ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 510, с. 33–38

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

ЗАДАЧА ПРОТЕКАНИЯ ОДНОГО ТИПА НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. В. Г. Звягин[1,*], В. П. Орлов[1,]**

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным
Поступило 05.02.2023 г.
После доработки 17.03.2023 г.
Принято к публикации 22.03.2023 г.

В работе устанавливается существование слабого решения начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости в многосвязной области с памятью вдоль траекторий поля скоростей и неоднородным граничным условием. Исследование предполагает аппроксимацию исходной задачи приближениями галеркинского типа с последующим предельным переходом на основе априорных оценок. Для исследования поведения траекторий негладкого поля скоростей используется теория регулярных лагранжевых потоков.

Ключевые слова: вязкоупругая сплошная среда, многосвязная область, неоднородное граничное условие, априорные оценки, слабое решение, регулярный лагранжев поток

DOI: 10.31857/S2686954323600064, **EDN:** XHWKXX

1. ВВЕДЕНИЕ

В $Q_T = [0,T]\times\Omega$, где $\Omega \in R^N$, $N = 2, 3$ – ограниченная область с гладкой многосвязной границей $\partial\Omega$ рассматривается движение вязкоупругой жидкости типа Олдройда (см. [1]), описываемое начально-краевой задачей

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^{N} u_i(t,x)\partial u(t,x)/\partial x_i - \mu_0\Delta u(t,x) - \\ - \mu_1 \mathrm{Div} \int\limits_{\tau_u(t,x)}^{t} \exp((s-t)/\lambda)\mathcal{E}(u)(s,z(s;t,x))ds + \\ + \mathrm{grad}\, p(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in Q_T; \tag{1}$$

$$\mathrm{div} u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q_T; \\ \int\limits_{\Omega} p(t,x)dx = 0; \quad t\in[0,T]; \tag{2}$$

$$u(0,x) = u^0(x), \quad x\in\Omega, u(t,x) = \alpha(x), \\ (t,x)\in S_T = \{(t,x) : t\in[0,T], x\in\partial\Omega\}; \tag{3}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int\limits_{t}^{\tau} u(s,z(s;t,x))ds, \\ \tau,t\in[0,T], \quad x\in\Omega. \tag{4}$$

Относительно области Ω предполагается, что она получается удалением из ограниченной области Ω_0 попарно непересекающихся множеств $\overline{\Omega}_i$, $i = 1,\dots,K$, где области $\Omega_i \subset \Omega_0$. Таким образом, $\Omega = \Omega_0\backslash(\cup_{i=1}^{K}\overline{\Omega}_i)$. При этом граница $\partial\Omega = \cup_{i=0}^{K}\Gamma_i$ области Ω такова, что поверхность $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ ограничивает область Ω извне, а остальные связные компоненты Γ_i, $i = 1,\dots,K$, ее границы ($\Gamma_i = \partial\Omega_i$) заключены внутри этой поверхности.

В (1)–(4) $u(t,x) = (u_1(t,x),\dots,u_N(t,x))$ и $p(t,x)$ – искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ – плотность внешних сил, $\mathcal{E}(u) = \{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^{N}$ – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$. Дивергенция $\mathrm{Div}\mathcal{E}(u)$ матрицы определяется как вектор с компонентами – дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, $\lambda > 0$, $\mu_1 \geq 0$ – константы, характеризующие вязкоупругие свойства жидкости, u^0 и α – заданные начальное и граничное значения функции u. Вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши (4).

В условиях однозначной разрешимости задачи Коши (4) функция $\tau_u(t,x)$ определяется как $\tau_u(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x)\in\Omega$ при $s\in[\tau,t]\}$. Множество $\gamma(t,x) = \{y : y = z(s;t,x),\ \tau_u(t,x)\leq s\leq t\}$ определяет траекторию движения по Ω частицы жидкости, которая в момент времени t находится в

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
**E-mail: zvg_vsu@mail.ru*
***E-mail: orlov_vp@mail.ru*

точке $x \in \Omega$. Если $\tau_u(t,x) = 0$, то движение данной частицы по траектории $\gamma(t,x)$ начинается с нулевого момента времени. Если $\tau_u(t,x) > 0$, то в этот момент времени частица занимает положение $z(\tau_u(t,x);t,x) \in \partial\Omega$, и $\tau_u(t,x)$ означает момент вхождения данной частицы в Ω через $\partial\Omega$ извне. Заметим, что наличие интеграла в (1) означает (см. [2, гл. 7]) наличие памяти среды вдоль траекторий поля скоростей.

В случае односвязной границы $\partial\Omega$ и однородного граничного условия ($\alpha = 0$, $\tau_u(t,x) = 0$) в (1), нелокальные теоремы существования и единственности слабых и сильных решений для систем вида (1)–(4) устанавливались в [3–6].

Уже для систем уравнений Навье–Стокса ($\mu_1 = 0$) случай многосвязной границы $\partial\Omega$ является существенно более сложным по сравнению со случаем односвязной границы и достаточно полно исследован с точки зрения разрешимости для стационарной задачи в плоском случае.

Вследствие условия $\mathrm{div}u = 0$ функция α должна удовлетворять соотношению

$$\int_{\partial\Omega}\alpha(x)\cdot n(x)dx = \sum_{i=0}^{K}\int_{\Gamma_i}\alpha(x)\cdot n(x)dx = \sum_{i=0}^{K}F_i = 0,$$
$$\alpha(x)\cdot n(x) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i(x)n_i(x). \tag{5}$$

Здесь $n(x) = (n_1(x),\cdots,n_N(x))$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$, $F_i = \int_{\Gamma_i}\alpha(x)\cdot n(x)dx$, $i = 0,1,\ldots,K$. Принципиальные трудности возникают в случае, когда не все потоки F_i равны нулю (т.е. задачи протекания) (см., напр., [7–12] и имеющуюся там библиографию).

Нелокальная слабая разрешимость задаче протекания для системы уравнений Навье–Стокса (как 2-D, так 3-D) в случае многосвязной границы установлена при различных условиях на граничную функцию (см., напр., [7, 10, 11] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе мы устанавливаем слабую разрешимость задачи (1)–(4) в классе функций $u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^N)$ в случае многосвязной границы $\partial\Omega$ при $\mu_1 \neq 0$ и неравенства нулю потоков F_i (т.е. задачи протекания). При этом вопрос об однозначной разрешимости задачи Коши (4) становится нетривиальным и понимается в смысле теории регулярных лагранжевых потоков (РЛП). Чтобы избежать неоправданных сложностей в доказательствах, мы считаем границу области и граничную функцию достаточно гладкими, хотя основные результаты справедливы и при более слабых ограничениях.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Функциональные пространства

Нам понадобятся гильбертовы пространства V и H (см. [13], раздел III.1.4) соленоидальных функций. Символом $C_0^\infty(\Omega)^N$ обозначается множество бесконечно дифференцируемых отображений Ω в R^N, $N = 2,3$, с компактным носителем в Ω. Пусть $\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^N, \mathrm{div}v = 0\}$. Обозначим через H и V замыкание $\mathcal{V}$ в нормах пространств $L_2(\Omega)^N$ и $W_2^1(\Omega)^N$ соответственно. Через V^{-1} обозначим пространство, сопряженное к V. Обозначим через $\langle f,v\rangle$ действие функционала f из сопряженного к V пространства V^{-1} на функцию v из V. Отождествление гильбертова пространства H с его сопряженным H^{-1} и теорема Рисса приводят к непрерывным вложениям $V \subset H = H^{-1} \subset V^{-1}$. При этом для $u \in V$ и $w \in V^{-1}$ справедливо соотношение $\langle u,w\rangle = (u,w)$ со скалярным произведением в H.

Через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H, $L_2(\Omega)^N$, $L_2(\Omega)^{N\times N}$, в каких именно – ясно из контекста.

2.2. Граничная функция

Будем предполагать, что граница Ω задается уравнением $\Phi(x) = 0$, где гладкая функция $\Phi:\Omega_0 \to R^1$ такова, что $\Phi(x) < 0$ при $x \in \Omega$ и $\Phi(x) > 0$ при $x \in \Omega_0\backslash\overline{\Omega}$.

Относительно граничной функции α будем предполагать, что она является следом непрерывно дифференцируемой на Ω_0 функции a, соленоидальной на Ω. При этом предполагается, что на внешней компоненте Γ_0 границы Γ выполняется условие $\alpha|_{\Gamma_0} = 0$, так что $F_0 = 0$. Для внутренних компонент границы Γ_i, $i = 1,\ldots,K$, предполагается, что при $F_i > 0$ выполняется неравенство $\alpha\cdot n|_{\Gamma_0} > 0$, при $F_i < 0$ выполняется неравенство $\alpha\cdot n|_{\Gamma_i} < 0$ $\left(F_i = \int_{\Gamma_i}\alpha(x)\cdot n(x)dx\right)$, а при $F_i = 0$ справедливо $\alpha(x)|_{\Gamma_i} = 0$. Выполнение последних условий означает, что при неравенстве нулю потоков F_i, $i = 1,\ldots,K$, компоненты границы Γ_i, $i = 1,\ldots,K$ являются либо участками втекания жидкости в Ω из Ω_i ($F_i < 0$), либо участками вытекания жидкости ($F_i > 0$).

2.3. *Задача Коши*

В случае $u \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^N)$, вообще говоря, не существует классического решения задачи Коши (4), и ее разрешимость будем понимать в следующем смысле. Положим $u(t,x) = v(t,x) + a(x)$, $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$. Очевидно, что $v \in L_2(0,T;V)$. Продолжив функцию v нулем из Ω в Ω_0 и обозначив продолжение через v^*, имеем $u^* = v^* + a$. Тогда очевидно, что $u^* = u$ в Ω, $u = a$ в $\Omega_0 \backslash \Omega$ и $u^* \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega_0)^N)$. Наряду с задачей (4) рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau (v^* + a)(s, z(s;t,x))ds, \qquad \tau, t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0. \tag{6}$$

Так как $v^* + a \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega_0)^N)$, то существует единственный РЛП, порожденный функцией $u^* = v^* + a$ (см. [14, 15]). В частности, это означает, что задача Коши (6) имеет абсолютно непрерывное по τ решение $z(\tau;t,x)$ при п.в. $x \in \Omega_0$. Обозначим через $\mathcal{Z}$ оператор, ставящий в соответствие функции v порожденный функцией $u^* = v^* + a$ РЛП, так что $\mathcal{Z}(v) = z(\tau;t,x)$. Ниже, говоря о решении $z(\tau;t,x)$ задачи Коши (4), мы будем иметь в виду $z(\tau;t,x) = \mathcal{Z}(v)$ при п.в. $x \in \Omega$ (сужение $\mathcal{Z}(v)$ на Ω).

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата нам будет удобно, полагая $u = v + a$, переписать задачу (1)–(4) в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + \sum_{i=1}^N v_i(t,x)\partial v(t,x)/\partial x_i - \mu_0 \Delta v(t,x) + \\ + \operatorname{grad} p(t,x) = f(t,x) - \sum_{i=1}^N v_i(t,x)\partial a(x)/\partial x_i - \\ - \sum_{i=1}^N a_i(x)\partial v(t,x)/\partial x_i - \sum_{i=1}^N a_i(x)\partial a(x)/\partial x_i + \\ + \mu_1 \operatorname{Div} \int_{\tau(t,x)}^t \exp((s-t)/\lambda)\mathcal{E}(v+a) \times \\ \times (s, \mathcal{Z}(v)(s;t,x))ds \quad (t,x) \in Q_T;\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \\ \int_\Omega p(t,x)dx = 0; \quad t \in [0,T];\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}v(0,x) = v^0(x), \quad x \in \Omega; \quad v(t,x) = 0, \\ t \in [0,T], \quad x \in \partial\Omega.\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\tau(t,x) = \inf\{\tau : \mathcal{Z}(v)(s;t,x) \in \Omega$ при $s \in [\tau,t]\}$, $v^0 = u^0 - a$.

Введем пространство $W_1 = \{v : v \in L_2(0,T;V)$, $v' \in L_1(0,T;V^{-1})$. Здесь v' означает производную по t функции $v(t,\cdot)$ как функции со значениями в V^{-1}.

Пусть $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i v_j \partial w_j/\partial x_i dx$, $u,v,w \in V$.

Определение 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$. *Слабым решением задачи* (7)–(9) *называется функция* $v \in W_1$, *удовлетворяющая условиям* (9) *и тождеству*

$$\begin{gathered}d(v,\phi)/dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial\phi/\partial x_i) + \\ + \mu_1 \left(\int_{\tau(t,\cdot)}^t \exp((s-t)/\lambda) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{E}(v+a)(\tau, \mathcal{Z}(v)(\tau;t,\cdot))d\tau, \mathcal{E}(\phi)(\cdot) \right) + \\ + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\phi)) = \langle f, \phi \rangle + b(v,a,\phi) + \\ + b(a,v,\phi) + b(a,a,\phi)\end{gathered} \tag{10}$$

при любой $\phi \in V$ и п.в. $t \in [0,T]$. Здесь $\mathcal{Z}(v)$ – РЛП, порожденный $v^* + a$.

Замечание. Так как слабое решение $v(t,x)$ задачи (7)–(9) принадлежит пространству W_1, то (см. [13], лемма III.1.4), $v(t,x)$ слабо непрерывна по t как функция со значениями в H, поэтому начальное условие (9) имеет смысл.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$. *Пусть для* α *выполняются условия раздела 2.2. Тогда существует слабое решение задачи* (7)–(9).

4. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Ниже для простоты изложения опускаем непринципиальный множитель $\exp((s-t)/\lambda)$ в (10). Обозначим через A действующий в H оператор с областью определения $D(A) = W_2^2(\Omega)^N \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^N \cap H$, определенный дифференциальным выражением $Av = -\mathcal{P}\operatorname{Div}\mathcal{E}(v)$, где $\mathcal{P}$ – ортопроектор $L_2(\Omega)^N$ на H. Оператор A является положительно определенным самосопряженным оператором (см. [13, с. 40], [16, 2.4]). Ортонормированная система собственных векторов $e_1, e_2, \ldots$ с собственными значениями $0 < \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ образует базис в H.

Зафиксируем натуральное число n. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ оператор ортогонального проектирования в H на подпространство H_n, порожденное элементами $e_1, e_2, \dots, e_n$. В силу плотности множества гладких функций в $L_2(0,T;V^{-1})$, аппроксимируем f последовательностью гладких функций $f^n(t,x)$, так что $\lim_{n\to+\infty}\|f - f^n\|_{L_2(0;W_2^{-1}(\Omega)^N)} = 0$.

Будем искать галеркинские приближения v^n в виде $v^n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)e_k(x)$ как решение тождества

$$d(v^n,\phi)/dt - \sum_{i=1}^{3}(v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i) + \mu_0(\mathscr{E}(v^n),\mathscr{E}(\phi)) + \\ + \mu_1\left(\int_{\tau^n(t,x)}^{t}\mathscr{E}(v^n + a)(\tau, z^n(\tau;t,x))d\tau, \mathscr{E}(\phi)\right) = \\ = \langle f^n,\phi\rangle + b(v^n,a,\phi) + b(a,v^n,\phi) + b(a,a,\phi) \tag{11}$$

при любой $\phi \in H_n$ и п.в. $t \in [0,T]$, $v^n(0,x) = \sum_{k=1}^{n} v_k^0 e_k(x)$, $v_k^0 = \sum_{k=1}^{n}(v^0(x), e_k(x))$.

Здесь $\tau^n(t,x) = \inf\{\tau : z^n(s;t,x) \in \Omega, s \in [\tau,t]\}$, a z^n – решение задачи Коши

$$z^n(\tau;t,x) = x + \int_t^{\tau}\left(\sum_{k=1}^{n} g_k(s)e_k(z^n(s;t,x)) + \\ + a(z^n(s;t,x))ds, \quad \tau,t \in [0,T], \quad x \in \overline{\Omega}_0.\right. \tag{12}$$

При этом мы считаем, что функции $e_k(x)$ продолжены нулем из Ω в Ω_0, так что и функции $v^n(t,x)$ считаем равными нулю при $x \in \Omega_0 \backslash \Omega$.

Сведем задачу нахождения функции v^n к задаче нахождения функций g_i.

Полагая в (11) $\varphi = e_i$, получим соответствующую интегро-дифференциальную систему для определения функций g и z^n:

$$g_i'(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^{n} d_{ki}g_k(t) + \mu_0\lambda_i g_i(t) = w_i(t), \\ w_i(t) = f_i^n(t) - k_i + \\ + \mu_1\left(\int_{\tau^n(t,x)}^{t}\sum_{k=1}^{n} g_k(s)\mathscr{E}(e_k(x))(z^n(s;t,x))ds, \mathscr{E}(e_i(x)\right) + \\ + \mu_1\left(\int_{\tau^n(t,x)}^{t}\mathscr{E}(a)(z^n(s;t,x))ds, \mathscr{E}(e_i(x)\right), \\ g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \le i \le n; \tag{13}$$

$$z^n(\tau;t,x) = x + \int_t^{\tau}(v^n + a)(s, z^n(s;t,x))ds, \\ \tau,t \in [0,T], \quad x \in \Omega_0. \tag{14}$$

Здесь $f_i^n(t) = (f^n, e_i)$, $\sum_{k,r=1}^{n} d_{kri}g_k(t)g_r(t) \equiv D_i(g)$, $d_{kri} = -\sum_{j=1}^{N}(e_{kj}e_r, \partial e_i/\partial x_j)$, d_{ki} и k_i – некоторые числа.

Решение системы (13)–(14) определяется как пара функций $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \in C[0,T]^n$ и $z^n(\tau;t,x) \in C([0,T]\times[0,T]\times\Omega_0)^N$, удовлетворяющих (13)–(14).

Лемма 1. *Система* (13)–(14) *имеет решение.*

Приведем схему доказательства Леммы 1. Пусть $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$. Введем оператор Z, ставящий в соответствие функции $g(t)$ определенную на $G_0 = [0,T]\times[0,T]\times\Omega_0$ функцию $z(\tau;t,x)$ – решение задачи Коши (14) при $v^n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)e_k(x)$, так что $Z(g) = z$. Пусть $S(R) = \{g : \|g\|_{C(0,T)^n} \le R\}$, где $R > 0$, – произвольный шар в $C(0,T)^n$. Оператор $Z : S(R) \to C(G_0)^N$ оказывается равномерно непрерывным на $S(R)$, а $Z: S(R) \to C^1([0,T]\times[0,T]\times\Omega_0)^N$, $Z : S(R) \to C^1([0, T] \times [0,T]\times(\Omega_0\backslash\Omega))^N$ ограниченными.

Пусть $z(\tau;t,x)$, $(t,x) \in Q_T$, является решением задачи Коши (14), а $\tau(t, x) = \inf\{s : z(s;t,x)) \in \Omega, s \le t\}$. Введем оператор $\mathscr{T}$, ставящий в соответствие функции $g(t)$, определяющей функцию $z(\tau;t,x)$, функцию $\tau(t,x)$, так что $\mathscr{T}(g) = \tau(t,x)$. Оператор $\mathscr{T} : C[0,T]^n \to C(Q_0)$ оказывается непрерывным.

Пусть в системе (13)–(14) функция $w = (w_1, \cdots, w_n)$ считается заданной. Тогда, как и в [13], раздел III.3.2, показывается, что эта система ОДУ однозначно разрешима и справедлива оценка $\|g\|_{C(0,T)^n} \le M(\|w\|_{C(0,T)^n} + \|v^0\|_H)$.

Введем оператор G, ставящий в соответствие функции w решение g системы уравнений (13), так что $G(w) = g$. Оператор $G : C[0,T]^n \to C[0,T]^n$ является непрерывным на произвольном шаре $S_w(R) = \{w : \|w\|_{C(0,T)^n} \le R\}$, причем множество $B(R) = \{g : g = G(w), w \in S_w(R)\}$ компактно в $C(0,T)^n$.

Поставим в соответствие произвольной функции $w \in C[0,T]^n$ функцию $g = G(w)$, затем поставим в соответствие g функцию $z = Z(g) = Z(G(w))$, затем поставим в соответствие z функцию $\tau = \mathscr{T}(z) = \mathscr{T}(Z(G(w)))$. Обозначим $\Xi(w) = Z(G(w))$ и

$\Upsilon(w)=\mathcal{T}(Z(G(w)))$. Тогда из (13) подстановкой в левую часть первого уравнения $g=G(w)$, $z^n=\Xi(w)$, $\tau^n=\Upsilon(w)$ получаем операторное уравнение $w = K(w)$. С помощью принципа Шаудера доказывается

Лемма 2. *Существует неподвижная точка w оператора $\mathcal{K}$.*

Пусть w — неподвижная точка оператора $\mathcal{K}$. Положим $g = G(w)$, $z^n = \Xi(w)$, $\tau^n=\mathcal{T}(z)=\mathcal{T}(Z(G(w)))$. Тогда пара $g = G(w)$ и $z^n = \Xi(w)$ является решением системы (13)–(14).

Лемма 1 доказана.

Из Леммы 1 следует

Лемма 3. *Пусть пара* $g(t) = (g_1(t), g_2(t),\ldots, g_n(t))$, $z^n(s;t,x)$ *является решением системы* (13)–(14). *Тогда для функции* $v^n(t,x) = \sum_{k=1}^n g_k(t)e_k(x)$ *выполняется интегральное тождество* (11), *и справедлива равномерная по n оценка*

$$\sup_t |v^n(t,\cdot)|_{L_2(\Omega)^N} + \|v^n\|_{L_2(0;W_2^1(\Omega)^N} \le \le M(\|f\|_{L_2(0;W_2^{-1}(\Omega)^N)} + \|v^0\|_H + M_*(\alpha)). \tag{15}$$

Из оценки (15) и того, что $v(t,x) = 0$ при $x\in \Omega_0\backslash\Omega$, следует слабая в $L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0)^N))$ и сильная в $L_2(0,T;L_2(\Omega_0)^N))$ сходимость v^n к некоторой $v\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0)^N)$ (с точностью до подпоследовательности) при $n\to+\infty$. Отсюда следует (см. [14, 15]), что последовательность $z^n(s;t,x)$ сходится по (s,x) мере к РЛП $z(s;t,x)$, порожденному $v\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0)^N)$ равномерно по t. Тогда существует подпоследовательность $z^n(s;t,x)$, которая при п.в $(s,x)\in Q_T$ сходится к $z(s;t,x)$ равномерно по t. Отсюда и из свойств α выводится, что с точностью до подпоследовательности $\tau^n(t,x)$ сходится к $\tau(t,x)$ при $n\to+\infty$ при п.в. $(t,x)\in Q_T$.

Установленные утверждения о сходимости v^n, z^n и τ^n позволяют перейти к пределу в (11) и получить тождество (10) и включение $v\in W_1$.

Таким образом, v является слабым решением задачи задачи (7)–(9). Теорема 1 доказана.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00103.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
2. *Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. V. 12. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 2008. 230 p.
3. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–220.
4. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory // Nonlinear Analysis: TMA. 2018. V. 172. P. 73–98.
5. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
6. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* On one problem of viscoelastic fluid dynamics with memory on an infinite time interval // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B. 2018. V. 23. № 9. P. 3855–3877.
7. *Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // УМН. 2014. Т. 69. № 6. С. 115–176.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 81–116.
9. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1961. Т. 53. № 4. С. 393–428.
10. *Avrin J.* Existence, uniqueness, and asymptotic stability results for the 3-*D* steady and unsteady Navier–Stokes equations on multi-connected domains with inhomogeneous boundary conditions // Asymptotic Analysis. 2022. V. Pre-press. № Pre-press. pp. 1–22, 2022. https://doi.org/10.3233/ASY-221816
11. *Avrin J.* The 3-*D* Spectrally-Hyperviscous Navier-Stokes Equations on Bounded Domains with Zero Boundary Conditions // arXiv:1908.11005v1 [math.AP] 29 Aug 2019.
12. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1961. Т. 53. № 4. С. 393–428.
13. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М: Мир, 1987. 408 с.
14. *DiPerna R.J., Lions P.L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. V. 1989. 98. P. 511–547.
15. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. Reine Angew. Math. 2008. V. 616. P. 15–46.
16. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М: Наука, 1970. 204 с.

THE PROBLEM OF THE FLOW OF ONE TYPE OF NON-NEWTONIAN FLUID THROUGH THE BOUNDARY OF A MULTI-CONNECTED DOMAIN

V. G. Zvyagin[a] and V. P. Orlov[a]

[a] *Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Acadimician of the RAS B.S. Kashin

In this paper, the existence of a weak solution of the initial boundary value problem for the equations of motion of a viscoelastic non-newtonian fluid in a multi-connected domain with memory along the trajectories of a non-smooth velocity field and an inhomogeneous boundary condition. The study assumes the approximation of the original problem by Galerkin-type approximations followed by a passage to the limit based on a priori estimates. The theory of regular Lagrangian flows is used to study the behavior of trajectories of a non-smooth velocity field.

Keywords: viscoelastic continuous medium, multi-connected domain, inhomogeneous boundary condition, a priori estimates, weak solution, regular Lagrangian flow