ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 54–59

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

К ТЕОРИИ БИРМАНА–КРЕЙНА–ВИШИКА

 М. Маламуд[1,2,*]

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым
Поступило 07.09.2022 г.
После доработки 16.11.2022 г.
Принято к публикации 26.12.2022 г.

DOI: 10.31857/S2686954322600574, **EDN:** CQMCAS

Введение. Пусть $A \geq 0$ – замкнутый неотрицательный плотно определенный симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Согласно теореме Стоуна-Фридрихса, множество $\operatorname{Ext}_A(0,\infty)$ всех неотрицательных самосопряженных расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A непусто (см. [1, 5]). Наиболее полная теория расширений оператора $A \geq 0$, включающая описание всех расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^* \geq 0$, была построена М. Крейном [13]. В частности, им было доказано [13] (см. также [1, 10]), что множество $\operatorname{Ext}_A(0, \infty)$ содержит максимальное (Фридрихса) и минимальное (Крейна-фон Неймана) расширения $\hat{A}_F$ и $\hat{A}_K$. Они однозначно характеризуются неравенствами:

$$\left(\hat{A}_F + a\right)^{-1} \leq \left(\tilde{A} + a\right)^{-1} \leq \left(\hat{A}_K + a\right)^{-1}, \quad \tilde{A} \in \operatorname{Ext}_A(0,\infty), \quad a > 0. \tag{1}$$

Теория Крейна была существенно дополнена Вишиком [15] и Бирманом [4]. В настоящее время она известна как теория Бирмана–Крейна–Вишика (см. [2]).

Обозначим через $m_A = \inf\{(Af, f) : \|f\| = 1\}$ нижнюю грань оператора A. Подчеркнем, что расширение Фридрихса $\hat{A}_F$ всегда сохраняет нижнюю грань, т.е. ($m_{\hat{A}_F} = m_A$), в то время как расширение Крейна $\hat{A}_K$ сохраняет ее, только если $m_A = 0$.

В дальнейшем мы будем систематически использовать ортогональное разложение

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1^{\perp}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{H}_1 := \operatorname{ran}(I + A) \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}_1^{\perp} = \ker(I + A^*) =: \mathfrak{N}_{-1}(A). \tag{2}$$

Обозначим P_1 и P_{-1} ортопроекторы в разложении [2] на подпространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_1^{\perp} = \mathfrak{N}_{-1}(A)$ соответственно. Далее, считая A положительно определенным, $A \geq m_A > 0$, и полагая $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_0(A) := \ker A^*$, приходим к следующему представлению для $\hat{A}_K$:

$$\hat{A}_K = \hat{A}'_K \oplus (\mathbb{O} \upharpoonright \mathfrak{N}_0), \quad \text{где} \quad \hat{A}'_K := \hat{A}_K \upharpoonright \mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{M}_0 := \mathfrak{M}_0(A) := \mathfrak{N}_0^{\perp} = \overline{\operatorname{ran} A}. \tag{3}$$

Оператор $\hat{A}'_K$ называют редуцированным расширением Крейна.

В заметке развивается и дополняется следующий результат Крейна ([13], теорема 26):

$$\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}) \Rightarrow \left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{M}_0). \tag{4}$$

Мы показываем, что многие *спектральные свойства оператора* $\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}$ близки к соответствующим спектральным свойствам оператора $P_1(I + A)^{-1}$, *а не оператора* $\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1}$. В частности, показано, что *обратная к* (4) *импликация*, *вообще говоря, неверна*, а замена оператора $\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1}$ на $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ превращает ее в эквивалентность (предложение 1). Более того, показывается (см. теорему 2), что собственные значения этих операторов имеют одинаковую степенную асимптотику.

Мы также приводим полное отрицательное решение следующей проблемы Бирмана:

Проблема 1 (Бирман). *Верна ли импликация* $A^{-1} \in \mathfrak{S}S_\infty \Rightarrow \left(\hat{A}_F\right)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$?

Именно, показано, что при условии $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ спектр $\hat{A}_F$ может быть произвольным (см. теорему 4).

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
* *E-mail: malamud3m@gmail.com*

В частности, каждый симметрический оператор $A \geq 0$, удовлетворяющий условиям $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ и $\left(\hat{A}_F\right)^{-1} \notin \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, *не допускает полуограниченных расширений* $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ с компактной резольвентой, однако, в силу классической теоремы Вишика [15], всегда допускает расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ с $(\tilde{A})^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. В этом случае все расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ с компактной резольвентой — не полуограниченные.

Мы также дополняем исследования Бирмана [4] и Грубб [7] об эквивалентности полуограниченности расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A и граничного оператора (теорема 6).

Обозначения. Всюду в заметке $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}', \mathfrak{H})$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{H}', \mathfrak{H})$ — обозначают, соответственно, пространства ограниченных и замкнутых операторов из гильбертова пространства $\mathfrak{H}'$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) := \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{C}(\mathfrak{H}) :=$ $:= \mathfrak{C}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$. В дальнейшем, $\mathrm{dom}(T)$, $\mathrm{ran}(T)$ и $\ker(T)$ — область определения, образ и ядро оператора $T \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ соответственно; $\sigma_{ac}(T)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ и $\sigma_p(T)$ обозначают абсолютно непрерывный, существенный и точечный спектры оператора $T = T^*$ (см. [5]).

1. Преобразование М.Г. Крейна. Следуя [13], рассмотрим дробно-линейное преобразование М.Г. Крейна:

$$A \mapsto T_1 := X(A) := (I - A)(I + A)^{-1} = \\ = -I + 2(I + A)^{-1}. \quad (5)$$

Хорошо известно ([1, 13]), что $T_1(\in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}))$ — симметрическое неплотно заданное сжатие в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathrm{dom}(T_1) = \mathrm{ran}(I + A) = \mathfrak{H}_1$. В соответствии с ортогональным разложением (2) сжатие T_1 допускает блочно-матричное представление

$$T_1 = X(A) = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} \\ VD_{T_{11}} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \\ T_{11} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1), \quad V := \mathrm{clos}\left(T_{21} D_{T_{11}}^{(-1)}\right) \in \mathfrak{B}\left(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1^\perp\right). \quad (6)$$

Здесь $D_{T_{11}} := \sqrt{I - T_{11}^2}$, V — сжатие, однозначно определяемое условием $\ker V \supset \ker D_{T_{11}}$, и $D_{T_{11}}^{(-1)}$ обозначает обобщенный обратный оператор, $D_{T_{11}}^{(-1)} \upharpoonright \ker D_{T_{11}} = 0$.

2. Основное тождество, связывающее $\hat{A}'_K$ и A.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутый положительно определенный ($m_A > 0$), плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $T_1 = X(A) = \begin{pmatrix} T_{11} \\ VD_{T_{11}} \end{pmatrix}$ определен соотношениями* (5), (6) *и $D_V := (I - V^*V)^{1/2}$ — дефектный оператор оператора V. Тогда*:

(i) *операторы* $\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}$ *и* $D_V P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} D_V$ *унитарно эквивалентны, т.е. существует изометрия $U (\in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{M}_0))$ из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{M}_0$ такая, что*

$$U^{-1}\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1} U = \\ = D_V P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} D_V \quad \text{и} \quad 0 \in \rho(D_V); \quad (7)$$

(ii) *если дополнительно* $\dim(\ker V) = \dim(\ker V^*)$, *то существует изометрия $U_1 (\in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2))$ из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$ такая, что оператор D_V в* (7) *допускает представление*

$$D_V = U_1^* \left(\left[\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_K\right)^{-1} - \left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1}\right] \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}(A)\right)^{1/2} U_1. \quad (8)$$

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* 1, $c = \|D_V\| (\leq 1)$. *Тогда*:

(i) *существует изометрия U_1 из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{M}_0$ такая, что справедливы неравенства*:

$$U_1^* \left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1} U_1 \leq c^2 P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \leq P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}; \quad (9)$$

(ii) *если, к тому же,* $(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ *компактен, то собственные значения операторов* $\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}$, $P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ *упорядоченные по убыванию, связаны неравенствами*

$$\lambda_n\left((I_{M_0} + \hat{A}'_K)^{-1}\right) \leq c^2 \lambda_n\left(P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}\right) \leq \\ \leq \lambda_n\left(P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (10)$$

(iii) *если, к тому же,* $\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1}$ *компактен, то верны неравенства*:

$$\lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) \leq \lambda_n\left(P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}\right) \leq \\ \leq \lambda_n\left(\left(I + \hat{A}_F\right)^{-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Спектральные свойства редуцированного расширения Крейна оператора A с компактным обратным. В соответствии с результатом Крейна ([13], теорема 26) верна импликация (4). Заметим, что *обратная к* (4) *импликация, вообще говоря, неверна*, но замена $\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1}$ на $P_1 (I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ в (4) превращает ее в эквивалентность.

Как вытекает из результатов раздела 4, оператор $\hat{A}'_K$ *не наследует другие спектральные свойства* $\hat{A}_F$ такие, как абсолютная непрерывность, сингулярность и т.д.

3А. Компактность резольвенты редуцированного расширения Крейна. Применяя теорему 1, мы дополняем и обобщаем результат Крейна (импликацию (4)).

Как обычно, $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ – класс компактных операторов в $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ – идеалы Неймана-Шаттена в $\mathfrak{H}$: $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) = \left\{T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}) : s_n(T) \in l^p(\mathbb{N})\right\}$, $p \in (0,\infty)$.

Определение 1. *Оператор* $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ *принадлежит классу* $\Sigma_p(\mathfrak{H})$, $p \in (0, \infty)$, *если*

$$\|T\|_p := \sup_n n^{1/p} \cdot s_n(T) < \infty. \tag{11}$$

Класс $\Sigma_p^0(\mathfrak{H})$ – *подкласс класса* $\Sigma_p(\mathfrak{H})$, *выделяемый условием* $s_n(T) = o\left(n^{-1/p}\right)$, $n \to \infty$.

Классы $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ и $\Sigma_p(\mathfrak{H})$ не могут быть нормированы при $p \in (0, 1)$ и $p \in (0, 1]$ соответственно. Для таких p они могут быть квазинормированы. Для любого $p \in (0, \infty)$ класс $\Sigma_p(\mathfrak{H})$, снабженный квазинормой (11), образует квазинормированный идеал в $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$.

Предложение 1. *Пусть* A – *замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в* $\mathfrak{H}$ *и* $\hat{A}'_K$ – *редуцированное расширение Крейна оператора* A, *заданное соотношением* (3). *Тогда*:

(i) *для любого симметрично нормированного идеала* $\mathfrak{S}$ *в* $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1)$ *справедлива следующая эквивалентность*:

$$P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_1) \Leftrightarrow \left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_0); \tag{12}$$

(ii) *для любого* $p \in (0, \infty]$ *верна эквивалентность*:

$$\begin{gathered} P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{M}_0); \end{gathered} \tag{13}$$

(ii) *для любого* $p \in (0, \infty)$ *справедливы эквивалентности*:

$$\begin{gathered} P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \Sigma_p(\mathfrak{H}_1) \Leftrightarrow \left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1} \in \Sigma_p(\mathfrak{M}_0), \\ P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \Sigma_p^0(\mathfrak{H}_1) \Leftrightarrow \left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1} \in \Sigma_p^0(\mathfrak{M}_0). \end{gathered} \tag{14}$$

В частности, операторы $\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}$ *и* $(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ *компактны лишь одновременно.*

Замечание 1. *Заметим также, что импликация* $\Rightarrow$ *в* (13) *усиливает импликацию Крейна* (4). *При этом эквивалентность* (13) *вместе с отрицательным решением проблемы* 1 *Бирмана показывают, что импликация обратная к* (4) *не верна.*

Любопытно, что замена оператора $P_1\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1}$ *в* (4) *оператором* $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ *позволила заменить крейновскую импликацию* (4) *эквивалентностью* (13).

3В. Асимптотическое поведение собственных значений редуцированного расширения Крейна. Вначале сравним асимптотическое поведение собственных значений операторов $P_1(I + A)^{-1}$ и $\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}$.

Предложение 2. *Пусть* A – *замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в* $\mathfrak{H}$, *имеющий компактный обратный* A^{-1}. *Пусть также* $\hat{A}'_K$ – *редуцированное расширение Крейна оператора* A, *заданное соотношением* (3). *Тогда для любого* $p \in (0, \infty)$ *справедливы следующие эквивалентности*:

$$\begin{gathered} 0 < \overline{\lim}_{n\to\infty}\, n^p \cdot \lambda_n(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}) < \infty \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < \overline{\lim}_{n\to\infty}\, n^p \cdot \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) < \infty, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 0 < \underline{\lim}_{n\to\infty}\, n^p \cdot \lambda_n(P_1\left(I_{\mathfrak{H}} + A\right)^{-1}) < \infty \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < \underline{\lim}_{n\to\infty}\, n^p \cdot \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) < \infty. \end{gathered}$$

Покажем, что при дополнительном предположении предложение 2 можно усилить.

Теорема 2. *Пусть* A – *замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в* $\mathfrak{H}$, *имеющий компактный обратный* A^{-1}. *Пусть также* $\hat{A}'_K$ – *редуцированное расширение Крейна оператора* A, *заданное соотношением* (3), *и* $P_{-1} := P_{\mathfrak{N}_{-1}}$ – *ортопроектор в* $\mathfrak{H}$ *на* $\mathfrak{N}_{-1}(A)$. *Если дополнительно*

$$P_{-1}\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{N}_{-1}(A)), \tag{15}$$

то для любых фиксированных $p \in (0, \infty)$ и $a \geq 0$ *верны соотношения при* $n \to \infty$:

$$\begin{gathered} \lambda_n(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}) = an^{-1/p}\left(1 + o(1)\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) = an^{-1/p}\left(1 + o(1)\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Предложение 3. *Пусть в условиях теоремы* 2, *вместо условия* (15) *выполнено условие* $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \Sigma_p^0(\mathfrak{H}_1)$ *с* $p \in (0, \infty)$ *и* $a > 0$. *Тогда верна эквивалентность*:

$$\begin{gathered} \lambda_n\left(P_{-1}\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}\right) = an^{-1/p}\left(1 + o(1)\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F\right)^{-1}\right) = an^{-1/p}\left(1 + o(1)\right). \end{gathered}$$

Теперь сравним асимптотики спектров операторов $\hat{A}_F$ и $\hat{A}'_K$. Следующее предложение можно рассматривать в рамках абстрактной версии проблемы Алонсо–Саймона [2]. Именно, в [2] сформулирована проблема о совпадении асимптотик спектров двух реализаций выражения Лапласа в ограниченной области: оператора задачи Дирихле и редуцированного расширения Крейна. Эта проблема положительно решена в [8] (эллиптические операторы порядка $2m$) и [3] (оператор Шредингера) при различных ограничениях на коэффициенты и границу области (см. также литературу в [3]).

Предложение 4. *Пусть A — замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ и $\hat{A}'_K$ — редуцированное расширение Крейна оператора A. Пусть также $\left(I+\hat{A}_F\right)^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ и $p\in(0,\infty)$, $a\geq 0$. Тогда*:

(i) *справедлива следующая импликация*:

$$\lambda_n\left(I_{\mathfrak{H}}+\hat{A}_F\right)^{-1}=an^{-1/p}\left(1+o(1)\right)$$
$$\text{при}\quad n\to\infty\Rightarrow\left(I_{\mathfrak{N}_0}+\hat{A}'_K\right)^{-1}\in\Sigma_p(\mathfrak{N}_1);$$

(ii) *если дополнительно $P_{-1}\left(I+\hat{A}_F\right)^{-1}\upharpoonright\mathfrak{N}_{-1}(A)\in\in\Sigma^0_p\left(\mathfrak{N}_{-1}(A)\right)$, то при $n\to\infty$ верна эквивалентность*:

$$\begin{gathered}\lambda_n\left(\hat{A}_F\right)=a^{-1}n^{1/p}\left(1+o(1)\right)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\lambda_n\left(\hat{A}'_K\right)=a^{-1}n^{1/p}\left(1+o(1)\right).\end{gathered}\tag{17}$$

Эквивалентность (17) верна не всегда. Именно, существует такой симметрический оператор $A\geq m_A$, что операторы $\hat{A}_F$ и $\hat{A}'_K$ имеют различные степенные асимптотики.

Предложение 5. *Пусть $p>p_1>0$ и $a,a_1>0$ — две пары положительных чисел. Существует положительно определенный симметрический оператор A в $\mathfrak{H}$, $\overline{\operatorname{dom}}(A)=\mathfrak{H}$, $n_\pm(A)=\infty$ и такой, что его расширение Фридрихса $\hat{A}_F$ и редуцированное расширение Крейна $\hat{A}'_K$ удовлетворяют асимптотическим соотношениям:*

$$\begin{gathered}\lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{H}}+\hat{A}_F\right)^{-1}\right)=an^{-1/p}\left(1+o(1)\right)\\ \text{и}\quad\lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{N}_0}+\hat{A}'_K\right)^{-1}\right)=a_1n^{-1/p_1}\left(1+o(1)\right).\end{gathered}\tag{18}$$

4. Спектры расширений Крейна-фон Неймана и Фридрихса. Решение проблемы Бирмана. Контрпример к проблеме 1 Бирмана легко извлекается (см. [12]) из блочного представления оператора $\left(I_{\mathfrak{H}}+\hat{A}_F\right)^{-1}$ (см. [10, 14]). Здесь приведено полное (на абстрактном уровне) решение проблемы 1. Оказывается, что при условии $(I+A)^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ спектр расширения Фридрихса $\hat{A}_F$ может иметь произвольную природу, хотя, в силу классической теоремы Вишика [15], всегда существуют *неполуограниченные* расширения $\tilde{A}=\tilde{A}^*$ оператора A с компактной резольвентой. Также приведем общий результат о спектре оператора $\hat{A}_K$ при условии $(I+A)^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty$.

Предложение 6. *Пусть A — неотрицательный плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $n_\pm(A)=\infty$ и $(I+A)^{-1}\in\mathfrak{H}_\infty$. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) *Существенный спектр расширения Крейна $\hat{A}_K$ состоит из двух точек — нуля и бесконечности, т.е.* $\sigma_{\text{ess}}(\hat{A}_K)=\{0,+\infty\}$.

(ii) *Равенство $\sigma_{\text{ess}}\left(\hat{A}_K\right)=\sigma_{\text{ess}}\left(\hat{A}_F\right)$ справедливо в точности тогда, когда*

$$\begin{gathered}\{0\}\subseteq\sigma_{\text{ess}}\left(\left[\left(I+\hat{A}_K\right)^{-1}-\left(I+\hat{A}_F\right)^{-1}\right]\upharpoonright\mathfrak{N}_{-1}\right)\subseteq\\ \subseteq\{0,1\}.\end{gathered}\tag{19}$$

(iii) *Если расширения $\hat{A}_F$ и $\hat{A}_K$ трансверсальны, то $\sigma_{\text{ess}}\left(\hat{A}_K\right)\neq\sigma_{\text{ess}}\left(\hat{A}_F\right)$.*

(iv) *Если A положительно определен, то редуцированное расширение Крейна $\hat{A}'_K$ положительно определено, $m_{\hat{A}_K}\geq m_A$ и его спектр дискретен, т.е. $\left(\hat{A}'_K\right)^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{N}_0)$.*

Следующий результат дает полное решение проблемы 1 Бирмана.

Теорема 3. *Пусть $R=R^*\geq 0$ — оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда существует неотрицательный симметрический оператор $A\geq 0$ в $\mathfrak{H}$ с $n_\pm(A)=\infty$ и компактной презольвентой $(I+A)^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty$, для которого операторы $\hat{A}_F$ и R унитарно эквивалентны, $\hat{A}_F\sim R$.*

Кроме того, покажем, что для любого оператора $A\geq 0$, можно указать другой оператор $S\geq 0$, близкий в некотором смысле к A и такой, что его расширение Фридрихса $\hat{S}_F$ удовлетворяет требуемому спектральному свойству. Для этого свяжем с оператором $A\geq 0$ множество $\mathfrak{A}_A$ *симметрических неотрицательных операторов*, полагая:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}_A:=\Big\{S\subset S^*,\ S\geq 0:\operatorname{ran}(I+S)=\\ =\operatorname{ran}(I+A)=\mathfrak{H}_1,\ P_1(I+S)^{-1}=P_1(I+A)^{-1}\Big\}.\end{gathered}$$

Теорема 4. *Пусть $A\geq 0$ — неотрицательный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с $n_\pm(A)=\infty$ и ком-*

пактной пререзольвентой $(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. *Пусть также* $R = R^* \geq 0$ — *неотрицательный самосопряженный оператор в* $\mathfrak{H}_1^\perp = \mathfrak{N}_{-1}(A)$. *Тогда*:

(i) *существует оператор* $S \geq 0$, $S \in \mathfrak{A}_A$ *такой, что его расширение Фридрихса* $\hat{S}_F$ *удовлетворяет соотношению*

$$\sigma_{\rm ess}\left(\hat{S}_F\right) = \sigma_{\rm ess}(R); \tag{20}$$

(ii) *кроме того, если* $P_1(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_{1/2}(\mathfrak{H}_1)$, *то абсолютно непрерывные части* (*ac-части*) *операторов* $\hat{S}_F$ *и* R *унитарно эквивалентны, т. е.* $\left(\hat{S}_F\right)^{ac} \sim R^{ac}$.

Явные примеры неотрицательных дифференциальных операторов, дающих (отрицательное) решение проблемы 1 Бирмана, будут опубликованы в другом месте.

5. Полуограниченность самосопряженных расширений оператора A**.** Следуя [4], с каждым расширением $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \mathrm{Ext}_A$ у которого $-1 \notin \sigma_p(\tilde{A})$ связывают самосопряженный оператор

$$B^{-1} := (I + \tilde{A})^{-1} - (I + \hat{A}_F)^{-1}\left(=\left(B^{-1}\right)^*\right) \in \mathcal{C}(\mathfrak{N}_{-1}). \tag{21}$$

Оператор B называют граничным для $\tilde{A}$ и полагают $\tilde{A} = A_B (= A_B^*)$. Отметим еще, что B^{-1} ограничен, $B^{-1} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{N}_{-1})$, в точности тогда, когда $-1 \in \rho(\tilde{A})$.

В своей фундаментальной работе [4] Бирман открыл следующее соотношение между свойствами полуограниченности расширения A_B и его граничного оператора B.

Предложение 7 [4]**.** *Пусть* A — *симметрический положительно определенный оператор в* $\mathfrak{H}$, $A \geq m_A > 0$, $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \mathrm{Ext}_A$ — *расширение, у которого* $-1 \notin \sigma_p(\tilde{A})$, *и* B — *граничный оператор* (*см.* [21]). *Тогда справедлива следующая импликация*

$$\begin{gathered} A_B = A_B^* \text{ полуограничен снизу} \Rightarrow \\ \Rightarrow B = B^* \text{ полуограничен снизу.} \end{gathered} \tag{22}$$

Другими словами, граничный оператор B реализации $\tilde{A} = A_B = A_B^*$ наследует у A_B свойство полуограниченности снизу. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Грубб [7] нашла дополнительное достаточное условие на оператор $A \geq m_A$, превращающее импликацию (22) в эквивалентность.

Теорема 5 ([7])**.** *Пусть выполнены условия Предложения* 7 *и пусть оператор* $\left(\hat{A}_{\rm F}\right)^{-1}$ *компактен. Тогда справедлива следующая эквивалентность*:

$$\begin{gathered} A_B = A_B^* \ (\in \mathrm{Ext}_A) \text{ полуограничено снизу} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B = B^* \text{ полуограничен снизу.} \end{gathered} \tag{23}$$

Другие доказательства этого результата были получены в [6] и [11] (см. также [10]). Справедливость эквивалентности (23) в некоторых эллиптических граничных задачах исследована в [9]. Здесь мы существенно усиливаем теорему 5 Грубб.

Теорема 6. *Пусть* $A \geq 0$ — *неотрицательный оператор в* $\mathfrak{H}$. *Пусть также* P_{-1} — *ортопроектор на* $\mathfrak{N}_{-1} = \ker(I + A^*)$. *Тогда эквивалентность* (23) *верна при условии*:

$$P_{-1}\left(I + \hat{A}_F\right)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{N}_{-1}). \tag{24}$$

Доказательство основано на общем критерии из [11] (см. также [10]), ретранслирующем свойство (23) в соотношение для функции Вейля: $M_F(x) \rightrightarrows -\infty$ при $x \to -\infty$.

Следующий результат показывает, что условие (24) действительно слабее условия $(\hat{A}_{\rm F})^{-1} \in S_\infty(\mathfrak{H})$, и, значит, теорема 6 усиливает теорему 5.

Предложение 8. *Пусть* $R = R^* \geq 0$. *Тогда существует симметрический оператор* $A \geq 0$ *с расширением Фридрихса* $\hat{A}_F$, *удовлетворяющим условию* [24], *и такой, что*

$$\sigma_{\rm ess}(\hat{A}_F) = \sigma_{\rm ess}(R) \quad \text{и} \quad (\hat{A}_F)^{ac} \sim R^{ac}.$$

В частности, существует оператор $A \geq 0$, *у которого расширение* $\hat{A}_F$ *удовлетворяет условиям* $\sigma_{ac}(\hat{A}_F) = [0, \infty)$ *и* (24).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение 075-15-2021-602.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах.* Т. 2. Москва: Наука, 1978.
2. *Alonso A., Simon B.* // J. Operator Theory. 1980. V. 4. P. 251–270.
3. *Ashbaugh M.S., Gesztesy F., Mitrea M., Teschl G.* // Adv. Math. 2010. V. 223. 1372–1467.
4. *Бирман М.Ш.* // Матем. сб. 1956. Т. 38 (80). № 4. С. 431–450.
5. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Санкт-Петербург: Лань, 2010. 458 с.
6. *Горбачук М.Л., Михайлец В.А.* // Докл. Акад. наук СССР. 1976. Т. 226. № 4. С. 765–767.
7. *Grubb G.* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1968. V. 22. № 3, P. 425–513.

8. *Grubb G.* // J. Operator theory. 1983. V. 10. P. 9–20.
9. *Grubb G.* // J. Differential Equat. 2012. V. 252. P. 852–885.
10. *Деркач В.А., Маламуд М.М. Теория расширений операторов и граничные задачи*. Киев: Институт математики НАН Украины, 2017.
11. *Derkach V.A., Malamud M.M.* // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 1–95.
12. *Hassi S., Malamud M.M., and de Snoo H.S.V.* // Math. Nachr. 2004. V. 274–275. P. 40–73.
13. *Крейн М.Г.* // Матем. сб. 1947. Т. 20. С. 431–495.
14. *Маламуд М.М.* // Украинский Мат. Ж-л. 1992. Т. 44. № 2. С. 190–204.
15. *Вишик М.И.* // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 186–246.

TO THE BIRMAN–KREIN–VISHIK THEORY

M. M. Malamud[a,b]

[a] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

[b] *St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

Let $A \geq m_A > 0$ be a closed positive definite symmetric operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$, let $\hat{A}_F$ and $\hat{A}_K$ be its Friedrichs and Krein extensions, and let $\mathfrak{S}_\infty$ be the ideal of compact operators in $\mathfrak{H}$. The following problem has been posed by M.S. Birman: Is the implication $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty \Rightarrow (\hat{A}_F)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ holds true or not? It turns out that under condition $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ the spectrum of Friedrichs extension $\hat{A}_F$ might be of arbitrary nature. This gives a complete negative solution to the Birman problem.

Let $\hat{A}_K'$ be the reduced Krein extension. It is shown that certain spectral properties of the operators $(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}_K')^{-1}$ and $P_1(I + A)^{-1}$ are close. For instance, these operators belong to a symmetrically normed ideal $\mathfrak{S}$, say are compact, only simultaneously. Moreover, it turns out that under a certain additional condition the eigenvalues of these operators have the same asymptotic.

Besides we complete certain investigations by Birman and Grubb regarding the equivalence of semiboubdedness property of selfadjoint extensions of A and the corresponding boundary operators.

Keywords: positive definite symmetric operator, Friedrichs and Krein extensions, compactness of resolvent, asymptotic of spectrum