecht–Heidelberg–London, Springer, 2012. 576 p.
3. *Локшин А.А., Суворова Ю.В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 152 с.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
6. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: “Наука”, 1977. 384 с.
7. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Spectrum of one-dimensional eigenoscillations of a medium consisting of viscoelastic material with memory and incompressible viscous fluid // Journal of Mathematical Sciences. 2021. V. 257. № 5. P. 732–742.
8. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Correct solvability and representation of solutions of Volterra integrodifferential equations with fractional exponential kernels // Doklady Mathematics. 2019. V. 100. № 2. P. 467–471.
9. *Rautian N.A.* Semigroups Generated by Volterra Integro-Differential Equations // Differential Equations. 2020. V. 56. № 9. P. 1193–1211.
10. *Rautian N.A.* Exponential stability of semigroups generated by volterra integro-differential equations // Ufa Mathematical Journal. 2021. V. 13. № 4. P. 65–81.
11. *Skubachevskii A.L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // Russian Mathematical Surveys. 2016. V. 71. № 5. P. 801–906.
12. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Springer, 1966.
13. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: “Наука”, 1967. 464 с.
14. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer-Verlag, New York, 2000. 586 p.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. “Наука”, 1989.

STUDY OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS BY METHODS OF SEMIGROUP THEORY

N. A. Rautian[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

The abstract Volterra integro-differential equations are investigated, which are operator models of problems of viscoelasticity theory. The class of equations under consideration also includes the Gurtin-Pipkin integro-differential equations describing the process of heat propagation in media with memory. The sums of decreasing exponents or sums of Rabotnov functions with positive coefficients can be considered in particular as the kernels of integral operators, which are widely used in the theory of viscoelasticity and heat propagation theory.

Keywords: Volterra integro-differential equations, linear differential equations in Hilbert spaces, semigroups