ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2024, том 517, с. 36–40

МЕХАНИКА

УДК 539.3:517.958

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОМЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНОГО ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА

© 2024 г. Н. И. Остросаблин[1,*], Р. И. Угрюмов[1,]**

Представлено академиком РАН Б.Д. Анниным 27.02.2024 г.
Поступило 05.03.2024 г.
После доработки 18.04.2024 г.
Принято к публикации 22.04.2024 г.

Для системы уравнений в смещениях для изотропного псевдоконтинуума Коссера найдено два варианта представления общего решения через три функции, удовлетворяющих трем независимым уравнениям, т.е. система диагонализируется. Приведены формулы производства новых решений (операторы симметрии), позволяющие путем дифференцирования из какого-либо заданного решения находить новые решения исходных уравнений. Для случаев плоской и антиплоской деформации получены некоторые частные решения.

Ключевые слова: моментная теория упругости, псевдоконтинуум Коссера, общие решения, операторы симметрии, диагональная система, стесненное вращение, несимметричные тензоры напряжений и деформаций

DOI: 10.31857/S2686740024040068, **EDN:** JOXCGI

1. Моментная упругая среда представляется совокупностью частиц, характеризуемых в декартовой прямоугольной системе координат x_i, $i = 1, 2\ 3$, вектором смещений u_i и независимым вектором поворотов ω_i [1–3]. Такая теория впервые была предложена в начале XX в. в работах братьев Коссера [1]. В моментной среде при нагружении возникают несимметричные силовые напряжения $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ и моментные напряжения $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$. Деформированное состояние моментной среды характеризуют несимметричные тензоры деформации e_{ij} и кручения-изгиба $\varkappa_{ij}$ [1–3]:

$$e_{ij} = \partial_j u_i - \omega_{ij}, \quad \varkappa_{ij} = \partial_j \omega_i, \tag{1}$$

где $\omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k$,$\omega_i = (1/2)\varepsilon_{ijk}\omega_{kj}$; ∂_j – производная по координате x_j; ε_{ijk} – кососимметричный по любой паре индексов тензор Леви-Чивиты; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Определяющие уравнения для упругой изотропной моментной среды имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk}\delta_{ij} + (\mu+\alpha)e_{ij} + (\mu-\alpha)e_{ji}, \\ \mu_{ij} &= \beta\varkappa_{kk}\delta_{ij} + (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ji}, \end{aligned} \tag{2}$$

где λ, μ – постоянные Ламе; α, β, γ, ε – дополнительные постоянные упругости; δ_{ij} – символ Кронекера,единичная матрица.

Удельную энергию деформации можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2\Phi = \sigma_{ij}e_{ij} + \mu_{ij} \quad {}_{ij} = \frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)e_{kk}e_{ii} + \\ +2\mu\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right)\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{ss}\delta_{ij}\right) + \\ +2\alpha e_{[ij]}e_{[ij]} + \frac{1}{3}(3\beta+2\gamma)\ \varkappa_{kk}\varkappa_{ii} + \\ +2\gamma\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{kk}\delta_{ij}\right)\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{ss}\delta_{ij}\right) \\ +2\varepsilon\,\varkappa_{[ij]}\varkappa_{[ij]}. \end{aligned} \tag{3}$$

Круглые и квадратные скобки в индексах означают симметричную и антисимметричную части тензоров по соответствующим индексам. Из последних выражений (3) очевидно, что

[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
*E-mail: o.n.ii@yandex.ru
**E-mail: riugryumov@mail.ru

$2\Phi > 0$ всегда, когда постоянные удовлетворяют неравенствам

$$3\lambda + 2\mu > 0,\quad \mu > 0,\quad \alpha > 0;\quad 3\beta + 2\gamma > 0,\quad \gamma > 0,\quad \varepsilon > 0,$$

при этом соотношения (2) обратимы.

В упрощенной теории Коссера считают, что вектор поворота ω_i равен среднему повороту поля перемещений [1]

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_k u_l. \tag{4}$$

Тогда тензоры (1) принимают вид

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right),$$
$$\varkappa_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_{jk}u_l,\quad \varkappa_{ii} = 0. \tag{5}$$

С использованием (2), (4), (5) и уравнений равновесия получаются три уравнения для трех смещений [1]:

$$\mu\partial_{kk}u_i + (\lambda+\mu)\partial_{ik}u_k + \frac{1}{4}(\gamma+\varepsilon)\partial_{kk}\varepsilon_{imn}\partial_m\varepsilon_{njl}\partial_j u_l = 0. \tag{6}$$

Слагаемые со вторыми производными в (6) соответствуют классическим уравнениям Ламе, а слагаемые с четвертыми производными отвечают за моментное состояние псевдоконтинуума Коссера. К уравнениям (6) добавляют граничные условия в напряжениях или задают на границе рассматриваемой области смещения. Вопрос о граничных условиях для системы (6) и способы ее интегрирования кратко обсуждаются в [1]. Определив из (6) смещения u_i, с учетом (2), (4), (5) можно найти ω_i, σ_{ij}, μ_{ij}.

С учетом соотношения $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{njl} = \delta_{ij}\delta_{ml} - \delta_{il}\delta_{mj}$ матрицу операторов системы (6) запишем в виде:

$$A_{ij} = \mu\partial_{kk}\delta_{ij} + (\lambda+\mu)\partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma+\varepsilon)\partial_{kk}\left(\partial_{ij} - \delta_{ij}\partial_{mm}\right). \tag{7}$$

Для матрицы (7) операторов системы (6) имеют место соотношения

$$AT = TD,\quad T'A = DT', \tag{8}$$

где штрих означает транспонирование матрицы. Тогда общее решение системы (6) имеет вид [4, 5]

$$u = Tv,\quad Dv = f,\quad Tf = 0, \tag{9}$$

где

$$T = \left[\partial_i,\ \varepsilon_{ips}c_p\partial_s,\ c_i\partial_{kk} - c_m\partial_{mi}\right] = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2\partial_3 - c_3\partial_2 & c_1\partial_{kk} - c_m\partial_{m1} \\ \partial_2 & c_3\partial_1 - c_1\partial_3 & c_2\partial_{kk} - c_m\partial_{m2} \\ \partial_3 & c_1\partial_2 - c_2\partial_1 & c_3\partial_{kk} - c_m\partial_{m3} \end{bmatrix}; \tag{10}$$

$$D = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk}\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma+\varepsilon)\partial_{mm}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk}\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma+\varepsilon)\partial_{mm}\right] \end{bmatrix}; \tag{11}$$

c_p — произвольный ненулевой числовой вектор.

Запишем решение (9) с учетом (10), (11):

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 + (c_2\partial_3 - c_3\partial_2)v_2 + (c_1\partial_{kk} - c_m\partial_{m1})v_3, \\ u_2 &= \partial_2 v_1 + (c_3\partial_1 - c_1\partial_3)v_2 + (c_2\partial_{kk} - c_m\partial_{m2})v_3, \\ u_3 &= \partial_3 v_1 + (c_1\partial_2 - c_2\partial_1)v_2 + (c_3\partial_{kk} - c_m\partial_{m3})v_3; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} (\lambda+2\mu)\partial_{kk}v_1 = f_1,\quad \partial_{kk}\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma+\varepsilon)\partial_{mm}\right]v_2 = f_2, \\ \partial_{kk}\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma+\varepsilon)\partial_{mm}\right]v_3 = f_3; \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1 + (c_2\partial_3 - c_3\partial_2)f_2 + (c_1\partial_{kk} - c_m\partial_{m1})f_3 &= 0, \\ \partial_2 f_1 + (c_3\partial_1 - c_1\partial_3)f_2 + (c_2\partial_{kk} - c_m\partial_{m2})f_3 &= 0, \\ \partial_3 f_1 + (c_1\partial_2 - c_2\partial_1)f_2 + (c_3\partial_{kk} - c_m\partial_{m3})f_3 &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, решение системы (6) по формулам (12) выражается через три функции v_i, которые удовлетворяют трем отдельным независимым уравнениям (13), однородным или неоднородным.

Из [4] и соотношений (8) следует, что если $u = Tv$, где $Dv = 0$, то система (6), (7) удовлетворяется: $Au = ATv = TDv = 0$. Если $v = T'\tilde{u}$, где $A\tilde{u} = 0$, то выполняется уравнение

$Dv = DT'\tilde{u} = T'A\tilde{u} = 0$. Таким образом, согласно формулам

$$u = Tv, \quad v = T'\tilde{u}, \tag{15}$$

решения уравнений $Au = 0$, $Dv = 0$ переходят друг в друга, и системы эквивалентны [6]. Но чтобы не было потери части решений, в общем случае необходимо в правой части (13) учитывать функции f_i, ядро оператора T (10), (14).

Кроме того, из формул (15) получаем, что если $A\tilde{u} = 0$, то $u = TT'\tilde{u}$ — новое решение:

$$Au = ATT'\tilde{u} = TDT'\tilde{u} = TT'A\tilde{u} = 0.$$

Если $D\tilde{v} = 0$, то и $v = T'T\tilde{v}$ — решение:

$$Dv = DT'T\tilde{v} = T'AT\tilde{v} = T'TD\tilde{v} = 0.$$

Выражение $u = TT'\tilde{u}$ есть формула производства решений, так как из любого решения $\tilde{u}$ получается новое решение u; оператор $Q = TT'$ является оператором симметрии в смысле группового анализа [4].

В матрице (10) все три столбца ортогональны друг к другу и третий столбец содержит вторые производные. Но можно взять третий столбец в виде, аналогичном второму столбцу, содержащем первые производные. Тогда вместо матрицы (10) будет матрица вида

$$T = \left[\partial_i,\ \varepsilon_{ips}c_p\partial_s,\ \varepsilon_{imn}\gamma_m\partial_n\right] = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2\partial_3 - c_3\partial_2 & \gamma_2\partial_3 - \gamma_3\partial_2 \\ \partial_2 & c_3\partial_1 - c_1\partial_3 & \gamma_3\partial_1 - \gamma_1\partial_3 \\ \partial_3 & c_1\partial_2 - c_2\partial_1 & \gamma_1\partial_2 - \gamma_2\partial_1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где c_p, γ_m — произвольные ненулевые непропорциональные векторы, при этом определитель

$$|T| = \left[(c_2\gamma_3 - c_3\gamma_2)\partial_1 + (c_3\gamma_1 - c_1\gamma_3)\partial_2 + (c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1)\partial_3\right]\partial_{kk}$$

не равен нулю [7]. Для случая матрицы (16) также имеют место соотношения (8) и общее решение системы (6) вида (9) с той же диагональной матрицей D (11), а функции v_i удовлетворяют трем независимым уравнениям (13). Формулы (15) и все другие приведенные выше соотношения между функциями имеют место и в случае матрицы (16). Оператор симметрии $Q = TT'$ дан в явном виде в [7]. Придавая компонентам c_j, γ_j различные значения, можно получить различные варианты общих решений в случаях (10) или (16).

Во втором и третьем уравнениях (13) дифференциальный оператор $D_2 = D_3 = D$ представляет собой произведение оператора Лапласа $D_{(1)} = \partial_{kk}$ и оператора Гельмгольца $D_{(2)} = \mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm}$. Тогда решение однородного уравнения $Dv = D_{(1)}D_{(2)}v = 0$ по теореме Боджио [1] можно представить в виде суммы $v = g + h$, где g — гармоническая функция $D_{(1)}g = \partial_{kk}g = 0$, а функция h удовлетворяет уравнению Гельмгольца $D_{(2)}h = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm}\right]h = 0$. Различные частные решения уравнений Лапласа и Гельмгольца приведены в [8]. Таким образом, общее решение уравнений в смещениях (6) псевдоконтинуума Коссера по формулам (9)—(14), (16) выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. По формуле $u = TT'\tilde{u}$, $A\tilde{u} = 0$ получаются новые решения из любого известного решения $\tilde{u}$. Если постоянная $\gamma + \varepsilon = 0$, то полученные решения переходят в известные представления для случая классического изотропного материала [4, 5, 7].

2. Рассмотрим некоторые частные решения системы уравнений (6), (7). Для антиплоской деформации [9] принимают, что $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. В этом случае система (6), (7) сводится к одному уравнению

$$A_{33}u_3 = (\partial_{11} + \partial_{22})\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22})\right]u_3 = 0. \tag{17}$$

Как сказано выше, решение уравнения (17) имеет вид $u_3 = g + h$. Если $h = 0$, то получим решение $u_3 = g$, соответствующее классической безмоментной теории упругости. В [9] в качестве решения классической антиплоской задачи теории упругости исследуется гармоническая функция

$$u_3 = g = \frac{K}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho^{1/2}\sin(\varphi/2), \tag{18}$$

соответствующая трещине продольного сдвига, где K — постоянная, а ρ, φ — полярные координаты. Разрыв вдоль отрицательного направления оси x_1 обеспечивается функцией $\sin(\varphi/2)$. Решение уравнения Гельмгольца для трещины продольного сдвига имеет вид:

$$u_3 = h = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_1}}\rho^{-1/2}\mathrm{sh}(\lambda_1\rho)\sin(\varphi/2), \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{4\mu}{\gamma + \varepsilon}}. \tag{19}$$

На рис. 1 приведены графики различных решений уравнения (17). Только первые две функции являются решениями классической задачи.

Для плоской деформации [9] считают, что $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$, при этом система (6), (7) сводится к двум уравнениям, общее решение которых принимает вид

$$u_1 = \partial_1 v_1 - \partial_2 v_2, \quad u_2 = \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2;$$
$$(\lambda + 2\mu)(\partial_{11} + \partial_{22}) v_1 = f_1, \quad (\partial_{11} + \partial_{22}) \times$$
$$\times \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22})\right] v_2 = f_2; \tag{20}$$
$$\partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 = 0, \quad \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 = 0.$$

Последние два уравнения являются условиями Коши–Римана для аналитической функции $f(z) = f_1 + if_2$, $i = \sqrt{-1}$ комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Уравнения (20) можно переписать в виде

$$u_1 = \partial_1 v_1 - \partial_2 v_2 - \partial_2 h, \quad u_2 = \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 + \partial_1 h;$$
$$(\lambda + 2\mu)(\partial_{11} + \partial_{22}) v_1 = f_1, \quad \mu(\partial_{11} + \partial_{22}) v_2 = f_2;$$
$$\partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 = 0, \quad \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 = 0; \tag{21}$$
$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22})\right] h = 0.$$

Из уравнений (21) следует известная формула Колосова–Мусхелишвили, представляющая смещения $u_1 + iu_2$ через комплексные потенциалы [7]:

$$u_1 + iu_2 = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + i(\partial_1 + i\partial_2)h,$$
$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},$$

где черта над функциями означает комплексное сопряжение, а штрих – производную по z. Если известна функция h, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца (21), то из (21) несложно найти дополнительные моментные смещения $u_k^{(m)}$. Например, для функции h вида (19) получим смещения

$$u_1^{(m)} = -\partial_2 h = -\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_1}}\left[\frac{1}{2}\rho^{-3/2}\mathrm{sh}(\lambda_1\rho)\cos(3\varphi/2) + \lambda_1\rho^{-1/2}\mathrm{ch}(\lambda_1\rho)\sin\varphi\sin(\varphi/2)\right],$$
$$u_2^{(m)} = \partial_1 h = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_1}}\left[-\frac{1}{2}\rho^{-3/2}\mathrm{sh}(\lambda_1\rho)\sin(3\varphi/2) + \lambda_1\rho^{-1/2}\mathrm{ch}(\lambda_1\rho)\cos\varphi\sin(\varphi/2)\right].$$

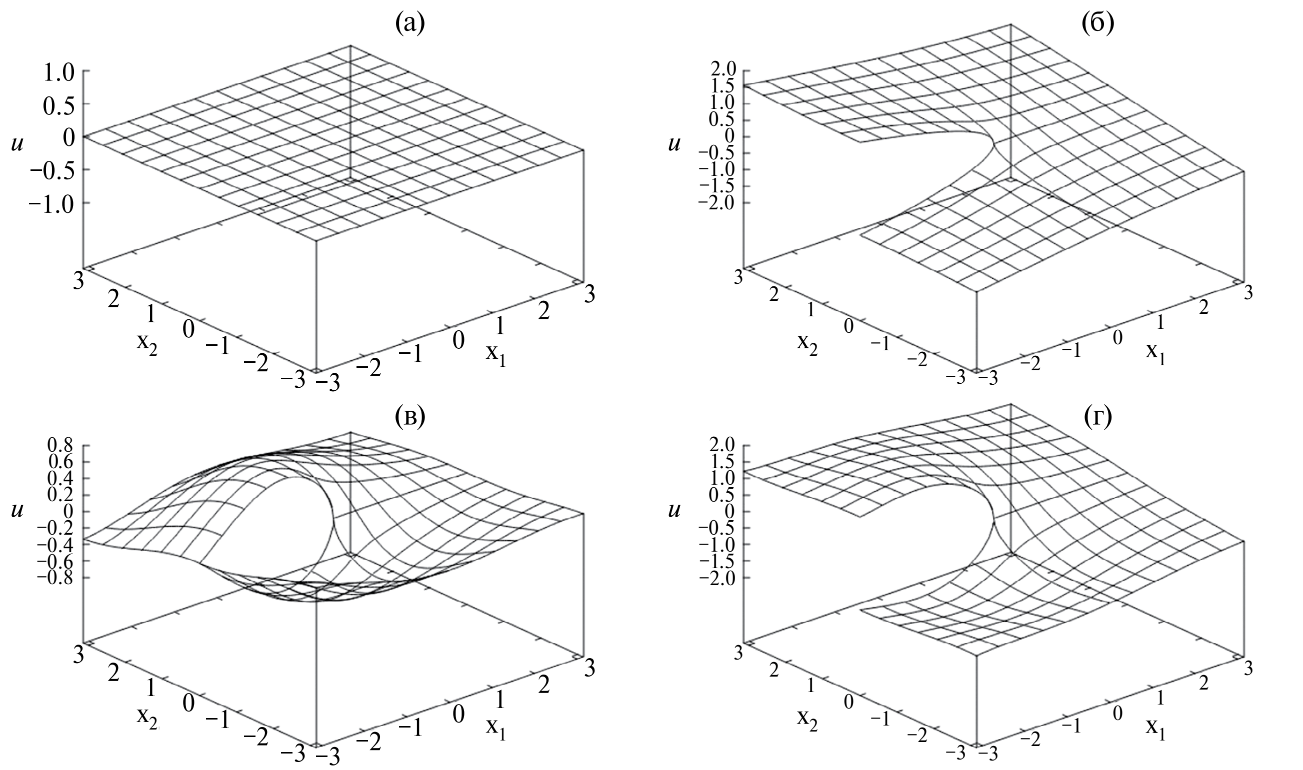

Рис. 1. Решение задачи о трещине продольного сдвига: а – сетка до деформирования, б – классическое решение (18) ($K = \mu$), в – моментное решение (19) ($\lambda_1 = 1$), г – линейная комбинация этих решений.

Некоторые двумерные задачи для изотропной моментной среды решены, например, в работах [10, 11].

Таким образом, в работе получено два варианта общего решения для системы уравнений в смещениях изотропного псевдоконтинуума Коссера. Система уравнений диагонализуется и решение выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. Даны формулы производства новых решений, исходя из любого заданного решения. Получены частное решения задачи о трещине продольного сдвига и представление общего решения уравнений плоской деформации.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Сибирского отделения Российской академии наук (код проекта 2.3.1.3.1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Купрадзе В.Д.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976. 664 с.
3. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И., Угрюмов Р.И.* Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стесненным вращением // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26. № 1. С. 5–19.
4. *Остросаблин Н.И.* Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории к диагональному виду // Прикл. механика и техн. физика. 1993. Т. 34. № 5. С. 112–122.
5. *Остросаблин Н.И.* Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трем независимым волновым уравнениям // Прикл. механика и техн. физика. 1994. Т. 35. № 6. С. 143–150.
6. *Борок В.М.* О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 45–65.
7. *Остросаблин Н.И.* Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12. № 2. С. 79–83.
8. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
9. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
10. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 183 с.
11. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

GENERAL SOLUTION OF THE EQUATIONS SYSTEM OF THE MOMENT LINEAR ELASTICITY THEORY OF THE ISOTROPIC COSSERAT PSEUDO-CONTINUUM

N. I. Ostrosablin[a], R. I. Ugryumov[a]

[a]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,*
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Presented by Academician of the RAS B.D. Annin

For a system of equations in displacements for the Cosserat medium, two variants of representing the general solution through three functions satisfying three independent equations was found, i. e. the system is diagonalized. Expressions for the production of new solutions (symmetry operators) are given. The expressions provides to find new solutions to the original equations by differentiating from any given solution. Some particular solutions was obtained for the cases of plane and antiplane deformation.

Keywords: moment elasticity theory, Cosserat pseudocontinuum, general solutions, symmetry operators, diagonal system, constrained rotation, asymmetric stress and strain tensors