ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 71–75

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ГРАДИЕНТНЫЕ ПОТОКИ В ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ

 Член-корреспондент РАН П. И. Плотников[1,*], Я. Соколовский[2,3,4,]**

Поступило 06.02.2023 г.
После доработки 02.05.2023 г.
Принято к публикации 07.08.2023 г.

В работе рассматривается задача идентификации включения, содержащегося в некоторой физическиой области, по данным измерений на границе этой области. В частности, к этому классу задач относятся задача импедансной электротомографии и ряд других обратных задач. Задача идентификации формулируется как задача минимизации целевого функционала, который характеризует отклонение данной конфигурации от возможного решения задачи. Наилучшим выбором такого функционала является энергетический функционал Кона-Вогелиуса. В работе рассматривается стандартная регуляризация этого функционала, полученная добавлением к нему линейной комбинации периметра включения и функционала Уиллмора, контролирующего кривизну границы включения. В двумерном случае доказывается нелокальная теорема существования сильных решений для динамической системы порожденной градиентным потоком регуляризованного функционала Кона-Вогелиуса.

Ключевые слова: оптимизация формы, обратные задачи, потоки Уиллмора, эластика Эйлера

DOI: 10.31857/S2686954323600076, **EDN:** HMHGGD

Статья посвящена применению теории геометрических потоков к задачам оптимизации формы. Начало современной теории оптимизации формы было положено в монографиях [5–17], в которых она приняла вид самостоятельной математической дисциплины. В настоящее время теория оптимизации формы имеет приложения в целом ряде областей. Здесь следует упомянуть приложения в механике жидкостей и твердых тел, в теории обратных задач геофизики и теории изображений. В настоящей работе мы рассмотрим базовую $2D$ задачу, которая допускает следующую формулировку. Зафиксируем произвольно односвязную ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с бесконечно дифференцируемой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что эта область содержит включение Ω_i такое, что $\overline{\Omega_i} \subset \Omega$. Форма включения неизвестна и должна определяться вместе с решением задачи. Далее мы будем предполагать, что граница включения Γ является Жордановой кривой. В этих предположениях Γ разбивает область Ω на две части — включение Ω_i и криволинейное кольцо $\Omega_e = \Omega\setminus\overline{\Omega_i}$. Наконец зафиксируем произвольную постоянную $a_0 > 0$ и положим

$$a(x) = a_0 \;\text{ в }\; \Omega_i, \quad a = 1 \;\text{ в }\; \Omega_e. \tag{1}$$

В качестве основного примера рассмотрим задачу об идентификации, возникающую в электрической импедансной томографии [2]. Такого рода задачи возникают в медицине при восстановлении распределения проводимости по данным поверхностных измерений. В простейшем виде она формулируется следующим образом.

Для заданных $g, h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$g \in L^2(\partial\Omega), \quad h \in W^{1/2,2}(\partial\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} g\,ds = 0,$$

требуется найти Γ и электрический потенциал $u : \Omega \to \mathbb{R}$, такие, что

$$\operatorname{div}(a\nabla u) = 0 \;\text{ в }\; \Omega, \quad a\nabla u \cdot \nu = g,$$
$$u = h \;\text{ на }\; \partial\Omega,$$

где ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Эта задача является некорректной и в общем случае не имеет решений. Ее приближенное решение может быть найдено с помощью методов теории оптимиза-

[1]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*

[2]*Systems Research Institute of the Polish Academy of Sciences, Warszawa, Poland*

[3]*Institut Elie Cartan, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Lorraine, Nancy, France*

[4]*Department of Scientific Computing, Informatics Center, Federal University of Paraiba, Joao Pessoa, Paraiba, Brazil*

**E-mail: piplotnikov@mail.ru*

***E-mail: Jan.Sokolowski@univ-lorraine.fr*

ции формы. С этой целью введем в рассмотрение функции $v, w : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям и краевым условиям

$$\operatorname{div}(a\nabla v) = 0 \quad \operatorname{div}(a\nabla w) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$a\nabla v \cdot \nu = g \quad w = h \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$
$$\int_{\partial\Omega} v\,ds = 0.$$

Здесь s – дуговая абсцисса, абсолютная величина которой равна длине дуги границы области Ω, отсчитываемой от некоторого начального положения до текущей точки.

Хорошо известно, [9], что каждая из этих задач имеет единственное решение класса $W^{1,2}(\Omega)$. Согласно оценкам де Джорджи-Нэша, [9] гл. 3, эти решения ограничены и принадлежат классу Гёльдера на каждом компактном подмножестве Ω. В частности, функции v, w непрерывны по Гёльдеру в окрестности Γ и не имеют скачка на Γ. Этот результат не зависит от гладкости и структуры Γ. Задачи (2) являются задачами трансмиссии для гармонических функций. Для их решений справедливы оценки Шаудера, см., например, [10]. Из этих оценок следует, что если $\partial\Omega$ и Γ принадлежат классу $C^{l+\beta}$ с целым $l \geqslant 2$ и $0 < \beta < 1$, то для любых $g \in C^{l-1+\beta}(\partial\Omega)$ и $h \in C^{l+\beta}(\partial\Omega)$ решения задач (2) принадлежат классу $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega_i}) \cup C^{l+\alpha}(\overline{\Omega_e})$, $0 < \alpha < \beta$.

Далее определим неотрицательный целевой функционал, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда $v = w =: u$. Наиболее удачным является выбор в качестве целевого функционала Кона-Вогелиуса, определенного равенством [8],

$$J(\Gamma) = \int_{\Omega} a\nabla(v - w)\cdot\nabla(v - w)dx. \tag{3}$$

Заметим, что при фиксированных h и g этот функционал зависит только от Γ. Эта вариационная проблема без дополнительных геометрических ограничений на форму включения также не имеет приемлемого решения. Наиболее распространенным методом для преодоления этих трудностей является ограничение на периметр включения с добавлением дополнительного слагаемого к целевому функционалу и заменой его на функционал $\epsilon_p\mathcal{L} + J$. Здесь $\mathcal{L}$ – периметр Ω_i, $\epsilon_p > 0$ – параметр регуляризации. Такая регуляризация была предложена впервые в [3] по аналогии с функционалом Мамфорда-Шаха в теории сегментации изображений [14]. Более сильная регуляризация может быть получена путем введения ограничений на кривизну. Этот подход также мотивирован теорией изображений, [15]. Единственным геометрически инвариантным функционалом, зависящим от кривизны, является функционал Уиллмора. Для кривых он совпадает с упругой энергией эластики Эйлера и имеет вид

$$\mathcal{E}_e(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}|k|^2 ds,$$

где k – вектор кривизны кривой Γ, s – дуговая абсцисса Γ. Поэтому сильная регуляризация целевого функционала может быть взята в форме

$$\mathcal{E} + J, \quad \mathcal{E} = \epsilon_e\mathcal{E}_e + \epsilon_p\mathcal{L}.$$

Здесь ϵ_j, $j = e, p$, некоторые положительные постоянные. Без ограничения общности можно считать $\epsilon_j = 1$, что приводит к следующему выражению для $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}(\Gamma) = \int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}|k|^2 + 1\right)ds = \mathcal{E}_e + \mathcal{L}.$$

Наиболее важным вопросом теории оптимизации формы является построение эффективного алгоритма для проведения численных расчетов. Стандартным является метод наискорейшего спуска, основанный на теории дифференцирования форм развитой в [17] и [5]. Для применения этой теории необходимо, чтобы кривая $\Gamma = \partial\Omega_i$ обладала достаточной гладкостью. Далее мы будем рассматривать класс дважды дифференцируемых иммерсий $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ с кривой $\Gamma = f(\mathbb{S}^1)$ диффеоморфной единичной окружности $\mathbb{S}^1$. Производная по форме от целевого функционала определяется следующим образом. Выберем произвольное векторное поле $X : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ и положим

$$f^t(\theta) = f(\theta) + tX(\theta), \quad t \in (-1,1), \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

Кривые $\Gamma^t = f^t(\mathbb{S}^1)$, $t \in (-1,1)$, определяют однопараметрическое семейство возмущений кривой Γ. Производная по форме $\dot{J}$ целевого функционала J в направлении X определяется равенством

$$\dot{J}(\Gamma)[X] = \frac{d}{dt}J(\Gamma^t)|_{t=0}.$$

Если она допускает представление Адамара

$$\dot{J}(\Gamma)[X] = \int_{\Gamma}\phi n \cdot X ds, \quad \phi \in L^1(\Gamma),$$

где n – единичный вектор внутренней нормали к $\Gamma = \partial\Omega_i$, то векторное поле

$$dJ(\theta) := \phi(\theta)n(\theta), \quad \theta \in \mathbb{S}^1,$$

называется градиентом целевого функционала J в точке f. Для рассматриваемой задачи об идентификации формы включения градиент функционала Кона-Вогелиуса определяется равенством [2, 16],

$$dJ = 2(a\partial_n v[\partial_n v] - a\partial_n w[\partial_n w])n - \\ - [a\nabla v \cdot \nabla v - a\nabla w \cdot \nabla w]n, \tag{4}$$

в котором v, w – решения задачи (2), $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе через Г. Для того, чтобы определить представление для градиента геометрического функционала $\mathscr{E}$, введем следующие обозначения. Напомним, что f является 2π периодической функцией угловой переменной $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Как и ранее, $s = s(\theta)$ является дуговой абсциссой кривой Г и определяется равенством

$$s(\theta) = \int_0^\theta |\partial_\sigma f(\sigma)| d\sigma.$$

Элемент длины Г и производная по дуговой абсциссе определяются соотношениями

$$ds = |\partial_\theta f(\theta)| d\theta, \quad \partial_s = |\partial_\theta f(\theta)|^{-1}\partial_\theta.$$

Независимыми переменными являются угловая переменная θ и квази-время t. Поэтому ∂_s является нелинейным дифференциальным оператором.

Касательный и нормальный векторы к Г и кривизна Г задаются формулами

$$\tau(\theta) = \partial_s f(\theta), \quad n(\theta) = (-\tau_2, \tau_1), \quad k(\theta) = \partial_s^2 f(\theta).$$

В этих обозначениях градиент геометрического функционала $\mathscr{E}$ имеет вид

$$d\mathscr{E}(f) = \nabla_s \nabla_s k + \frac{1}{2}|k|^2 k - k, \\ \nabla_s k = \partial_s k - (\partial_s k \cdot \tau)\tau.$$

Эти формулы являются классическими, см., например, [6]. Если f принадлежит классу C^3, то отображение $f - \delta d(\mathscr{E} + J)$ определяет иммерсию $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{R}^2$ для всех достаточно малых $\delta > 0$. В методе скорейшего спуска оптимальная форма определяется как предел последовательности

$$f_{n+1} = f_n - \delta(d\mathscr{E}(f_n) + dJ(f_n)), \quad n \ge 0.$$

Система этих соотношений может рассматриваться как временная дискретизация задачи Коши

$$\partial_t f(t) = -(d\mathscr{E}(f(t)) + dJ(f(t))), \quad f(0) = f_0. \tag{5}$$

Так как величина регуляризованного целевого функционала убывает по времени, то решение задачи (5) в каждый момент времени может рассматриваться как приближенное решение исходной вариационной задачи. С учетом выражений для dJ и $d\mathscr{E}$ задача (5) может быть записана в виде задачи Коши для нелинейного операторного уравнения

$$\partial_t f + \nabla_s \nabla_s k + \frac{1}{2}|k|^2 k - k + dJ = 0 \\ \text{при} \quad t > 0, \quad f(0) = f_0. \tag{6}$$

В литературе это уравнение с $J = 0$ часто называется уравнением распрямления или одномерным потоком Уиллмора. В настоящее время существует почти полная теория задачи Коши и начально-краевой задачи для такого потока, см. [1, 6, 12]. Мы используем методы и подходы развитые в этих статьях. Целью настоящей работы является доказательство существования глобального решения задачи (6) вплоть до момента разрушения решения. Чтобы сформулировать этот результат, нам потребуется некоторая дополнительная информация о кривых с ограниченной энергией Уиллмора. Первое наблюдение состоит в том, что если энергия кривой Г допускает оценку $\mathscr{E}(\Gamma) \leqslant E_0$, то длина этой кривой допускает оценки

$$\frac{2}{E_0} \leqslant \mathscr{L} \leqslant E_0. \tag{7}$$

Выберем произвольную иммерсию $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ с $f(\mathbb{S}^1) = \Gamma$ такую, что $\mathscr{E}(\Gamma) \le E_0$. Зафиксируем произвольно $z = f(\theta_z) \in \Gamma$. Зафиксируем дуговую координату s так, что $s = 0$ в точке z и $-\mathscr{L}/2 \leqslant s < \mathscr{L}/2$. Для каждого $0 < \kappa < \mathscr{L}/2$ обозначим через Γ_κ дугу кривой Г, соответствующую значениям дуговой абсциссы $-\kappa < s < \kappa$.

Далее введем в $\mathbb{R}^2$ декартову систему координат (x_1, x_2) с центром в z такую, что ось абсцисс направлена вдоль касательного вектора $\tau(\theta_z)$, а ось ординат направлена вдоль нормального вектора $n(\theta_z)$. Следующая лемма показывает, что кривая Г локально может быть представлена как график $C^{1+\alpha}$ функции в окрестности точки z.

Лемма 1. *Существуют положительные числа* κ, α, β *и* c, *зависящие только от постоянной* E_0, *и функция* $\eta \in C^1(-\alpha, \beta)$, $\eta(0) = 0$, *с следующими свойствами*

$$0 < c^{-1} \leqslant \varkappa, \quad \alpha, \beta \le c, \quad \|\eta'\|_{C(-\alpha,\beta)} \leqslant 1/6.$$

Отображение $x_1 \to (x_1, \eta(x_1))$ определяет C^1-*параметризацию дуги* $\Gamma_{3\varkappa}$ и отображает диффеоморфно интервал $(-\alpha, \beta)$ на эту дугу.

Лемма 1 дает простой критерий отсутствия самопересечений кривых с конечной энергией. Предположим, что иммерсия $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Кроме того, предположим, что существует постоянная $\nu > 0$ со следующими свойствами. Для любой точки $z \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\operatorname{dist}(\Gamma \setminus \Gamma_{3\kappa}, \Gamma_{2\kappa}) \geqslant \nu. \tag{8}$$

Тогда Г не имеет самопересечений. Обратно, если Г не имеет самопересечений, то неравенство

(8) выполняется для некоторой постоянной $\nu > 0$ для всех точек $z \in \Gamma$.

Если Γ является спрямляемой кривой длины $\mathcal{L}$, то ее кривизна, градиент функционала Кона-Вогелиуса, касательный и нормальный векторы могут рассматриваться как $\mathcal{L}$-периодические функции дуговой абсциссы s. Для каждого вещественного $r \geqslant 0$, гильбертово пространство $H^r(\Gamma)$ определяется как множество всех $\mathcal{L}$-периодических функций f, обладающих конечной нормой

$$\|f\|^2_{H^r(\Gamma)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (1+|m|^2)^r |f_m|^2,$$
$$f_m = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}}\int_\Gamma e^{-\frac{2\pi}{\mathcal{L}}msi} f(s)ds.$$

Для целых r пространство $H^r(\Gamma)$ совпадает с пространством Соболева $W^{r,2}(\Gamma)$. Если кривая зависит от временной переменной, то введенные пространства также зависят от этой переменной. Корректность определения пространств $H^r(\Gamma)$ для кривых с конечной энергией гарантируется неравенствами (7). Следующая теорема является центральным результатом настоящей работы.

Теорема 2. *Предположим, что начальная кривая* Γ_0 *не имеет самопересечений и не имеет общих точек с* $\partial\Omega$. *Предположим также, что*

$$k_0 \in H^m(\Gamma_0), \quad |\partial_\theta f_0|^{\pm 1} \in C^{m-5}(\mathbb{S}^1)$$

для некоторого $m \geqslant 10$. *Тогда существует максимальное* $T \in (0,\infty]$ *со следующими свойствами. Задача Коши* (6) *имеет единственное решение*

$$f \in C(0,T;C^{m-5}(\mathbb{S}^1)), \quad \partial_t f \in C(0,T;C^{m-9}(\mathbb{S}^1)).$$

Жордановы кривые $\Gamma(t) = f(t,\mathbb{S}^1)$, $t \in [0,T)$ отделены от $\partial\Omega$. Если $T < \infty$, то существует последовательность $f(t_j)$, $t_j \to T$, $j \to \infty$, такая, что $\operatorname{dist}(\Gamma(t_j),\partial\Omega) \to 0$ или (u) $f(t_j)$ сходятся в $C^1(\mathbb{S}^1)$ при $j \to \infty$ к некоторой иммерсии f_∞. При этом предельная кривая Γ_∞ имеет точку самопересечения.

Доказательство проводится стандартным методом продолжения по временной переменной. Мы остановимся на двух центральных моментах. Уравнение (6) можно рассматривать как возмущение уравнения распрямления. Поэтому нам необходимо выяснить зависимость градиента целевого функционала от кривизны Γ. Нужный результат дается следующим утверждением, которое представляет самостоятельный интерес. Предположим, что граница включения Γ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 3. *Энергия жордановой кривой* $\Gamma \subset \Omega$ *допускает оценку* $\mathcal{E}(\Gamma) \leqslant E_0$. *Существует положительное число* $\nu > 0$ *такое, что* Γ *удовлетворяет условию отсутствия самопересечений* (8). *Существует* $\rho > 0$ *такое, что* $\operatorname{dist}(\Gamma,\partial\Omega) > \rho$.

Каждая кривая, удовлетворяющая этим условиям, принадлежит классу $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$. Она разбивает Ω на включение Ω_i и криволинейное кольцо $\Omega_e = \Omega\backslash\overline{\Omega_i}$. Рассмотрим произвольное слабое решение уравнения

$$\operatorname{div}(a\nabla w) = 0 \text{ в } \Omega, \quad w \in W^{1,2}(\Omega), \tag{9}$$

в котором кусочно-постоянная функция проводимости $a : \Omega \to \mathbb{R}^+$ определена соотношениями (1). Положим

$$w^- := w \text{ в } \Omega_e, \quad w^+ := w \text{ в } \Omega_i,$$
$$\partial_n w^\pm = \nabla w^\pm \cdot n \text{ на } \Gamma.$$

Предложение 4. *Пусть кривая* Γ *удовлетворяет условию* 3 *и* $k \in H^m(\Gamma)$ *для некоторого целого* $m \geq 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\partial_n w^\pm\|_{H^{m+1/2}(\Gamma)} \leqslant c(1+\|k\|_{H^m(\Gamma)})\|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

с постоянной c, *зависящей только от* m *и постоянных* E_0, ν, ρ *в условии* 3.

Заметим, что функции v,w в определении (3) функционала Кона-Вогелиуса J удовлетворяют уравнению (9) и ограничены в пространстве $W^{1,2}(\Omega)$ постоянной, зависящей лишь от данных задачи. Отсюда, из формулы (4) для градиента J и предложения 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Предположим, что* Γ *удовлетворяет условию* 3, $k \in H^m(\Gamma)$, $m \geqslant 1$. *Тогда для любого* $\beta \in [0,1/2)$ *существует постоянная* c, *зависящая только от данных* g, h, *показателей* m, β *и постоянных* E_0, ν, ρ *в условии* 3, *такая, что*

$$\|dJ\|_{H^{m+\beta}(\Gamma)} \leqslant c(1+\|k\|_{H^m(\Gamma)}).$$

Данная теоремой 5 оценка градиента функционала Кона-Вогелиуса вместе с модификацией доказательства априорных оценок решений уравнения распрямления приводит к следующему утверждению, которое является вторым центральным моментом доказательства теоремы 2.

Теорема 6. *Пусть* $f : [0,T]\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *является гладким решением задачи Коши* (6). *Предположим, что для некоторого четного* $m \geqslant 6$ *энергия начальной конфигурации допускает оценку*

$$\|k_0\|_{H^m(\Gamma_0)} \leqslant E_m.$$

Кроме того предположим, что каждая из кривых $\Gamma(t)$, $t \in [0,T]$, *удовлетворяет условию* 3 *с по-*

стоянными ν *и* ρ, *не зависящими от t. Тогда существует постоянная c*, *зависящая только от* E_0, ν, ρ *и m*, *такая*, *что*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|k(t)\|^2_{H^{m-2}(\Gamma(t))}+\int_0^T\|k(t)\|^2_{H^m(\Gamma(t))}dt\leqslant cE_m^2+c(1+T).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dall' Acqua A.*, P*ozzi P., Willmore-Helfrich A.* L^2 flows with natural boundary conditions // Communications in analysis and geometry. 2014. V. 221. № 4. P. 617–669.
2. *Afraites L., Dambrin M., Kateb D.* Shape methods for the transmission problem with a single measurment // Numerical functional analysis and optimization. 2007. V. 28. № 5-6. P. 519–551.
3. *Ambrosio L., Buttazzo G.* An optimal design problem with perimeter penalization // Calc. Var. Partial Differential Equations. 1993. V. 1. P. 55–69.
4. *Chou K.-S., Zhu X.-P.* The curve shortening problem. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
5. *Delfour M., Zolesio J.* Shapes and Geometries, SIAM, Philadelphia, 2001.
6. *Dziuk G., Kuwert E., Schatzle R.* Evolution of elastic curves in $\mathbb{R}^n$: existence and computation // SIAM J. Math. Anal. 2002. V. 33. № 5. P. 1228–1245 (electronic).
7. *Eppler K., Harbrecht H.* Shape optimization for 3D electrical impedance tomography. In R. Glowinski and J. Zolesio, editors, Free and Moving Boundaries: Analysis, Simulation and Control. Vol. 252 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. P. 165–184.
8. *Kohn R., Vogelius M.* Determining conductivity by boundary measurements // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 289–298.
9. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Москва, Наука, 1971.
10. *Le Elliptic H.* equations with transmission and Wentzel boundary conditions and an application to steady water waves in the pesence of wind // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. V. 38. P. 3357–3385.
11. *Lin C.-C.* L2-flow of elastic curves with clamped boundary conditions // J. Differ. Equ. 2012. V. 252. № 12. P. 6414–6428.
12. *Mantegazza C., Posetta M.* The Lojasievicz-Simon inequality for the elastic flows, arXiv: 2007.16093v3 [math AP]. 18 Dec 2020.
13. *Meyers N.* An L^p estimates for the gradients of solutions of second ordet elliptic divergence equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1963. V. 17. P. 189–206.
14. *Mumford D., Shah J.* Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variaional problems // Communications on Pure and AppliedMathematics. 1989. V. 42. P. 577–684.
15. *Mumford D.* Elastica and Computer Vision. In Algebraic Geometry and its Applications (ed. C.L. Bajaj). Springer-Verlag, Berlin, 1993.
16. *Roche J., Sokolowski J.* Numerical methods for shape identification problems. Control Cybern. 1996. V. 25. P. 867–894.
17. *Sokolowski J., Zolesio J.* Introduction to Shape Optimization. Springer, Berlin, 1992.

GRADIENT FLOWS IN THE SHAPE OPTIMIZATION THEORY

P. I. Plotnikov[a] and J. Sokolowski[b,c,d]

[a] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Systems Research Institute of the Polish Academy of Sciences, Warszawa, Poland*

[c] *Institut Elie Cartan, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Lorraine, Nancy, France*

[d] *Department of Scientific Computing, Informatics Center, Federal University of Paraiba, Joao Pessoa, Paraiba, Brazil*

The identification problem of an inclusion is considered in the paper. The inclusion is unknown subdomain of a given physical region. The available information on the inclusion is governed by measurements on the boundary of this region. In particular, the single measurement problem of impedance electrotomography and other inverse problems are included in our approach. The shape identification problem can be solved by the minimization of an objective function taking into account the measurement data. The best choice of such objective function is the Kohn-Vogelius energy functional. The standard regularization of the Kohn-Vogelius functional include the perimeter and Willmore curvature functional evaluated for an admissible inclusion boundary. In the two-dimensional case, a nonlocal existence theorem of strong solutions is proved for the gradient flow dynamical system generated for such a regularization of the Kohn-Vogelius functional.

Keywords: Shape optimization, inverse problems, Willmore flow, Euler elastica