

УДК 517.957

ОДНОМЕРНЫЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА КАК ПРЕДЕЛ КОММУТИРУЮЩИХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. Г. С. Маулешова^{1,2,*}, член-корреспондент РАН А. Е. Миронов^{1,2,**}

Поступило 15.05.2023 г.

После доработки 22.05.2023 г.

Принято к публикации 13.07.2023 г.

В работе показано, что одномерный конечнозонный оператор Шрёдингера может быть получен предельным переходом из разностного оператора второго порядка, который коммутирует с некоторым разностным оператором нечетного порядка, коэффициенты этих разностных операторов являются функциями на прямой и зависят от малого параметра. При этом спектральная кривая разностных операторов не зависит от малого параметра и совпадает со спектральной кривой оператора Шрёдингера.

Ключевые слова: коммутирующие разностные операторы, одномерный оператор Шрёдингера, коммутирующие дифференциальные операторы

DOI: 10.31857/S2686954323600349, **EDN:** POQKOT

В этой работе мы продолжаем изучение коммутирующих разностных операторов ранга один, начатое в [1]. Мы предполагаем, что коэффициенты операторов зависят от малого параметра и являются функциями на прямой, а не на решетке, как это принято в теории коммутирующих разностных операторов. С одной стороны, это предположение позволяет изучать взаимосвязь между коммутирующими разностными и дифференциальными операторами при стремлении малого параметра к нулю, с другой стороны, это сильно усложняет задачу, так как в этом случае не удастся построить совместные собственные функции операторов (функцию Бейкера–Ахиезера) явно. Здесь мы концентрируемся на случае, когда разностный оператор второго порядка коммутирует с разностным оператором нечетного порядка и при стремлении малого параметра к нулю переходит в одномерный конечнозонный оператор Шрёдингера, хотя предложенная здесь конструкция работает и в общем случае.

Для начала напомним, что одномерный вещественный гладкий периодический оператор Шрёдингера $H = \partial_x^2 + u(x)$, $u(x + \tau) = u(x)$ называется

конечнозонным, если его спектр Флоке (состоящий из собственных чисел, отвечающих бловским функциям $\psi(x)$, $\psi(x + \tau) = e^{ip}\psi(x)$, $p \in \mathbb{R}$) состоит из конечного числа отрезков (один из которых полубесконечен). По теореме Новикова [2], если H коммутирует с некоторым дифференциальным оператором нечетного порядка, то H — конечнозонен. Далее под конечнозонным оператором H мы будем понимать оператор коммутирующий с некоторым оператором нечетного порядка (гладкость, вещественность и периодичность потенциала $u(x)$ не предполагается). Собственная функция таких операторов (функция Бейкера–Ахиезера) найдена в [3] в терминах тэта-функции многообразия Якоби гиперэллиптической спектральной кривой. Цель этой работы — построить оператор вида

$$L_2 = \left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + U(x, \varepsilon) \right)^2 + W(x, \varepsilon), \quad (1)$$

где T_ε — оператор сдвига, $T_\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon)$, такой, что L_2 коммутирует с некоторым разностным оператором нечетного порядка и такой, что $L_2 = H + O(\varepsilon)$.

Прежде чем рассматривать разностные операторы, коэффициенты которых — функции на прямой, напомним некоторые основные факты об операторах на решетке. Если разностные операторы

¹ Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

² Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: mauleshova@math.nsc.ru

**E-mail: mironov@math.nsc.ru

$$L_M = \sum_{j=-M_-}^{M_+} v_j(n) T^j, \quad L_N = \sum_{j=-N_-}^{N_+} u_j(n) T^j, \quad n \in \mathbb{Z}$$

коммутируют, то существует ненулевой полином $F(z, w)$ (см. [4]) такой, что $F(L_M, L_N) = 0$. Спектральная кривая Γ пары операторов задается уравнением $F(z, w) = 0$. В дальнейшем мы будем предполагать, что Γ — гладкая кривая. Коммутативное кольцо R разностных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на замкнутой римановой поверхности Γ (на неприводимой замкнутой алгебраической кривой, которая может быть сингулярной) с полюсами в точках $q_1, \dots, q_s \in \Gamma$. Совместные собственные функции операторов образуют векторное расслоение ранга l над $\Gamma \setminus \{\cup q_j\}$. Операторы из R называются s -точечными операторами ранга l .

Классификация двухточечных операторов ранга 1 дана в [4, 5]. В случае гладкой спектральной кривой коэффициенты операторов выражаются через тэта-функцию многообразия Якоби (см. [4]). Одноточечные операторы ранга больше 1 рассматривались в [6], в частности, в этой работе найдены операторы ранга 2 в случае эллиптической спектральной кривой, примеры таких операторов в случае спектральной кривой рода больше 1 найдены в [7]. Рассмотрим одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1. Функция Бейкера–Ахизера ψ для таких операторов восстанавливается по следующим спектральным данным

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, p_n\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \quad (2)$$

Здесь Γ — риманова поверхность рода g , q — некоторая точка на Γ , k^{-1} — локальный параметр в окрестности q , $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ , $p_n \in \Gamma$ — набор точек в общем положении. Обозначим через $\mathcal{A}_q$ кольцо мероморфных функций на Γ с полюсом в q и пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Имеет место теорема.

Теорема 1. Существует единственная мероморфная функция $\psi(n, P)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.

$$1. \psi(0, P) = 1.$$

2. Дивизор нулей и полюсов ψ имеет вид

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + p_1 + \dots + p_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq, \\ \text{если } n > 0,$$

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) - p_{-1} - \dots - p_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq, \\ \text{если } n < 0.$$

3. В окрестности q имеет место разложение

$$\psi = (\varepsilon k)^n + O(k^{n-1}).$$

Для $f(P) \in \mathcal{A}_q$ существует единственный разностный оператор вида

$$L(f) = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(n) \frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots + u_0(n),$$

такой, что

$$L(f)\psi = f(P)\psi.$$

Для другой функции $g(P) \in \mathcal{A}_q$ операторы $L(f)$ и $L(g)$ коммутируют.

Теперь расширим построенные в теореме 1 операторы так, чтобы коэффициенты операторов были определены не на решетке, а на прямой. Основная сложность для этого заключается в том, что степень дивизора нулей $\psi(n, P)$ зависит от n . Чтобы преодолеть эту сложность, рассмотрим

$$\chi(n, P) = \frac{\psi(n+1, P)}{\varepsilon \psi(n, P)}.$$

Заметим, что дивизор нулей и полюсов χ имеет вид

$$(\chi) = \gamma_1(n+1) + \dots + \gamma_g(n+1) + p(n+1) - \\ - \gamma_1(n) - \dots - \gamma_g(n) - q.$$

Мы видим, что степень дивизора нулей и полюсов не зависит от n (и равна $g+1$). Это наблюдение позволяет расширить функцию $\chi(n, P)$ до функции $\chi(x, P)$, $x \in \mathbb{R}$ (или $x \in \mathbb{C}$) и построить коммутирующие разностные операторы с нужными нам свойствами. Изменим спектральные данные (2) на спектральные данные вида

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, p(x, \varepsilon)\},$$

где $p(x, \varepsilon) \in \Gamma$ — гладкое семейство точек такое, что $p(x, 0) = q$. Предположим, что координата точки $p(x, \varepsilon)$ имеет вид

$$k^{-1}(p) = \frac{\varepsilon}{p_1(x)} + \varepsilon^2 p_2(x) + \dots$$

Имеет место

Теорема 2. Существует единственная мероморфная функция $\chi(x, \varepsilon, P)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.

1. Дивизор нулей и полюсов χ имеет вид

$$(\chi) = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) + p(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon) - q,$$

$$\gamma(x, \varepsilon) = \gamma_1(x, \varepsilon) + \dots + \gamma_g(x, \varepsilon), \text{ причем } \gamma(0, \varepsilon) = \gamma.$$

2. В окрестности q функция χ имеет разложение

$$\chi = \frac{k}{p_1(x)} + O(1). \quad (3)$$

$$3. \chi = \frac{1}{\varepsilon} + O(1).$$

Для $f(P) \in \mathcal{A}_q$ существует единственный оператор

$$L(f) = u_m(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots + u_0(x, \varepsilon),$$

$u_m(x, \varepsilon) = p_1(x)p_1(x + \varepsilon) \dots p_1(x + (m-1)\varepsilon)$ такой, что

$$L(f) - f(P) = \tilde{L}(f)(p_1(x) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, \varepsilon, P)),$$

где $\tilde{L}(f)$ — некоторый разностный оператор порядка $m-1$, коэффициенты которого — функции от x и P . Для $g(P) \in \mathcal{A}_q$ операторы $L(f)$ и $L(g)$ коммутируют. Причем

$$L(f) = \tilde{u}_m(x) \partial_x^m + \tilde{u}_{m-1}(x) \partial_x^{m-1} + \dots + \tilde{u}_0(x) + O(\varepsilon).$$

Пример. Пусть $\Gamma = \mathbb{C}/\Lambda$ — эллиптическая кривая, $\Lambda = \{2n\omega + 2m\omega', n, m \in \mathbb{Z}\}$ — решетка в $\mathbb{C}$. Рассмотрим мероморфную функцию на Γ

$$\chi = \zeta(z) - \zeta(z - \gamma(x, \varepsilon)) + \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon)) - \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)),$$

где $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса. Функция $\chi(x, z)$ имеет простые полюса в точках $z = 0$, $z = \gamma(x, \varepsilon)$ и простые нули в точках $z = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)$, $z = p(x, \varepsilon) = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon)$. Оператор, отвечающий эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$, имеет вид (1), где

$$U(x, \varepsilon) = \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) - \zeta(\gamma(x, \varepsilon)) - \zeta(p(x, \varepsilon)),$$

$$W(x, \varepsilon) = -\wp(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) - \wp(\gamma(x, \varepsilon)).$$

Предположим, что $\gamma(x, \varepsilon)$ имеет разложение

$$\gamma(x, \varepsilon) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\varepsilon + \alpha_2(x)\varepsilon^2 + \dots,$$

тогда

$$p(x, \varepsilon) = \alpha'_0(x)\varepsilon + \left(\alpha'_1(x) + \frac{\alpha''_0(x)}{2} \right) \varepsilon^2 + \dots$$

Положим для простоты $\alpha_0(x) = x, \alpha_1(x) = \text{const}$. Тогда

$$U(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad W(x, \varepsilon) = -2\wp(x) + O(\varepsilon),$$

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, оператор L_2 переходит в оператор Ламе при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть Γ — риманова поверхность рода g . Приведем явную формулу для χ с помощью тэта-функции многообразия Якоби поверхности Γ . Пусть $a_j, b_j, j = 1, \dots, g$ — базис циклов на Γ с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Обозначим через $\omega_1, \dots, \omega_g$ базис нормированных абелевых дифференциалов $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$. Многообразии Якоби $J(\Gamma)$ поверхности Γ имеет вид

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g\}, \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ji} = \int_{b_j} \omega_i.$$

Тэта-функция задается рядом

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n' \Omega n + 2\pi i n' z).$$

Тэта-функция обладает следующими свойствами периодичности

$$\theta(z + n) = \theta(z), \quad n \in \mathbb{Z}^g,$$

$$\theta(z + \Omega m) = \exp(-\pi i m' \Omega m - 2\pi i m' z) \theta(z), \quad m \in \mathbb{Z}^g.$$

Пусть ω_{pq} — мероморфная 1-форма на Γ с простыми полюсами в $p = p(x, \varepsilon)$ и q , с вычетами $\text{Res}_p \omega_{pq} = \frac{1}{\varepsilon}, \text{Res}_q \omega_{pq} = -\frac{1}{\varepsilon}$ и нормированная условием $\int_{a_i} \omega_{pq} = 0$.

Отображение Абеля $A: \Gamma \rightarrow J(\Gamma)$ задается следующим образом

$$A(P) = \left(\int_q^P \omega_1, \dots, \int_q^P \omega_g \right).$$

Пусть $\zeta = A(\gamma) + \mathcal{H} = A(\gamma_1) + \dots + A(\gamma_g) + \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — вектор римановых констант. Пусть $V(x, \varepsilon)$ — решение разностного уравнения

$$\frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_b \omega_{pq} = V(x + \varepsilon) - V(x),$$

$$V(0, \varepsilon) = 0, \quad V(x) = V(x, \varepsilon),$$

$\int_b \omega_{pq}$ — вектор b -периодов, составленный из $\int_{b_j} \omega_{pq}$. Тогда функция χ имеет вид

$$\chi = \exp \left(\varepsilon \int_{P_0}^P \omega_{pq} \right) \frac{\theta(A(P) + V(x + \varepsilon) + \zeta) \theta(V(x) + \zeta)}{\theta(A(P) + V(x) + \zeta) \theta(V(x + \varepsilon) + \zeta) \xi},$$

где $\xi = \xi(x, \varepsilon)$ — нормировочный коэффициент для выполнения асимптотики (1), P_0 — некоторая точка на Γ . Путь от P_0 до P состоит из фиксированного пути от P_0 до q и от q до P .

Заметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ форма ω_{pq} переходит в мероморфную форму ω_1 , которая имеет полюс второго порядка в q и нулевые a -периоды. Пусть $B = \int_b \omega_1$ — вектор ее b -периодов.

Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую Γ , заданную уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g} z^{2g} + \dots + c_0,$$

в качестве выделенной точки выберем $q = \infty$, пусть $k^{-1} = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Тогда по теореме 2 мероморфной функции $f(P) = z$ отвечает оператор L_2 вида (1). Имеет место

Теорема 3. *Имеют место разложения*

$$U(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(1),$$

$$W(x, \varepsilon) = -2\partial_x^2 \log \theta(Bx + \zeta) + c + O(\varepsilon),$$

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\partial_x^2 \log \theta(Bx + \zeta) + c + O(\varepsilon),$$

где c — некоторая константа.

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор L_2 переходит в одномерный конечнозонный оператор Шрёдингера.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-41-00018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маулешова Г.С., Миронов А.Е. // ДАН. 2018. Т. 478. В. 4. С. 392–394.
2. Новиков С.П. // Функци. анализ и его прил. 1974. Т. 8. В. 3. С. 54–66.
3. Имс А.Р., Матвеев В.Б. // ТМФ. 1975. Т. 23. В. 1. С. 51–68.
4. Кричевер И.М. // УМН. 1978. Т. 33. В. 4 (202). С. 215–216.
5. Mumford D. // Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977). Kinokuniya. Tokyo. 1978. 115–153.
6. Кричевер И.М., Новиков С.П. // УМН. 2003. Т. 58. В. 3 (351). С. 51–88.
7. Маулешова Г.С., Миронов А.Е. // Тр. МИАН. 2020. Т. 310. С. 217–229.

ONE-DIMENSIONAL FINITE-GAP SCHRÖDINGER OPERATORS AS A LIMIT OF COMMUTING DIFFERENCE OPERATORS

G. S. Mauleshova^{a,b,*} and Corresponding member of the RAS A. E. Mironov^{a,b,**}

^a Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

^b Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

In this paper we show that the one—dimensional finite—gap Schrödinger operator can be obtained by passing to the limit from a second—order difference operator that commutes with some odd—order difference operator; the coefficients of these difference operators are functions defined on the line and depend on a small parameter. Moreover, the spectral curve of the difference operators does not depend on the small parameter and coincides with the spectral curve of the Schrödinger operator.

Keywords: commuting difference operators, one—dimensional Schrödinger operator, commuting differential operators