

УДК 517.958:539.3(5)

РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОКЛАДКИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ФЛАНЦАМИ

© 2024 г. С. А. Назаров^{1,*}

Представлено академиком РАН [Н.Ф. Морозовым] 20.04.2023 г.

Поступило 07.01.2024 г.

После доработки 07.01.2024 г.

Принято к публикации 09.04.2024 г.

У тонкой цилиндрической прокладки зафиксированы оба основания, а боковая поверхность свободна от внешних воздействий. Для сечений с гладкой границей и прямоугольного представлена асимптотика частот собственных колебаний. На основе исследования спектра смешанной краевой задачи теории упругости в четверти единичного слоя обнаружен новый эффект локализации мод собственных колебаний около вершин прямоугольного сечения и экспоненциального затухания при удалении от них. При гладкой границе сечения концентрация мод происходит либо около всей кромки (круговая пластина), либо вблизи точек максимума кривизны контура.

Ключевые слова: тонкая прокладка между фланцами, модели пониженной размерности, локализация мод собственных колебаний, волны, захваченные упругой полуполосой и четвертью слоя

DOI: 10.31857/S2686740024040059, EDN: JPINVH

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Тонкая однородная изотропная цилиндрическая пластина $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ находится в идеальном контакте с двумя прямыми абсолютно жесткими фланцами (рис. 1) и имеет продольное сечение $\omega \in \mathbb{R}^2$, ограниченное простым замкнутым контуром $\partial\omega$. Далее различаем три случая: ω — круг или прямоугольник (рис. 2а, б), а также произвольная область с гладкой границей, у которой кривизна κ (отрицательная на вогнутых участках) принимает максимальное значение в одной точке (рис. 2в). Собственные колебания прокладки описываются системой уравнений Ламе

$$-\mu \Delta_x u^h - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u^h = \Lambda^h u^h \quad \text{в } \Omega^h \quad (1)$$

с условиями свободного края (Неймана) на боковой поверхности $\Gamma^h = \partial\omega \times (0, h)$ и

жесткого защемления (Дирихле) на основаниях $\Sigma_p^h = \omega \times \{p\}$, $p = 0, 1$, а именно,

$$\sigma^{(n)}(u^h) = 0 \quad \text{на } \Gamma^h, \quad u^h = 0 \quad \text{на } \Sigma^h := \Sigma_0^h \cup \Sigma_1^h. \quad (2)$$

При этом $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, Λ^h — спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты колебаний, $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$ — вектор смещений, а $\sigma^{(n)}(u^h)$ — вектор нормальных напряжений с декартовыми компонентами

$$\sigma_k^{(n)}(u^h) = n_1 \sigma_{1k}(u^h) + n_2 \sigma_{2k}(u^h), \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к границе сечения $\omega \in \mathbb{R}^2$, $\sigma_{jk}(u^h)$ — компоненты тензора напряжений второго ранга,

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \nabla_x \cdot u^h, \quad (3)$$

$$j, k = 1, 2, 3,$$

а $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ — постоянные Ламе и $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

¹Институт проблем машиноведения
Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk



Рис. 1. Круглая (а) и прямоугольная (б) прокладки. Жестко защемленные основания глубоко тонированы.

Вариационная формулировка задачи (1), (2) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$E_3(u^h, \psi^h; \Omega^h) = \Lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \forall \psi^h \in H_0^1(\Omega^h; \Sigma^h),$$

причем $(\cdot, \cdot)_{\Omega^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)$, скалярном или векторном, $H_0^1(\Omega^h; \Sigma^h)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на основаниях пластины, а удвоенная упругая энергия, запасенная пластиной выглядит так:

$$E_3(u^h, u^h; \Omega^h) = \int_{\Omega^h} \left(2\mu \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial u_k^h}{\partial x_k} \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1}^3 (1 - \delta_{j,k}) \left| \frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right|^2 + \lambda |\nabla_x \cdot u^h|^2 \right) dx. \quad (4)$$

Нижний индекс 3 приписан к обозначению квадратичной формы (4) для того, чтобы отличать ее от удвоенной упругой энергии E_2 в плоской задаче, которая (энергия) получается удалением из подынтегрального выражения компоненты u_3^h и всех производных по переменной x_3 .

Основная цель сообщения — указать асимптотическое поведение при $h \rightarrow +0$ собственных чисел задачи (1), (2)

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (5)$$

и соответствующих собственных вектор-функций $u_{(1)}^h, u_{(2)}^h, \dots, u_{(m)}^h, \dots \in H_0^1(\Omega^h; \Sigma^h)$, которые подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(p)}^h, u_{(q)}^h)_{\Omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (6)$$

2. ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ

В классической теории пластин Кирхофа (см. [3–6] и др.), которая подразумевает постановку условий Неймана (отсутствия внешнего нагружения) на обоих основаниях Σ_0^h и Σ_1^h пластины, моды собственных колебаний описываются решениями краевых задач на сечении ω и поэтому оказываются распределенными по всему телу Ω^h . В статье [7], по-видимому, впервые установлено, что собственные вектор-функции задачи (3) (или (1), (2) в дифференциальной форме) сконцентрированы около кромки Γ^h и затухают с экспоненциальной скоростью при удалении от нее. На первый взгляд кажется, что причиной их такого “странного” поведения служит жесткое защемление оснований Σ_p^h , не “пропускающее” колебания вовнутрь тела Ω^h . Это впечатление ошибочно: в той же статье проверено, что асимптотика собственных пар $\{\Lambda_m^h; u_{(m)}^h\}$ системы (1) с условиями Дирихле, распространенными на всю поверхность пластины,

$$u^h = 0 \quad \text{на } \partial\Omega^h = \bar{\Gamma}^h \cup \Sigma_0^h \cup \Sigma_1^h \quad (7)$$

описывается именно решениями задачи Дирихле для системы двух уравнений Гельмгольца

$$-\mu \Delta_{x'} v = Mv \quad \text{на } \omega, \quad v = (v_1, v_2) = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad (8)$$

где $x' = (x_1, x_2)$ — система продольных координат. Таким образом, в задаче (1), (7) эффект локализации отсутствует. Как пояснено в [8, 7], предельная задача в значительной мере определяется феноменом пограничных слоев, которые существенно различаются для краевых условий (2) и (7), а для рассматриваемой далее прямоугольной прокладки (рис. 1б) появляется ранее неизвестный пространственный пограничный слой (см. рис. 3 и разд. 3).

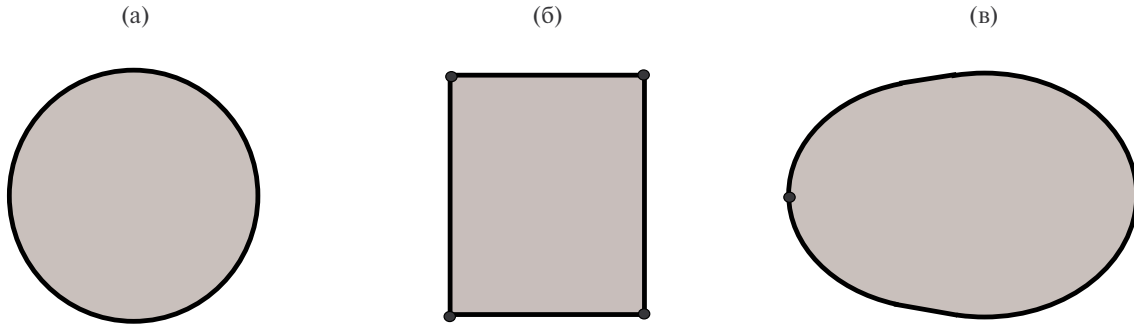


Рис. 2. Круговое, прямоугольное и яйцевидное продольные сечения прокладки. Постоянная и нулевая кривизны (а, б). Угловые точки (б) и единственная точка максимальной кривизны (в) снабжены меткой •.

В разд. 4 сообщения воспроизведены асимптотические конструкции, отвечающие обнаруженному ранее эффекту локализации в задаче (1), (2), которые различаются для кругового и, например, яйцевидного сечений на рис. 2а–в, и в значительной степени повторяют материал сообщения [8], где, в частности, обследована упругая накладка (верхнее основание Σ_1^h , как и боковая поверхность Γ^h , освобождено от внешних воздействий), для которой также характерна концентрация собственных мод вблизи кромки. Основной и абсолютно новый результат — локализация мод около углов прямоугольного сечения (рис. 2б) при $\lambda > 0$ — представлен в разд. 5. В разд. 6 отдельно рассмотрен случай $\lambda = 0$, в котором локализация происходит в окрестностях сторон прямоугольника. Эти выводы обеспечены технически наиболее сложным в сообщении анализом спектра смешанной краевой задачи теории упругости в четверти слоя (рис. 3)

$$\Xi = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3): \xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \xi_3 \in (0, 1)\}, \quad (9)$$

возникающей вследствие растяжения исходных координат в h^{-1} раз. Так, в разд. 3 удалось проверить, что при $\lambda > 0$ дискретный спектр задачи содержит по крайней мере одно собственное число, причем именно соответствующая собственная вектор-функция, затухающая на бесконечности с экспоненциальной скоростью, порождает эффект “околоугловой” локализации. В случае $\lambda = 0$ у задачи в неограниченной области (9) возникает пороговый резонанс (ср. публикации [9–11] и см. разд. 3), который как раз и дает возможность завершить асимптотический анализ “околореберной” локализации в разд. 6.

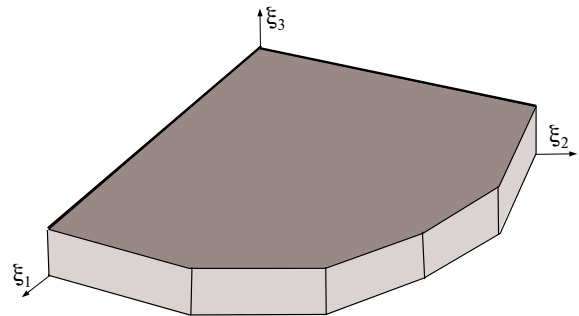


Рис. 3. Четверть единичного слоя. Жестко защемленные основания глубоко тонированы.

Обнаруженное необычное поведение мод собственных колебаний порождает концентрацию напряжений в малых или узких зонах хрупкого тела, которая в свою очередь провоцирует процесс разрушения. Приведенные результаты подтверждают известный из повседневной практики факт: отслоение прокладок и накладок обычно начинается с угловых или иных сингулярных точек на границе. Именно поэтому при наклеивании тонких поверхностных заплаток у них обычно закругляются углы, а тщательная проклейка края заплатки особенно важна. Прокладки между фланцами в водопроводных и газовых трубах обязательно имеют округлую, обычно кольцевую, форму.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В ЧЕТВЕРТИ СЛОЯ

Рассмотрим спектральную смешанную краевую задачу теории упругости для однородного изотропного упругого тела (9) на рис. 3, вариационная формулировка которой выглядит так:

$$E_3(w, \psi; \Xi) = M(w, \psi)_\Xi \quad \forall \psi \in \mathcal{H} := H_0^1(\Xi; Y_1 \cup Y_2). \quad (10)$$

Здесь M — спектральный параметр, $Y_p = \{\xi \in \partial \Xi: \xi_3 = p\}$, $p = 0, 1$, — основания четверти слоя, которые жестко заземлены, но боковая поверхность оставлена свободной (ср. исходные краевые условия (2)). Поскольку левая часть интегрального тождества (10) — положительно определенная, замкнутая в $H^1(\Xi)$ и симметричная билинейная форма, задаче о собственных колебаниях четверти слоя Ξ ставится [13, гл. 10, 1] в соответствие положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\Xi)$.

По обычной схеме (построение сингулярной последовательности Вейля при $M \geq M_+$ и регуляризатора оператора при $M \in (0, M_+)$; ср. работу [14]) проверяется, что существенный спектр $\wp_{\text{ess}}$ оператора $\mathcal{A}$ — луч $[M_+, +\infty)$, точка отсечки которого — первое (наименьшее) собственное число

$$M_+ := \beta_1 \in (0, \mu\pi^2) \quad (11)$$

плоской задачи теории упругости в полубесконечной единичной полосе (далее — полуполосе)

$$\Pi = \{\xi' = (\xi_2, \xi_3): \xi_2 > 0, \xi_3 \in (0, 1)\}. \quad (12)$$

Существование изолированного собственного числа (11) в дискретном спектре последней задачи установлено, например, в статье [12]. Соответствующую собственную вектор-функцию, обращающуюся в нуль на боковых сторонах полуполосы Π , нормированную в пространстве $L^2(\Pi)$ и затухающую при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ с экспоненциальной скоростью, обозначим через $W = (W_2, W_3)$.

Нижняя грань всего спектра $\wp$ оператора $\mathcal{A}$ вычисляется согласно минимальному принципу [13, теорема 10.2.1]

$$\underline{\wp} = \inf_{\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{E_3(\psi, \psi; \Xi)}{\|\psi; L^2(\Xi)\|^2}. \quad (13)$$

Таким образом, дискретный спектр $\wp_d$ оператора $\mathcal{A}$ непустой, если только нашлась пробная вектор-функция $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}$, для которой

$$E_3(\psi^\varepsilon, \psi^\varepsilon; \Xi) < M_+ \|\psi^\varepsilon; L^2(\Xi)\|^2. \quad (14)$$

В этом случае величина (13) располагается ниже точки отсечки (11) и является первым собственным числом оператора $\mathcal{A}$. Положим

$$\psi_1^\varepsilon(\xi) = \sqrt{\varepsilon} Y(\xi), \quad \psi_q^\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon \xi_1} W_q(\xi'), \quad q = 2, 3, \quad (15)$$

где Y — какая-то гладкая функция с малым носителем. В силу формулы (15) имеем

$$\begin{aligned} \|\psi^\varepsilon; L^2(\Xi)\|^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-2\varepsilon \xi_1} d\xi_1 \|W; L^2(\Pi)\|^2 + \\ &+ \varepsilon \|Y; L^2(\Pi)\|^2 = \frac{1}{2\varepsilon} + O(\varepsilon), \\ E_3(\psi^\varepsilon, \psi^\varepsilon; \Xi) &= \int_0^{+\infty} e^{-2\varepsilon \xi_1} d\xi_1 E_2(W, W; \Pi) + \\ &+ 2\sqrt{\varepsilon} E_3(W, Y; \Xi) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

При этом $W = (0, W_2, W_3)$ и $Y = (Y, 0, 0)$, а $E_2(W, W; \Pi) = \beta_1 \|W; L^2(\Pi)\|^2 = M_+$ — упругая энергия полуполосы, порожденная захваченной двумерной волной. В итоге при помощи формулы интегрирования по частям придаем неравенству (14) следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\varepsilon} \lambda \int_{\Pi} Y(0, \xi') \nabla_{\xi'} \cdot W(0, \xi') d\xi' = \\ = 2\sqrt{\varepsilon} E_3(W, Y; \Xi) < -C\varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку собственная мода W не может быть соленоидальной всюду в упругой полуполосе Π , находим точку $P \in \Pi$, в которой $\nabla_{\xi'} \cdot W(P) \neq 0$, и подбираем функцию Y так, чтобы интеграл из левой части (16) стал отрицательным. В итоге, при $\lambda > 0$ неравенство (14) выполнено для пробной вектор-функции ψ^ε с компонентами (20) и достаточно малом $\varepsilon > 0$, т.е. дискретный спектр $\wp_d$ оператора $\mathcal{A}$ в самом деле непустой. Первое собственное число задачи (10) обозначим M_1 а соответствующую собственную вектор-функцию — $w_{(1)} \in \mathcal{H}$. При помощи приемов из [7] можно убедиться в экспоненциальном затухании $w_{(1)}(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

При $\lambda = 0$ вектор-функция W — ограниченное решение задачи в четверти слоя Ξ , а значит, в ней реализуется пороговый резонанс [9–11].

К сожалению, вопрос о кратности дискретного спектра при любых значениях параметра λ остался открытым.

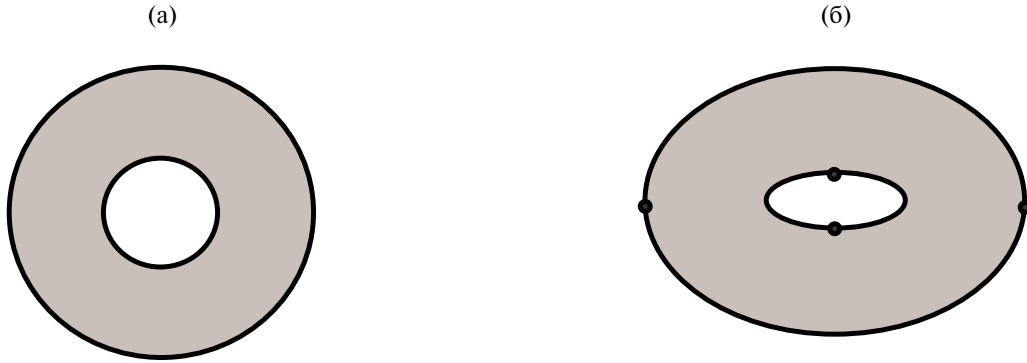


Рис. 4. Круговое (а) и эллиптическое (б) кольца. Точки максимумов кривизны (б) снабжены метками •.

4. СЕЧЕНИЯ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Сообщим известные сведения о собственных парах задачи (1), (2) (см. публикации [7, 8]). Асимптотическое представление собственных чисел выглядит так:

$$\Lambda_m^h = h^{-2}B + h^{-1}b_J + h^{-1/J}K_m + O(h^{1-J/2}). \quad (17)$$

Здесь $J = 1$ при $\omega = \{x' = (x_1, x_2): |x'| < 1\}$, но $J = 2$ для области на рис. 2в, у которой строгий глобальный максимум $\kappa_0 > 0$ кривизны границы достигается в одной точке $s_0 \in \partial\omega$. Положительные множители B и b_1 сложным образом зависят от интегральных характеристик собственной моды W в полуполосе Π и, разумеется, от постоянных Ламе λ и μ . В случае круга K_m — собственное число обыкновенного дифференциального уравнения на единичной окружности

$$-A\partial_s^2 V(s) = KV(s), \quad s \in \partial\omega, \quad (18)$$

причем (n, s) — локальная система координат, т.е. расстояние до контура $\partial\omega$, измеренная вдоль внешней нормали, и длина дуги на нем. Во втором случае K_m — собственное число уравнения гармонического осциллятора (см., например, книгу [15]):

$$-A\partial_\eta^2 V(\eta) + a\eta^2 V(\eta) = KV(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

где $\eta = h^{-1/2}(s - s_0)$ — растянутая координата (ср. сообщение [8]), а коэффициенты $A > 0$ и $a > 0$ зависят от W и λ, μ , а также от $\partial_s^2 \kappa(s_0) < 0$. Кроме того, множитель b_2 в формуле (17) пропорционален величине $\kappa_0 > 0$.

Отметим, что асимптотические представления собственных вектор-функций, нормированных согласно формуле (6), приобретают вид

$$u_{(m)}^h(x) = \begin{cases} h^{-1} \left(V_m(s) W(-h^{-1}n, h^{-1}z) + O(h) \right) & \text{при } J = 1, \\ h^{-5/4} \left(V_m(h^{-1/2}(s - s_0)) W(-h^{-1}n, h^{-1}z) + O(h^{1/2}) \right) & \text{при } J = 2, \end{cases}$$

где V_m — собственная функция уравнения (18) или (19), а различие в показателях степеней малого параметра h обусловлено разным растяжением координат.

Для кругового и эллиптического колец (рис. 4) асимптотические серии (17) собственных чисел задачи (1), (2) тиражируются: асимптотические конструкции годятся соответственно для внутренней окружности на рис. 4а, или нескольких точек глобальных и локальных максимумов кривизны, помеченных значком • на рис. 4б.

5. ПРЯМОУГОЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ И $\lambda > 0$

В противоположность технически сложному исследованию спектра задачи (10) асимптотика первых четырех (по количеству вершин прямоугольника) собственных чисел из последовательности (5) легко выводится при помощи максиминимального принципа [13, теорема 10.2.2] и принимает вид

$$\Lambda_k^h = h^{-2} \left(M_1 + O(e^{-\delta/h}) \right), \quad \delta > 0, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (20)$$

Соответствующие собственные вектор-функции задачи (1), (2) допускают представления

$$u_{(k)}^h(x) = h^{-3/2} \left(w_{(1)}(\xi^{(k)}) + O(e^{-\delta/h}) \right),$$

причем $k = 1, \dots, 4$ и $\xi^{(k)}$ — растянутые в h^{-1} раз декартовы координаты с центрами в вершинах прямоугольного сечения.

Асимптотическое строение собственных чисел Λ_m^h с номерами $m \geq 5$ — полностью открытый вопрос из-за отсутствия информации о кратности дискретного спектра задачи (10) и появления у нее пороговых резонансов.

6. ПРЯМОУГОЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ И $\lambda = 0$

Поскольку кратность дискретного спектра осталась неизвестной, обсуждаем две ситуации.

Если и при $\lambda = 0$ дискретный спектр оператора A остается непустым, то начальные члены последовательности (5) по-прежнему имеют вид (20).

В случае $\wp_d = \emptyset$ благодаря тому, что в задаче (10) при $\lambda = 0$ возникает двойной пороговый резонанс, асимптотика собственных чисел становится такой:

$$\Lambda_m^h = h^{-2} \beta_1 + K_m + O(h^{1/2}).$$

Здесь $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — объединенная и упорядоченная последовательность собственных чисел задач Неймана для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -A \partial_s^2 V_p(s) &= K V_p(s), \quad s \in (-\ell_p, \ell_p), \\ \pm \partial_s V_p(\pm \ell_p) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

на сторонах прямоугольника

$$\omega = (-\ell_1, \ell_1) \times (-\ell_2, \ell_2).$$

При этом задачи (21) с индексами $p = 1, 2$ учитываются дважды — для каждой из противоположных сторон. Асимптотика собственных вектор-функций $u_{(m)}^h$ устроена достаточно сложно из-за возникновения угловых пограничных слоев.

7. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ

Для сечений, изображенных на рис. 2, в разд. 4–6 представлены лишь основные (первые) асимптотические серии собственных чисел задачи (1),

(2) (или (3) в вариационной форме). В разд. 4 уже упоминалось, что для обоих колец на рис. 4 возникают и другие серии собственных чисел с устойчивыми асимптотиками. В случае прямоугольного сечения также можно построить собственные числа, порожденные двумерной (8) или одномерной (21) моделями упругой прокладки Ω^h . Это не сделано в сообщении по причине отсутствия информации о пороговых резонансах задач теории упругости в полуполосе (12) и четверти слоя (9), и потому обоснованно поставить краевые условия на сторонах или в вершинах прямоугольника не удастся. Подчеркнем, что при отсутствии порогового резонанса в задаче (10) при $\lambda > 0$ условия Неймана в задачах (21) заменяются условиями Дирихле в точках $s = \pm \ell_p$.

По-видимому, кратности дискретного спектра и пороговые резонансы можно определить разве лишь при помощи численных методов: в силу общих результатов [11] доступны приемы изучения названных объектов на основе вычисления устойчивых интегральных характеристик задач для упругих тел Π и Ξ .

Предложенный в разд. 3 подход к изучению спектра трехмерной задачи теории упругости весьма чувствителен к геометрической и материальной симметриям. Какие-либо результаты о спектре анизотропного сектора слоя с произвольным углом продольного сечения неизвестны.

Вывод двумерной модели (8) для ортотропной прокладки $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ не встречает заметных препятствий согласно общим асимптотической процедуре [6]. Кроме того, приемы из работы [12] и книги [6] позволяют распространить модель и на прокладки с искривленной боковой поверхностью подходящих форм. Вопрос о поведении собственных частот тонких прокладок переменной толщины не рассматривался.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124041500009-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
4. Шойхет Б.А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. № 5. С. 913–924.
5. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Ленинград: изд-во ЛГУ, 1978.
6. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
7. Назаров С.А. Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 738–755.
8. Назаров С.А. Модели пониженной размерности для пластины, закрепленной вдоль основания и части боковой поверхности // Доклады РАН. Физика, техн. науки. 2024. Т. 516. С. 59–64.
9. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
10. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
11. Назаров С.А. Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
12. Назаров С.А. Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с защемленными боковыми сторонами и изломанным торцом // Прикладная матем. и механика. 2023. Т. 87. № 2. С. 264–278.
13. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
14. Dauge M., Lafranche Y., Ourmières-Bonafos T. Dirichlet spectrum of the Fichera layer // Integral Equations and Operator Theory. 2018. V. 90 (5, article 60).
15. Ландау Л.Д., Лифшице М. Квантовая механика (релятивистская теория). М.: Наука, 1974.

MISCELLANEOUS TYPES OF LOCALIZATION OF NATURAL OSCILLATIONS OF A GASKET BETWEEN PARALLEL FLANGES

S. A. Nazarov^a

^a*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
Saint-Peterburg, Russia*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

Both bases of a thin cylindrical gasket are fixed but the lateral side stays traction-free. For middle cross-sections with a smooth boundary as well as for a square one, we describe the asymptotics of frequencies of natural oscillations. Based on an investigation of the spectrum of the mixed boundary-value problem in the theory of elasticity in a quarter of the unit layer, we discover a new effect of localization of modes of natural oscillations near vertices of the square section and of the exponential decay at a distance from them. In the case of the smooth boundary of the cross-section eigenmodes concentrate either near the whole edge (a circular plate), or at the vicinity of points of maximum of the contour curvature.

Keywords: thin gasket between flanges, models of reduced dimension, localization of modes of natural oscillations, waves trapped by elastic semi-infinite strip and quarter of layer