

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ТЕОРИЯ p -РЕГУЛЯРНОСТИ

© 2023 г. Б. Медак^{1,*}, А. А. Третьяков^{1,2,3,4,**}

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко

Поступило 02.02.2022 г.

После доработки 27.10.2022 г.

Принято к публикации 05.05.2023 г.

В статье рассматриваются различные модификации нелинейного уравнения Бюргерса с малым параметром и вырожденного в решении вида

$$F(u, \varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $F : \Omega \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, $\Omega = C^2([0, \pi] \times [0, T])\mathbb{R}$ и $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $f(x, t) \in C([0, \pi] \times [0, T])$, $\varphi(x) \in C[0, \pi]$. Нас будет интересовать наиболее важный в приложениях случай малого параметра ε с осциллирующими начальными условиями вида $\varphi(x) = k \sin x$, где k — некоторая, вообще говоря, зависящая от ε , константа, и изучать вопрос существования решения в окрестности тривиального $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, которому соответствует $k = k^* = 0$ и при каких начальных условиях на значения k возможно построение аналитического приближения этого решения при малых ε .

Мы будем искать решение в традиционном русле разделения переменных на подпространстве функций вида $u(x, t) = v(t)u(x)$, где $v(t) = ce^{-t}$, $u(x) \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$. В этом случае рассматриваемая задача является вырожденной в точке $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, так как $\text{Im}F'_u(u^*, \varepsilon^*) \neq Z = \mathcal{C}([0, \pi] \times [0, T])$. Это следует из теории Штурма—Лиувилля. Для осуществления наших целей мы применяем аппарат теории p -регулярности [6, 7, 15, 16] и показываем, что отображение $F(u, \varepsilon)$ является 3-регулярным в точке $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, т.е. $p = 3$.

DOI: 10.31857/S2686954323700236, EDN: SULTYI

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ p -РЕГУЛЯРНОСТИ

Будем рассматривать следующее уравнение

$$F(v, y) = 0, \quad (2)$$

где отображение $F : W \times Y \rightarrow Z$, $F \in C^{p+1}(W \times Y)$ и W , Y , Z — банаховы пространства.

Предположим, что в точке решения $(v^*, y^*) \in W \times Y$, $\text{Im}F'(v^*, y^*) \neq Z$ и пусть

$$Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p, \quad (3)$$

где $Z_1 = \text{cl}(\text{Im}F'(v^*, y^*))$ и $V_1 = Z$. Через V_2 обозначим дополнение Z_1 до Z (предполагается, что такое существует) и $P_{V_2} : Z \rightarrow V_2$ — оператор проектирования на V_2 параллельно Z_1 . Полагаем Z_2 равно замыканию линейной оболочки квадратичной формы $P_{V_2}F''(v^*, y^*)[\cdot]^2$. И далее индуктивно

$$Z_i = \text{cl}(\text{span } \text{Im}P_{V_i}F^{(i)}(v^*, y^*)[\cdot]^i) \subseteq V_i, \\ i = 2, \dots, p-1,$$

где V_i — выбранное замкнутое дополнение (предполагается, что такое существует) $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$ до Z , и $P_{V_i} : Z \rightarrow V_i$ — оператор проектирования на V_i параллельно $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$.

¹ Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, Faculty of Exact and Natural Sciences, Siedlce, Poland

² Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

³ System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

⁴ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: bmedak@uph.edu.pl

**E-mail: tret@uph.edu.pl

Окончательно, $Z_p = V_p$. При этом порядок p полагаем как минимальное число (если такое существует), для которого выполнено представление (3).

Обозначим $\varphi^{(0)} = \varphi$, для произвольного отображения φ .

Определим следующие отображения

$$F_i : W \times Y \rightarrow Z_i, \quad F_i(v, y) = P_{Z_i} F(v, y), \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, p,$$

где $P_{Z_i} : Z \rightarrow Z_i$ — оператор проектирования на Z_i параллельно $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \dots \oplus Z_p$.

Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(v, y) = F_1(v, y) + \dots + F_p(v, y)$$

или

$$F(v, y) = (F_1(v, y), \dots, F_p(v, y)).$$

Обозначим $h = [h_v, h_y]$, $h_v \in W$, $h_y \in Y$, $[h_v, h_y] \in W \times Y$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) : W \times Y \rightarrow Z$,

$$\Psi_p(h) = F_1''(v^*, y^*) + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1} \quad (5)$$

такой, что для $\xi = (v, y)$

$$\Psi_p(h)[\xi] = F_1'(v^*, y^*)[\xi] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1}[\xi],$$

называется *p-фактор оператором определенным элементом h* или просто *p-фактор оператором*, если это ясно из контекста.

Определение 2. Говорим, что отображение F абсолютно вырождено в точке (v^*, y^*) до p -го порядка, если $F^{(i)}(v^*, y^*) = 0$, $i = 1, \dots, p-1$.

В случае абсолютного вырождения p -фактор оператор сводится к $F^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1}$.

Для отображений F_i будет

$$F_i^{(k)}(v^*, y^*) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, i-1, \quad \forall i = 1, \dots, p,$$

т.е. F_i абсолютно вырождено в точке (v^*, y^*) до i -го порядка.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор $\Psi_p[\cdot]^p$ так, что

$$\Psi_p[\xi]^p = F_1'(v^*, y^*)[\xi] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[\xi]^p.$$

Заметим, что $\Psi_p[h]^p = \Psi_p(h)[h]$.

Определение 3. p -ядро оператора Ψ_p есть множество нулей оператора Ψ_p :

$$H_p(v^*, y^*) = \text{Ker}^p \Psi_p = \{h \in W \times Y : F_1'(v^*, y^*)[h] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^p = 0\},$$

по аналогии с ядром первой производной $\text{Ker} F'(v^*, y^*) = \{h \in W \times Y : F'(v^*, y^*)[h] = 0\}$.

Заметим, что

$$\text{Ker}^p \Psi_p = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k F_k^{(k)}(v^*, y^*).$$

Определение 4. Отображение F называется *p-регулярным в точке (v^*, y^*) на h* , если $\text{Im} \Psi_p(h) = Z$.

Определение 5. Отображение F называется *p-регулярным в точке (v^*, y^*)* , если оно *p-регулярно* на каждом $h \in H_p(v^*, y^*) \setminus \{0\}$ или $H_p(v^*, y^*) = \{0\}$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Люстерника о касательном подпространстве на вырожденный случай и является одним из главных результатов теории p -регулярности.

Теорема 1. Пусть $F \in C^{p+1}(U \times M)$, $F : U \times M \rightarrow Z$, где U , M и Z — банаховы пространства.

Предположим что $F(v^*, y^*) = 0$ и $\forall \bar{y} \in M$, $\|\bar{y}\| = 1$, такого, что

$$(0, \bar{y}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k F_k^{(k)}(v^*, y^*)$$

выполнено

$$\| \{ F_1'(v^*, y^*) + F_2''(v^*, y^*)[0, \bar{y}] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[0, \bar{y}]^{p-1} \}^{-1} \| \leq C. \quad (6)$$

(Здесь $\{\cdot\}^{-1}$ означает правый обратный оператор).

Тогда для достаточно малого $\delta > 0$ существует непрерывное отображение $v = v(y)$, $y \in V_\delta(y^*)$, где $V_\delta(y^*)$ окрестность точки y^* , $v(y) \in C(V_\delta(y^*))$, такое, что $F(v(y), y) = 0$ и

$$v(y) = v^* + o(y), \quad \|o(y)\| = o(\|y - y^*\|), \quad (7)$$

$$\|v(y) - v^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|F_k(v^*, y^*)\|_{Z_k}^{\frac{1}{k}}, \quad \forall y \in V_\delta(y^*), \quad (8)$$

где $C > 0$ — независимая константа.

Эта теорема позволяет описать множество решений уравнения $F(v, y) = 0$ в окрестности вырожденной точки (u^*, ε^*) и в частности обосновать существование решения уравнения Бюргера (1) с малым параметром, а также дать аналитический вид этого решения.

2. ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ p -ГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теперь мы можем сформулировать так называемые p -фактор теоремы о неявной функции, которые являются модификациями теоремы 1 и аналогичных теорем в [6] и на основании которых будут получены основные результаты этой работы.

Теорема 2. Пусть W , Y и Z банаховы пространства, $F \in C^{p+1}(W \times Y)$, $F : W \times Y \rightarrow Z$, $F(v^*, y^*) = 0$, отображения $F_k(v, y)$, $k = 1, \dots, p$ и p -фактор оператор $\Psi_p(h)$ определены согласно (4) и (5).

Предположим, что существует $\bar{h} \in \bigcap_{r=1}^p \text{Ker}^r F_{r_v}^{(r)}(v^*, y^*)$, $\|\bar{h}\| = 1$ такое, что $\text{Im} \Psi_p(\bar{h}) = Z$, т.е. F p -регулярно в точке (v^*, y^*) на элементе $\bar{h}$.

Тогда для достаточно малых $\alpha > 0$, $v > 0$ и $\delta = \alpha v^p$ существует непрерывное отображение $\varphi(y) : U_\delta(y^*) \rightarrow U_v(v^*)$ и константа $K > 0$ такие, что выполнены соотношения

- a) $\varphi(y^*) = v^*$;
- b) $F(\varphi(y), y) = 0 \quad \forall y \in U_\delta(y^*)$;
- c) $\varphi(y) = v^* + h(y) + v(y)$, где $h(y) = \gamma(y)\bar{h}$, $\gamma(\cdot) : U_\delta(y^*) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\gamma(\cdot)$ непрерывная функция, для которой

$$\frac{\|y - y^*\|^{\frac{1}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \leq \gamma(y) \leq v, \quad y \in U_\delta(y^*).$$

Более того для $v(y)$ будут справедливы оценки

$$\|v(y)\|_W \leq K \sum_{r=1}^p \frac{\|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}}{\gamma(y)^{r-1}}, \quad (9)$$

$y \in U_\delta(y^*)$, $\gamma(y) \neq 0$, что означает

$$\|v(y)\|_W = O(\gamma^2(y)).$$

Следствие 1. Оценку (9) можно переписать следующим образом

$$\|v(y)\|_W \leq K \sum_{r=1}^p \|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}^{\frac{1}{r}}, \quad y \in U_\delta(y^*), \quad y \neq y^*.$$

Теорема 3. Пусть W , Y и Z банаховы пространства, $F \in C^{p+1}(W \times Y)$, $F : W \times Y \rightarrow Z$, $F(v^*, y^*) = 0$, отображения $F_i(v, y)$, $i = 1, \dots, p$ и p -фактор оператор $\Psi_p(h)$ определены согласно (4) и (5).

Предположим, что существует элемент $\bar{h} \in \bigcap_{r=1}^p \text{Ker}^r F_{r_{(v,y)}}^{(r)}(v^*, y^*)$, $\|\bar{h}\| = 1$, $\bar{h} \in W \times Y$, $\bar{h} = [\bar{h}_v, \bar{h}_y]$, $\bar{h}_y = 0$ такой, что $\text{Im} \Psi_p(\bar{h}) \cdot (0 \times Y) = Z$, т.е. F p -регулярно в точке (v^*, y^*) на элементе $\bar{h}$ относительно пространства Y .

Тогда для достаточно малых $\alpha > 0$, $v > 0$ и $\delta = \alpha v^p$ существуют непрерывное отображение $\varphi(y) : U_\delta(y^*) \rightarrow U_v(v^*)$ и константа $K > 0$ такие, что выполнены следующие соотношения

- a) $\varphi(y^*) = v^*$;
- b) $F(\varphi(y), y) = 0 \quad \forall y \in U_\delta(y^*)$;
- c) $\varphi(y) = v^* + h(y) + v(y)$, где $h(y) = \gamma(y)\bar{h}_y$, $\gamma(\cdot) : U_\delta(y^*) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\gamma(\cdot)$ любая фиксированная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\|y - y^*\|^{\frac{1}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \leq \gamma(y) \leq v.$$

Более того $v(y)$ удовлетворяет

$$\|v(y)\|_W \leq K \sum_{r=1}^p \frac{\|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}}{\gamma(y)^{r-1}},$$

$y \in U_\delta(y^*)$, $\gamma(y) \neq 0$, что означает

$$\|v(y)\|_W = O(\gamma^2(y)).$$

Замечание 1. Элемент $\bar{h}$ в теореме 2 определяется производными отображения F по переменной y , а в теореме 3 — смешанными производными отображения F по переменным (v, y) .

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Рассмотрим нелинейное уравнение Бюргерса с малым параметром ε вида

$$F(u, \varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 = 0, \quad (10)$$

$F : \Omega \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, где F достаточно гладкое отображение (по крайней мере до порядка $p+1$) и $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = k \sin x$, при этом $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$ тривиальное решение этого уравнения, соответствующее $k = k^* = 0$.

При этом отображение $F(u, \varepsilon)$ является 3-регулярным на элементе $\bar{h} = [\bar{h}_u, 0_\varepsilon]$, где $\bar{h}_u = e^{-t} \sin x$.

Применяя к отображению $F(u, \varepsilon)$ теорему 3, полагая

$$F(v, y) = F(u, \varepsilon), \quad v := u, \quad y := \varepsilon,$$

получаем следующий результат о существовании решения (10).

Теорема 4. Для достаточно малых $\alpha > 0, \nu > 0$ где

и $k(\varepsilon) \in C(R)$, $\varepsilon \in R$, при $|\varepsilon| \leq \alpha \nu^3$, $\frac{\varepsilon^3}{\alpha^3} \leq k(\varepsilon) \leq \nu$ существует непрерывное решение (10) вида

$$u(x, t, \varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \bar{h}_u + y(x, t, \varepsilon), \\ u(x, 0, \varepsilon) = k(\varepsilon) \sin x,$$

где $\gamma(\varepsilon)$ некоторая непрерывная функция такая, что $\gamma(\varepsilon) = O(k(\varepsilon))$, а $\|y(x, t, \varepsilon)\| = o(\varepsilon^3)$.

Доказательство данного результата подобно доказательству аналогичных теорем в [8–10], поэтому здесь не приводится.

Для неоднородного нелинейного уравнения Бюргерса вида $F(u, \varepsilon) = u - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 = f(x, t)$, введя отображение $F(u, \varepsilon, f) = F(u, \varepsilon) - f$, получим однородное относительно u, ε, f уравнение

$$F(u, \varepsilon, f) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x, t) = 0, \quad (11)$$

где $F: \Omega \times C([0, \pi] \times [0, T]) \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ и, не ограничивая общности, рассмотрим случай нулевых начальных условий $u(x, 0) = 0$.

Заметим, что $F'(0, 0, 0) = \left[\frac{d}{dt} - \frac{d^2}{(dx)^2}, 0_\varepsilon, 1_f \right]$ и

$\text{Ker} F'(0, 0, 0)$ определяется решением уравнения

$$F'(0, 0, 0)[u, \varepsilon, f] = u_t - u_{xx} - f(x, t) = 0,$$

которое обозначим через $\bar{h} = (\bar{u}(x, t, f), 0_\varepsilon, f(x, t))$. Тогда

$$\bar{h} = (\bar{u}(x, t, f), 0_\varepsilon, f(x, t)) \in \text{Ker} F'(0, 0, 0) \cap \text{Ker}^3 P F'''(0, 0, 0) = \text{Ker}^3 \Psi_3(h)$$

и

$$\bar{u}(x, t, f) = \int_0^t \int_0^\pi G(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $G(x, \xi, t, \tau)$ — функция Грина (см., например, [13, 14]), а отображение $F(u, \varepsilon, f)$ является 3-регулярным на элементы $\bar{h}$.

Применяя теорему 3 и полагая $F(v, y) = F(u, \varepsilon, f)$, $v := (u, f)$, $y := \varepsilon$ и $(u^*, \varepsilon^*, f^*) = (0, 0, 0)$.

Теорема 5. Для $\alpha > 0, \nu > 0$ достаточно ма-

лых при $\varepsilon \in (-\alpha \nu^3, \alpha \nu^3)$ и $\|f(x, t)\| \in \left(\frac{\varepsilon^3}{\alpha}, \nu \right)$ суще-

ствует непрерывное решение уравнения (11) вида

$$u(x, t, \varepsilon, f) = \bar{u}(x, t, f) + y(x, t, \varepsilon, f), \quad (12)$$

$$\|y(x, t, \varepsilon, f)\| = o(\varepsilon^{\frac{1}{3}}). \quad (13)$$

Аналогично могут быть исследованы уравнения

$$u_t - \varepsilon u_{xx} + uu_x + g(u) - f(x, t) = 0, \quad (14)$$

$$u_t - u_{xx} + \varepsilon uu_x + g(u) - f(x, t) = 0, \quad (15)$$

где $g^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, \dots, p$, а также при неоднородных начальных условиях вида $u(x, 0) = \varphi(x)$.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-30005, стр. 1–9), научной бюджетной теме ФИЦ ИУ РАН и научной теме № 144/23/В Министерства Образования и Науки Польши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baxley J.V. Nonlinear second-order boundary value problems: Continuous dependence and periodic boundary conditions // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1982. V. 31. № 2. P. 305–320.
2. Brezhneva O.A., Tretyakov A.A. Marsden: Higher-order implicit function theorems and degenerate nonlinear boundary-value problems // Communications on Pure and Applied Analysis. 2008. V. 7. № 2. P. 293–315.
3. Gaines R. Continuous dependence on parameters and boundary data for nonlinear two-point boundary value problems // Pacific J. Math. 1969. V. 28. P. 327–336.
4. Grzegorzczak W., Medak B., Tretyakov A.A. Application of p -regularity theory to nonlinear boundary value problems // Boundary Value Problems. 2013. V. 2013. P. 251, <http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2013/1/251>
5. Ingram S.K. Continuous dependence on parameters and boundary data for nonlinear two-point boundary value problems // Pacific J. Math. 1972. V. 41. P. 395–408.
6. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
7. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. 2-регулярные решения нелинейных проблем. Теория и численные методы. М.: Наука, 1999.
8. Medak B. Development of p -regularity apparatus and its application to describing the structure of solution sets of degenerated differential equations, Doctoral thesis, UMCS, Lublin, 2013 (in Polish).
9. Medak B., Tretyakov A.A. Existence of periodic solutions to nonlinear p -regular boundary value problem // Boundary Value Problems. 2015. V. 2015. P. 91. <https://doi.org/10.1186/s13661-015-0360-2>
10. Medak B., Tretyakov A.A. Application of p -regularity theory to the Duffing equation // Boundary Value Problems. 2017. V. 2017. P. 85. <https://doi.org/10.1186/s13661-017-0815-8>
11. Medak B., Tretyakov A.A. Continuous dependence of the singular nonlinear Van der Pol equation solutions

- with respect to the boundary conditions: Elements of p -regularity theory // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2021. V. 33. P. 1087–1107.
<https://doi.org/10.1007/s10884-020-09849-0>
12. Michael E.A. Continuous selector // *Ann. Math.* 1956. V. 64. P. 562–580.
 13. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: МГУ, Наука, 2004.
 14. Тихонов А.Н., Василева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, Москва, Физматлит, 1998.
 15. Tret'yakov A.A. The implicit function theorem in degenerate problems // *Russ. Math. Surv.* 1987. V. 42. P. 179–180.
 16. Tret'yakov A.A., Marsden J.E. Factor analysis of nonlinear mappings: p -regularity theory // *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2003. V. 2. № 4. P. 425–445.

ON THE APPLICATION OF THE SOLUTION OF THE DEGENERATE NONLINEAR BURGERS EQUATION WITH A SMALL PARAMETER AND THE THEORY OF p -REGULARITY

B. Medak^{a,*} and A. A. Tret'yakov^{a,b,c,d,**}

^a Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, Faculty of Exact and Natural Sciences, Siedlce, Poland

^b Federal Research Center Informatics and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^c System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

^d Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russian Federation

The article discusses various modifications of the nonlinear Burgers equation with small parameter and degenerate in solution of the form

$$F(u, \varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x, t) = 0, \quad (1)$$

where $F : \Omega \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, $\Omega = C^2([0, \pi] \times [0, T])\mathbb{R}$ and $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $f(x, t) \in C([0, \pi] \times [0, T])$, $\varphi(x) \in C[0, \pi]$. We will be interested in the most important in applications case of a small parameter ε with oscillating initial conditions of the form $\varphi(x) = k \sin x$, where k —some, generally speaking, constant depending on ε , and study the question of the existence of a solution in neighborhood of the trivial $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, which corresponds to $k = k^* = 0$ and at what initial Under certain conditions on the values of k , it is possible to construct an analytical approximation of this solution for small ε .

We will look for a solution in the traditional way of separation of variables on a subspace of functions of the form $u(x, t) = v(t)u(x)$, where $v(t) = ce^{-t}$, $u(x) \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$. In this case, the problem under consideration is degenerate at the point $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, since $\text{Im} F'_u(u^*, \varepsilon^*) \neq Z = \mathcal{C}([0, \pi] \times [0, T])$. This follows from the Sturm-Liouville theory. To achieve our goals, we apply the apparatus of p -regularity theory [6, 7, 15, 16] and show that the mapping $F(u, \varepsilon)$ is 3-regular at the point $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, i.e. $p = 3$.