ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 512, с. 10–17

МАТЕМАТИКА

УДК 517+531.01

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

 М. В. Шамолин[1],*

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 12.04.2023 г.
После доработки 27.04.2023 г.
Принято к публикации 05.05.2023 г.

Как известно [1–3], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4–6]). В работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, тензорный инвариант

DOI: 10.31857/S2686954323600209, **EDN:** PTAQSU

В качестве примеров тензорных инвариантов приведем, прежде всего, скалярные инварианты – это первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля – поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении $(n + 1)$-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее $(n + 1)$-мерное пространство”, приводит к динамической системе на касательном расслоении к n-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n-мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n + 1)$-мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n-мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.

Важные случаи интегрируемых систем с n степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах автора [5, 7]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@rambler.ru*

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

1. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Рассмотрим гладкое n-мерное риманово многообразие $M^n\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^n(\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \ldots, \beta_{n-1}^\bullet; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ (ср. с [5, 7, 8]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^\bullet = z_n f_n(\alpha), \quad \beta_1^\bullet = z_{n-1} f_1(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1),$$
$$\beta_3^\bullet = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \ldots, \tag{1}$$
$$\beta_{n-1}^\bullet = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}),$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$; $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$; $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$; ...; $i_1(\beta_{n-2})$ – гладкие ($n(n-1)/2 + 1$ штука) функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \ldots, z_n$ в касательном пространстве уместно вводить тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (ср. с [7, 9, 10]) с $n(n-1) + 1$ ненулевым коэффициентом связности:

$$\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \ldots, \tag{2}$$
$$\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-3}^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-2}^\bullet\beta_{n-1}^\bullet = 0,$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, примут вид

$$z_1^\bullet = -f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)]z_1 z_n - f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]z_1 z_{n-1} - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]z_1 z_{n-2} - \ldots - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) \times [2\Gamma^{n-2}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})]z_1 z_2,$$

$$z_2^\bullet = -f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)]z_2 z_n - f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]z_2 z_{n-1} - \ldots - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4}) \times [2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})]z_2 z_3 - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_1)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} \times i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \ldots, \tag{3}$$

$$z_{n-1}^\bullet = -f_n(\alpha)[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)]z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$z_n^\bullet = -f_n(\alpha)[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)]z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_n(\alpha)}g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$Dj(\gamma) = \dfrac{d\ln|j(\gamma)|}{d\gamma}$, и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии $TM^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Отметим, что количество “произвольных” функций (функций в кинематических соотношениях (1) и ненулевых коэффициентов связности в (2)) в системе равно $A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ штуки. Таким образом, мы имеем $A(n)$ функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(*а*) Системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для динамики динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела.

(*б*) Системы на касательных расслоениях более общих n-мерных поверхностях вращения.

(*в*) Системы на касательном расслоении n-мерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать $n+1$ независимый тензорный инвариант: или $n+1$ первый интеграл, или $n+1$ независимая дифференциальная форма, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством $n+1$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. То, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$, тензорных инвариантов, будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $x^{i\bullet\bullet} + \sum\limits_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}(x)x^{j\bullet}x^{k\bullet} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, является гладкая функция $\sum\limits_{j,k=1}^{n} g_{jk}(x)x^{j\bullet}x^{k\bullet}$, но мы представим его в более простой форме. Кроме того, в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются алгебраические и дифференциальные соотношения на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$; $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$; $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$; ...; $i_1(\beta_{n-2})$ из (1) и на $n(n-1)+1$ ненулевых коэффициентов связности.

Теорема 1. *Если выполнены* $(n-1)(n-2)/2$ *условий*

$$\begin{gathered} f_1(\alpha) \equiv \ldots \equiv f_{n-1}(\alpha) =: f(\alpha);\\ g_1(\beta_1) \equiv \ldots \equiv g_{n-2}(\beta_1) =: g(\beta_1);\\ h_1(\beta_2) \equiv \ldots \equiv h_{n-3}(\beta_2) =: h(\beta_2);\ldots;\\ r_1(\beta_{n-3}) \equiv r_2(\beta_{n-3}) =: r(\beta_{n-3}); \end{gathered} \tag{4}$$

$n(n-1)/2$ *условий*

$$\begin{gathered} \Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_1(\alpha),\\ \Gamma^1_{12}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1),\ldots,\\ \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}); \end{gathered} \tag{5}$$

а также $n(n-1)/2 + 1$ *условий*

$$\begin{gathered} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha) \equiv \Gamma^\alpha_2(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1) \equiv \ldots\\ \ldots \equiv \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) =: \Gamma_n(\alpha),\\ \Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv \Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2)h^2(\beta_2) \equiv \ldots\\ \ldots \equiv \Gamma^1_{n-1,n-1}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-3})h^2(\beta_2)\ldots r^2(\beta_{n-3}),\ldots,\\ \Gamma^{n-3}_{n-2,n-2}(\beta_{n-3}) \equiv \Gamma^{n-3}_{n-1,n-1}(\beta_{n-3},\beta_{n-2})i^2(\beta_{n-2});\\ f_n^2(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha) \equiv 0,\\ 2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv 0,\ldots,\\ 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2}) + i^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\beta_{n-2}) \equiv 0;\\ \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha) + Df_n(\alpha) \equiv 0, \end{gathered} \tag{6}$$

то система (1), (3) *обладает полным набором, состоящим из* $n+1$ *первого интеграла вида*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}; \tag{7}$$

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}; \tag{8}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\};$$

$$\begin{gathered} \Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1) =\\ = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^3}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const},\\ \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta}\Gamma_2(b)db\right\};\ldots; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =\\ = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \text{const},\\ \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}; \end{gathered} \tag{9-1}$$

$$\begin{gathered} \Phi_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1}) =\\ = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n h(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}db = C_{n+1} = \text{const}. \end{gathered} \tag{10}$$

Более того, после некоторого ее приведения (*замен независимой переменной* $d/dt = f_n(\alpha)d/d\tau$ *и фа-*

зовых $w_n = z_n$, $w_{n-1}^* = \ln|w_{n-1}|$, $w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, \ldots, n-2$, $w_{n-2} = z_2/z_1, \ldots$, $w_1 = z_{n-1}/\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}$) *фазовый поток системы* (1), (3) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^n, *т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема*

$$dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \ldots \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \ldots \wedge d\beta_{n-1}.$$

Общее количество условий (4)–(6), фигурирующих в теореме 1, равно $B(n) = n(n-1)/2 + 1 + (n + 1)^2$, и оно не превышает $A(n)$, поскольку $A(n) - B(n) = n$, т.е. увеличение количества “произвольных” функций по сравнению с количеством условий, накладываемых на них, при наших предположениях равно размерности риманова многообразия.

Система же дифференциальных равенств из (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (12)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). При этом поиск как интеграла (7), так и (8)–(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

Примеры 1, 2. В случае обобщенных сферических координат, когда метрика на n-мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n + 1)$-мерного пространства ($k(\alpha) \equiv 1$), или когда метрика на n-мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий ($k(\alpha) \equiv \cos\alpha$) (задачи класса (*а*)), однопараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\alpha^{\bullet} = -z_n, \quad z_n^{\bullet} = -(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1 + \mu_1\sin^2\alpha},$$

$$z_{n-1}^{\bullet} = z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1 + \mu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\times$$
$$\times\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$z_{n-2}^{\bullet} = z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1 + \mu_1\sin^2\alpha} -$$
$$- z_{n-2}z_{n-1}\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}} -$$
$$-(z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}}, \ldots,$$

$$z_1^{\bullet} = z_1z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1 + \mu_1\sin^2\alpha} + z_1\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}}\times$$
$$\times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s+1}z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\},$$

$$\beta_1^{\bullet} = z_{n-1}\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\beta_2^{\bullet} = -z_{n-2}\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}}, \ldots,$$

$$\beta_{n-1}^{\bullet} = (-1)^n z_1\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-2}}\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\mu_1 \in R.$$

Пример 3. В случае n-мерного пространства Лобачевского в модели Клейна (задачи класса (*в*)) n-параметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических $\alpha^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\bullet 2} - \beta_1^{\bullet 2} - \ldots - \beta_{n-1}^{\bullet 2}) = 0$, $\beta_r^{\bullet\bullet} - \frac{2}{\alpha}\alpha^{\bullet}\beta_r^{\bullet} = 0$, $r = 1, \ldots, n-1$, и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\alpha^{\bullet} = z_n\mu_1\alpha, \quad z_n^{\bullet} = -z_{n-1}^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2} - \ldots - z_1^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2 + \mu_n},$$
$$z_{n-1}^{\bullet} = z_{n-1}z_n\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2}, \ldots,$$
$$z_1^{\bullet} = z_1z_n\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2 + \mu_n}, \quad \beta_1^{\bullet} = z_{n-1}\frac{\mu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \mu_2}}, \ldots,$$
$$\beta_{n-1}^{\bullet} = z_1\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2}, \quad \mu_1, \ldots, \mu_n \in R.$$

2. ИНВАРИАНТЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое (внешнее) силовое поле с потенциалом (12), см. далее. В проекциях на оси $z_k^{\bullet}$, $k = 1, \ldots, n$, оно будет иметь следующие компоненты, соответственно: $F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)\ldots i_1(\beta_{n-2})$, $F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \ldots$, $F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_n(\alpha)f_n(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\alpha^\bullet = z_n f_n(\alpha),$$
$$z_n^\bullet = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f_n(\alpha)[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)]z_n^2 -$$
$$- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,$$
$$z_{n-1}^\bullet = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - f_n(\alpha)[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)]z_{n-1}z_n -$$
$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \ldots,$$
$$z_2^\bullet = F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)\ldots r_1(\beta_{n-3}) -$$
$$- f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)]z_2 z_n i -$$
$$- f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]z_2 z_{n-1} - \ldots$$
$$\ldots - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4}) \times \tag{11}$$
$$\times [2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})]z_2 z_3 -$$
$$- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-2}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2}) \times$$
$$\times \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,$$
$$z_1^\bullet = F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)\ldots i_1(\beta_{n-2}) -$$
$$- f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)]z_1 z_n -$$
$$- f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]z_1 z_{n-1} -$$
$$- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]z_1 z_{n-2} -$$
$$\ldots - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}) \times$$
$$\times[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})]z_1 z_2,$$
$$\beta_1^\bullet = z_{n-1}f_1(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \ldots,$$
$$\beta_{n-1}^\bullet = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\alpha^{\bullet\bullet} - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} +$$
$$+ \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_1^{\bullet\bullet} - F_{n-1}(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet +$$
$$+ \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)\ldots r_1^2(\beta_{n-3}) +$$
$$+ 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \ldots$$
$$\ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-3}^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) +$$
$$+ 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + \ldots$$
$$\ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-2}^\bullet\beta_{n-1}^\bullet = 0,$$

на касательном расслоении $TM^n\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \ldots, \beta_{n-1}^\bullet; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (4)–(6), *то система* (11) *обладает первым интегралом*

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta) = \\ = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \text{const}, \tag{12}$$
$$V(\alpha,\beta) = V_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} V_{n-k}(\beta_k)$$
$$= -2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a)da - 2\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\beta_{k0}}^{\beta_k} F_{n-k}(b)db,$$

а также при $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, *– первыми интегралами (8)–(10).*

Более того, после некоторого ее приведения (*замен независимой переменной* $d/dt = f_n(\alpha)d/d\tau$ *и фазовых* $w_n = z_n$, $w_{n-1}^* = \ln|w_{n-1}|$, $w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, \ldots, n-2$, $w_{n-2} = z_2/z_1, \ldots,$ $w_1 = z_{n-1}/\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}$) *фазовый поток системы* (1), (3) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^n, *т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема*

$$dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \ldots \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \ldots \wedge d\beta_{n-1}.$$

3. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Далее несколько модифицируем систему (11) при условиях (4)–(6), а также, для простоты, при $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, вводя в нее гладкое силовое поле со знакопеременной диссипацией. Наличие последней характеризуется не только величиной $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (13) (в отличие от системы (11)), но и следующей зависимостью (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_k^\bullet$, $k = 1, \ldots, n$, соответственно: $z_1F^1(\alpha), \ldots, z_{n-1}F^1(\alpha)$, $F_n(\alpha)f_n(\alpha) + z_nF_n^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\alpha^\bullet = z_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha),$$
$$z_n^\bullet = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)(z_{n-1}^2, \ldots, z_1^2) + z_nF_n^1(\alpha)$$

$$
\begin{gathered}
z_{n-1}^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_{n-1}z_n \\
- f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots \\
\ldots - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^1(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2 + \\
+ z_{n-1}F^1(\alpha), \ldots,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
z_2^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_2z_n - \\
- f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]z_2z_{n-1} - \ldots \\
\ldots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + \qquad (13)\\
+ Dr(\beta_{n-3})]z_2z_3 - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2}) \times \\
\times \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2 + z_2F^1(\alpha),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
z_1^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_1z_n - \\
- f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_2) + Dg(\beta_1)]z_1z_{n-1} - \\
- f(\alpha)g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]z_1z_{n-2} - \ldots \\
\ldots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) \times \\
\times [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\beta_1^{\bullet} = z_{n-1}f(\alpha),\ \beta_2^{\bullet} = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\ldots, \\
\beta_{n-1}^{\bullet} = z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}).
\end{gathered}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе (приведем для краткости лишь ее первое уравнение):

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - \{b\tilde{\delta}(\alpha) + F_n^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha)\}\alpha^{\bullet} - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + \\
+ b\delta(\alpha)F_n^1(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots \\
\ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,
\end{gathered}
$$

$\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$ на касательном расслоении $TM^n\{\alpha^{\bullet},\beta_1^{\bullet},\ldots,\beta_{n-1}^{\bullet};\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (13) порядка $2n$ необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых тензорных инвариантов. Однако после следующей замены переменных $w_1 = z_{n-1}/\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}$, ..., $w_{n-3} = z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $w_{n-2} = z_2/z_1$, $w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}$, $w_n = z_n$, система (13) распадается следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = w_nf_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
w_n^{\bullet} = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2 + w_nF_n^1(\alpha), \qquad (14)\\
w_{n-1}^{\bullet} = \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n + w_{n-1}F^1(\alpha),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
w_s^{\bullet} = (\pm)w_{n-1}\sqrt{1 + w_s^2}f(\alpha)g(\beta_1)\ldots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\
\beta_s^{\bullet} = (\pm)\frac{w_sw_{n-1}}{\sqrt{1 + w_s^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\ldots s = 1,\ldots,n-2,
\end{gathered} \qquad (15)
$$

$$
\beta_{n-1}^{\bullet} = (\pm)\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \qquad (16)
$$

где в системе (15) символом “...” показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ – одна из функций g, h, ..., зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (14)–(16) достаточно указать два независимых тензорных инварианты системы (14), по одному – для систем (15) (меняя в них независимые переменные; таких систем $n - 2$ штуки), и дополнительный тензорный инвариант, “привязывающий” уравнение (16) (т.е. всего $n + 1$).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$
\begin{gathered}
\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|, \\
\Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)},
\end{gathered} \qquad (17)
$$

а для некоторых $\lambda_n^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$
\begin{gathered}
F_n(\alpha) = \lambda_n^2\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \\
F_s^1(\alpha) = \lambda_s^1f_n(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad s = 1,\ldots,n.
\end{gathered} \qquad (18)
$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = \ldots = F_{n-1}^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \ldots = \lambda_{n-1}^1 = \lambda^1$. Условие (17) назовем “геометрическим”, а условия из группы (18) – “энергетическими”.

Условие (17) названо геометрическим, в том числе потому, что накладывает условие на приведенный коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (18) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (17) и (18) *на внешнее силовое поле. Тогда система* (14)–(16) *обладает* $n + 1$ *независимым, вообще говоря, трансцендентным (т.е. имеющим существенно особые точки)* [12, 13] *первым интегралом.*

Как и следовало ожидать, в общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right) =$$
$$= \frac{f_n^2(\alpha)(w_n^2 + w_{n-1}^2) + (b + \lambda^1)w_n\delta(\alpha)f_n(\alpha) - \lambda_n^0\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)f_n(\alpha)} =$$
$$= C_1 = \text{const}. \tag{19}$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (14) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) =$$
$$= G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{20}$$

Первые интегралы для систем (15) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-2, \tag{21}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, см. (9), (9-1). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (16), находится по аналогии с (10):

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) =$$
$$= \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n h(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\,db = C_{n+1} = \text{const}, \tag{22}$$

где, после взятия интеграла (22), вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить левые части первых интегралов (9), (9-1) соответственно.

Выражение функций (19), (20) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ дополнительный первый интеграл системы (14) найдется из дифференциального соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = -\frac{(b + u_n)du_n}{U_2(C_1, u_n)}, \quad u_n = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)},$$
$$u_{n-1} = \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}, \quad U_1(u_n) = u_n^2 + (b - \lambda^1)u_n - \lambda_n^0,$$
$$U_2(C_1, u_n) = 2U_1(u_n) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_n)}\}/2, \quad C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. *Если для систем вида* (14)–(16) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (17), (18), *то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие* $n + 1$ *инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными (в смысле комплексного анализа) коэффициентами:*

$$\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha)dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha,$$
$$\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\} \times$$
$$\times \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 + (b - \lambda^1)u_n - \lambda_n^0}{u_{n-1}};$$

$$\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha)dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha,$$
$$\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \Delta(\alpha)\exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\int\frac{(b + u_n)du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\};$$

$$\rho_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1 + w_s^2}}dw_s \wedge d\beta_s, \quad s = 1, \ldots, n-2;$$

$$\rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-2}, \beta_{n-1})dw_n \wedge$$
$$\wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha \wedge d\beta_{n-2} \wedge d\beta_{n-2},$$

$$\rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-1}, \beta_{n-2}) =$$
$$= \exp\left\{(b + \lambda^1)\int\frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\} \cdot \Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}),$$

но зависимые с первыми интегралами (19)–(22).

Для полной интегрируемости системы (14)–(16) можно использовать или $n + 1$ первых интегралов, или $n + 1$ независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством $n + 1$.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 7, 14]. Заметим, что для таких систем трансцендентность функций (понимаемой не в смысле теории элементарных функций, а в смысле комплексного анализа – наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [4, 13].

В заключение можно сослаться на приложения [14–16], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к n-мерной сфере, а также более общих систем на расслоении n-мерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [17, 18]). При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [19, 20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912. 340 pp.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. *Шамолин М.В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
14. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
16. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
17. *Трофимов В.В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
18. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.
19. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
20. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.

INVARIANT FORMS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON TANGENT BUNDLE OF FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLD

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

As is well-known [1–3], finding a sufficient number of tensor invariants (not only the first integrals) allows you to accurately integrate a system of differential equations. For example, the presence of an invariant differential form of the phase volume makes it possible to reduce the number of required first integrals. For conservative systems, this fact is natural, but for systems with attractive or repulsive limit sets, not only some first integrals, but also the coefficients of the available invariant differential forms should, generally speaking, include functions with essentially special points (see also [4–6]). In this paper, complete sets of invariant differential forms for homogeneous systems on tangent bundles to smooth finite-dimensional manifolds are presented for the class of dynamical systems under consideration.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, tensor invariant