

УДК 539.3

МОМЕНТНО-МЕМБРАННАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ ГИБКИХ ПЛАСТИН КАК КОНТИНУАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЛИСТА ГРАФЕНА

© 2023 г. Член-корреспондент Национальной академии наук Армении С. О. Саркисян^{1,*}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 25.05.2022 г.

Поступило 04.09.2022 г.

После доработки 04.09.2022 г.

Принято к публикации 11.10.2022 г.

В предположении о малости деформаций, изгибно-крутильных характеристик и углов поворота (в том числе и углов свободного поворота) элементов пластинки на основе трехмерной геометрически-нелинейной моментной теории упругости с сохранением лишь тех нелинейных членов, которые происходят от нормального перемещения (прогиба) и его производных, построена геометрически нелинейная моментно-мембранная теория упругих пластин как континуальная теория деформаций гибкого графена. Для указанной нелинейной теории упругих пластин, введением функций напряжений, разрешающие уравнения представлены также в смешанной форме: это система уравнений равновесия поперечно-изгибной деформации, составленная в деформированном состоянии пластинки, с присоединением уравнений неразрывности деформаций, выраженных через функции напряжений и функции прогиба. Для геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин установлен вариационный принцип типа Лагранжа.

Ключевые слова: гибкая пластинка, моментно-мембранная теория, лист графена, континуальная модель

DOI: 10.31857/S2686740023020098, **EDN:** UPPFNJ

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–5] обосновывается учет моментных взаимодействий между атомами двумерных наноматериалов и, одновременно, как континуальная модель деформаций этих материалов, устанавливается трехмерная моментная теория упругости. Известно также [6], что деформация кристаллических материалов на нано- и мезоуровнях происходит по схеме “сдвиг плюс поворот”. Становится актуальной задача о построении на основе моментной теории упругости линейной, а также геометрически нелинейной модели пластин или оболочек, подчиняющейся деформационной концепции “сдвиг плюс поворот”, как континуальных моделей деформации двумерных наноматериалов.

Необходимо отметить, что в работе [7], принямая за основу, что у двумерных наноматериалов межатомное взаимодействие — силовое нецентрального и моментного, заменяя эти взаимодействия соответствующей стержневой линейной моделью, построена дискретно-континентальная (стержневая)

модель этих материалов. Далее, из полученной стержневой модели, осуществляя предельный переход к континуальной, как континуальная модель двумерных наноматериалов, устанавливается моментно-мембранная линейная теория упругих оболочек [8, 9]. В частности, для графена (при соответствующих деформациях) устанавливаются линейные модели плоского напряженного состояния и поперечной изгибной деформации моментно-мембранной теории упругих пластин, при этом вычисляются все упругие постоянные моментной теории упругости для материала графена. В работе [10], на основе модели поперечной изгибной деформации моментно-мембранной теории упругих пластин, изучаются некоторые прикладные задачи статического поперечного изгиба прямоугольного листа графена.

В данной работе построена моментно-мембранная модель упругой пластинки при больших прогибах, которая представляется как геометрически нелинейная модель для графена как гибкого материала.

Отметим, что общая геометрически нелинейная теория тонких оболочек в рамках моментной теории упругости построена в работе [11] (см. также обзорную работу [12]).

¹ Ширакский государственный университет, Гюмри, Армения

*E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

1. ИСХОДНЫЕ ГИПОТЕЗЫ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН. ДЕФОРМАЦИИ И ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. УСИЛИЯ И МОМЕНТЫ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. СООТНОШЕНИЯ УПРУГОСТИ

Пусть положения точек тела в первоначальном состоянии определяются их проекциями x, y, z на оси некоторой прямоугольной системы декартовых координат X, Y, Z .

Рассмотрим две бесконечно близкие материальные точки $M(x, y, z)$ и $N(x + dx, y + dy, z + dz)$ недеформированного упругого тела, которые после деформации переместятся в точки $M^*(\xi, \eta, \zeta)$ и $N^*(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$. Вектор $\mathbf{M}^*\mathbf{N}^*$ (с проекциями $d\xi, d\eta, d\zeta$) определяет величину и направление линейного элемента тела, величина и направление которого до деформации были заданы вектором $\mathbf{MN}$ (с проекциями dx, dy, dz). Каждое составляющее вектора $\mathbf{M}^*\mathbf{N}^*$ связано как с вектором перемещения $\mathbf{V}(V_1, V_2, V_3)$, так и с вектором независимого поворота $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Связь $d\xi, d\eta, d\zeta$ от вектора перемещения приведена в работе [13]. Что касается вклада в эти проекции от вектора независимого поворота, следует учесть, что в моментной теории упругости каждая точка тела рассматривается как тело-точка [14]. Имея в виду это обстоятельство, можем констатировать, что бесконечно малый вектор $\mathbf{MN}$ поворачивается как твердое тело. Следовательно, при свободном повороте вектор $\mathbf{MN}$ получает перемещение как элемент жесткого тела: $d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ (где $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$). Таким образом, для $d\xi, d\eta, d\zeta$ окончательно можем написать:

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \omega_3\right)dy + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right)dz, \\ d\eta &= \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \omega_3\right)dx + \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)dz, \\ d\zeta &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial x} + \omega_2\right)dx + \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \omega_1\right)dy + \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)dz. \end{aligned} \quad (1)$$

На основе дифференциальных соотношений (1) в трехмерной моментной геометрически нелинейной теории упругости можно определить в данной точке тела относительные удлинения элементов $\{dx, 0, 0\}$, $\{0, dy, 0\}$, $\{0, 0, dz\}$; сдвиговые деформации в плоскостях xy, yz, xz и изгибно-крутильные характеристики деформации.

В дальнейшем рассматриваемое тело будем считать пластинкой толщиной $2h$ (со срединной плоскостью $z = 0$).

Геометрически нелинейную теорию пластин по моментной теории упругости будем строить в предположении, что удлинения, сдвиги и углы поворота элементов пластинки малы по сравнению с единицей; будем сохранять лишь те нелинейные члены [13], которые происходят только от нормального перемещения V_3 и его производных.

Для приведения трехмерной задачи геометрически нелинейной моментной теории упругости к двумерной (моментно-мембранной теории пластин) будем применять следующие гипотезы [8, 9]:

1. Компоненты вектора перемещения и вектора независимого поворота не зависят от поперечной координаты z , т.е.

$$\begin{aligned} V_i &= u_i(x, y), \quad i = 1, 2; \quad V_3 = w(x, y), \\ \omega_k &= \Omega_k(x, y), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Пренебрегаются напряжения $\sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ и моментные напряжения $\mu_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$, соответственно, относительно напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ и моментных напряжений $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{23}$.

На основе кинематической гипотезы (2), используя соответствующие соотношения трехмерной теории, для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин, получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \Gamma_{11}(x, y) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \gamma_{22} &= \Gamma_{22}(x, y) = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{12} &= \Gamma_{12}(x, y) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \Omega_3 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{21} &= \Gamma_{21}(x, y) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \Omega_3 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \chi_{13} &= k_{13}(x, y) = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x}, \quad \chi_{23} = k_{23}(x, y) = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y}, \\ \gamma_{13} &= \Gamma_{13}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2, \\ \gamma_{23} &= \Gamma_{23}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1, \\ \chi_{11} &= k_{11}(x, y) = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad \chi_{22} = k_{22}(x, y) = \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}, \\ \chi_{12} &= k_{12}(x, y) = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, \quad \chi_{21} = k_{21}(x, y) = \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что полученные выше результаты (2)–(4) представляют собой выражения перемещений и свободных поворотов, деформаций и изгибов-кручений моментно-мембранной теории

упругих гибких пластин в объемной области трехмерной пластинки, в частности, и в области ее срединной плоскости.

Напряженное состояние гибкой пластинки в пределах сделанных допущений может рассматриваться как результат наложения двух состояний: одно из них соответствует напряжениям и моментным напряжениям, равномерно распределенным по толщине пластинки, которое отвечает плоскому напряженному состоянию, а второе отвечает состоянию поперечного изгиба (т.е. напряжениям и моментным напряжениям, также равномерно распределенным по толщине пластинки). Плоскому напряженному состоянию отвечают напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , σ_{21} и моментные напряжения μ_{13} , μ_{23} ; напряженному состоянию поперечного изгиба отвечают напряжения σ_{13} , σ_{23} и моментные напряжения μ_{11} , μ_{22} , μ_{12} , μ_{21} .

В теории пластин вместо напряжений и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами, отнесенными к единице длины соответствующей координатной линии x и y срединной плоскости:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz = 2\sigma_{ii}h, & S_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz = 2\sigma_{ij}h, \\ L_{i3} &= \int_{-h}^h \mu_{i3} dz = 2\mu_{i3}h, & N_{i3} &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} dz = 2\sigma_{i3}h, \\ L_{ii} &= \int_{-h}^h \mu_{ii} dz = 2\mu_{ii}h, \\ L_{ij} &= \int_{-h}^h \mu_{ij} dz = 2\mu_{ij}h, & i \neq j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим внешнюю силу, нормальную к срединной плоскости и приходящуюся на единицу ее площади, через $q_z = q_z(x, y)$.

Рассматривая условия равновесия элемента пластинки ($dx \times dy$) в плоскости xy , находим для усилий и моментов три уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial L_{23}}{\partial y} + S_{12} - S_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия равновесия моментов относительно осей y и x дают еще два уравнения:

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} - N_{13} = 0, \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} + N_{23} = 0. \quad (7)$$

При составлении уравнения равновесия сил, нормальных к срединной плоскости, будем учи-

тывать, что в связи с изгибом пластинки усилия $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ образуют проекции на ось z .

Так, усилия $T_{11}dy$ и $\left(T_{11} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x} dx\right)dy$, приложенные к сторонам элемента $x = \text{const}$ и $x + dx = \text{const}$, поворачиваются соответственно на угол $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx$ и дают равнодействующую проекций на ось $z - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{11} \frac{\partial w}{\partial x}\right)dx dy$.

Подобные выражения находим для других усилий: T_{22}, S_{12}, S_{21} . Суммируя, получим

$$\frac{\partial\left(T_{11} \frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(T_{22} \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(S_{12} \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(S_{21} \frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial y}.$$

Это выражение на основании первых двух уравнений равновесия из (6) получает вид

$$T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Тогда в дополнение к уравнениям равновесия (6), (7) получаем шестое уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x} + \frac{\partial N_{23}}{\partial y} + T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ + S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q_z = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, в геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин уравнениями равновесия будут уравнения (6), (7), (9).

Так как все рассуждения будем вести в рамках физически линейных соотношений, следовательно, физические соотношения упругости геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин будут оставаться такими, какими они выражались в соответствующей линейной теории [8, 9]:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}), \\ S_{ij} &= 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + 2h(\mu - \alpha) \Gamma_{ji}, \\ L_{i3} &= 2Bhk_{i3}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} N_{i3} &= 2G^* h \Gamma_{i3}, \\ L_{ii} &= 2h(\gamma + \varepsilon) \left[k_{ii} + \frac{1}{2} \nu_m (2k_{ii} + k_{jj}) \right], \\ L_{ij} &= 2h(\gamma + \varepsilon) \left(k_{ij} + \frac{1}{2} \nu_m k_{ji} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$i \neq j = 1, 2, \quad B = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad (12)$$

$$G^* = \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha}, \quad \nu_m = 2\frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon},$$

$E, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \alpha, \gamma, \varepsilon, \beta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} 2\gamma$ [7] – упругие постоянные моментной теории упругости. Отметим, что для двумерных наноматериалов, в частности для графена, используются не указанные упругие постоянные, а следующие величины [5, 7]:

$$E_* = 2Eh, \quad \mu_* = 2\mu h, \quad \alpha_* = 2\alpha h, \quad (13)$$

$$\gamma_* = 2\gamma h, \quad \varepsilon_* = 2\varepsilon h,$$

а также

$$D_* = 2G^*h, \quad D' = 2(\gamma + \varepsilon)h, \quad B_* = 2Bh. \quad (14)$$

Таким образом, построена определяющая система уравнений геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин. Это уравнения равновесия (6), (7), (9), геометрические соотношения (3), (4) и физические соотношения упругости (10), (11). Всего 30 уравнений; неизвестных функций тоже 30 ($u_1, u_2, w, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3; \Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, k_{13}, k_{23}; \Gamma_{13}, \Gamma_{23}, k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}; T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}, L_{13}, L_{23}; N_{13}, N_{23}, L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$). Определяющая система уравнений геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин 12-го порядка, с шестью граничными условиями на каждом краю срединной плоскости (s) пластинки. (Ниже эти граничные условия будем получать после установления вариационного принципа возможных перемещений для этой теории.)

Если соотношения упругости (10), (11) и геометрические соотношения (3), (4) подставить в уравнения равновесия (6), (7), (9), приходим к разрешающей системе уравнений геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин относительно величин $u_1, u_2, w, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

2. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ

Судя по структуре выражений (3), тангенциальные деформации и изгибы-кручения должны быть связаны между собой определенными зависимостями: в эти выражения входят одни и те же

перемещения u_1, u_2, w и независимый поворот Ω_3 . Для установления этих зависимостей будем исключить из выражений Γ_{11} и Γ_{21} перемещение u_1 и, аналогично, из выражений Γ_{22} и Γ_{12} – перемещение u_2 . Тогда, с учетом формул для k_{13}, k_{23} из (3), после некоторых преобразований получим соотношения

$$\frac{\partial \Gamma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial y} - k_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{22}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial y} - k_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

(можно формально присоединить к этим соотношениям также $\frac{\partial k_{13}}{\partial y} = \frac{\partial k_{23}}{\partial x}$, которое выполняется тождественно).

Соотношения (15) будут представлять собой уравнения совместности или неразрывности деформаций в моментно-мембранной геометрически нелинейной теории упругих пластин.

Далее введем функции напряжений. Рассмотрим уравнения равновесия (6). Следуя работам [15–17], введем функции, аналогичные функциям напряжений Эри в плоской задаче классической теории упругости:

$$T_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \quad S_{21} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad S_{12} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \quad (16)$$

$$T_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \quad L_{13} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad L_{23} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

В этом случае первые два уравнения (6) тождественно удовлетворяются. Подставляя (16) в третье уравнение (6), получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0,$$

которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi_1 \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_2 - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (17)$$

Введем функцию ϕ по правилу

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi_1 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \phi_2 - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (18)$$

Тогда третье уравнение (6) также будет удовлетворяться тождественно.

Выразим через ϕ и ψ усилия $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ и моменты L_{13}, L_{23} , получим

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, & T_{22} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \\ S_{12} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, & S_{21} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ L_{13} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, & L_{23} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, для усилий T_{11} , T_{22} , S_{12} , S_{21} и моментов L_{13} , L_{23} , принимая представления (19), будут тождественно удовлетворены все три уравнения равновесия (6).

Из трех оставшихся уравнений равновесия (7), (9) с учетом соотношений упругости (11) и геометрических соотношений (4) получим систему вида:

$$\begin{aligned} \Delta w + \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{D_*} \left(T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{q_z}{D_*} = 0, \\ \Delta \Omega_1 + \nu_m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \right) + \frac{D_*}{D'} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1 \right) = 0, \\ \Delta \Omega_2 + \nu_m \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \right) - \frac{D_*}{D'} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Если иметь в виду соотношения (19), получим, что система (20) содержит пять неизвестных функций: w , Ω_1 , Ω_2 , ϕ , ψ . Для решения задачи рассмотрим уравнение неразрывности (совместности) деформаций (15) (при этом необходимо из соотношений упругости (10) Γ_{11} , Γ_{22} , Γ_{12} , Γ_{21} , k_{13} , k_{23} выразить через усилия T_{11} , T_{22} , S_{12} , S_{21} и моменты L_{13} , L_{23} , а для последних применить соотношения (19)), в результате получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [I_*^2 \Delta - 1] \psi - \frac{B_*}{E_*} \frac{\partial (\Delta \phi)}{\partial y} = \\ = \frac{1}{2} B_* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} [I_*^2 \Delta - 1] \phi + \frac{B_*}{E_*} \frac{\partial (\Delta \phi)}{\partial x} = \\ = \frac{1}{2} B_* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$I_*^2 = \frac{B_*(\mu_* + \alpha_*)}{4\mu_*\alpha_*}. \quad (22)$$

Уравнения (20), (21) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений (в смешанной форме) геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин, т.е. систему уравнений геометрически нелинейной континуальной теории деформаций листа графена.

Легко убедиться, что если в уравнениях (20), (21) пренебречь нелинейными членами, то получим $\phi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ (следовательно, $T_{11} = T_{22} = S_{12} = S_{21} = 0$), и система (20) переходит к системе уравнений поперечного изгиба моментно-мембранной линейной теории упругих пластин [8, 9].

3. ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ЛАГРАНЖА. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Согласно принципу возможных перемещений равновесное положение системы характеризуется равенством

$$\delta U = \delta A, \quad (23)$$

где δA — работа внешних сил и моментов на соответствующих возможных обобщенных перемещениях, δU — вариация потенциальной энергии деформации пластинки.

Имея в виду, что на основе принятых кинематических гипотез перемещение и свободные повороты, следовательно, деформации, изгиб-кручения, напряжения и моментные напряжения не зависят от координаты z , для вариации потенциальной энергии деформации прямоугольной пластинки $a \times b$ (учитывая принятые статические гипотезы и соотношения (3)–(5)) получим

$$\begin{aligned} \delta U = \iint_{(s)} (T_{11} \delta \Gamma_{11} + T_{22} \delta \Gamma_{22} + S_{12} \delta \Gamma_{12} + S_{21} \delta \Gamma_{21} + \\ + L_{13} \delta k_{13} + L_{23} \delta k_{23} + N_{13} \delta \Gamma_{13} + N_{23} \delta \Gamma_{23} + \\ + L_{11} \delta k_{11} + L_{22} \delta k_{22} + L_{12} \delta k_{12} + L_{21} \delta k_{21}) dx dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Вычислим работу внешних сил и моментов на обобщенных возможных перемещениях. Учитывая гипотезы построения геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин, для работы внешних контурных усилий и моментов приложенных на гранях срединной плоскости пластинки $x = 0, a$ и $y = 0, b$, на обобщенных возможных перемещениях δu_1 , δu_2 , δw , $\delta \Omega_1$, $\delta \Omega_2$, $\delta \Omega_3$, получим

$$\begin{aligned} \delta A = \int_0^b \left[\bar{T}_{11} \delta u_1 + \bar{S}_{12} \delta u_2 + \right. \\ \left. + \left(\bar{N}_{13} + \bar{T}_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{S}_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{L}_{13} \delta \Omega_3 + \bar{L}_{11} \delta \Omega_1 + \bar{L}_{12} \delta \Omega_2 \Big] dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
& + \int_0^a \left[\bar{S}_{21} \delta u_1 + \bar{T}_{22} \delta u_2 + \right. \\
& + \left(\bar{N}_{23} + \bar{S}_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{T}_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w + \\
& + \bar{L}_{23} \delta \Omega_3 + \bar{L}_{21} \delta \Omega_1 + \bar{L}_{22} \delta \Omega_2 \Big] dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \\
& + \iint_{(s)} q_z \delta w dx dy.
\end{aligned} \quad (25)$$

После подстановки выражений (24), (25) в (23) вариационное уравнение принципа возможных перемещений примет свой окончательный вид:

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \left[(S_{21} - \bar{S}_{21}) \delta u_1 + (T_{22} - \bar{T}_{22}) \delta u_2 + \right. \\
& + (N_{23}^* - \bar{N}_{23}^*) \delta w + (L_{23} - \bar{L}_{23}) \delta \Omega_3 + \\
& + (L_{21} - \bar{L}_{21}) \delta \Omega_1 + (L_{22} - \bar{L}_{22}) \delta \Omega_2 \Big] dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \\
& + \int_0^b \left[(T_{11} - \bar{T}_{11}) \delta u_1 + (S_{12} - \bar{S}_{12}) \delta u_2 + \right. \\
& + (N_{13}^* - \bar{N}_{13}^*) \delta w + (L_{13} - \bar{L}_{13}) \delta \Omega_3 + \\
& + (L_{11} - \bar{L}_{11}) \delta \Omega_1 + (L_{12} - \bar{L}_{12}) \delta \Omega_2 \Big] dy \Big|_{x=0}^{x=a} = \\
& = \iint_{(s)} \left[\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} \right) \left(\delta u_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right) + \right. \\
& + \left(\frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} \right) \left(\delta u_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \delta w \right) + \\
& + \left(\frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial L_{23}}{\partial y} + S_{12} - S_{21} \right) \delta \Omega_3 + \\
& + \left(\frac{\partial N_{13}}{\partial x} + \frac{\partial N_{23}}{\partial y} + T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\
& + S_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q_z \Big) \delta w + \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} + N_{23} \right) \delta \Omega_1 + \\
& + \left. \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} - N_{13} \right) \delta \Omega_2 \right] dx dy = 0,
\end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}
N_{13}^* &= N_{13} + T_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + S_{12} \frac{\partial w}{\partial y}, \\
N_{23}^* &= N_{23} + S_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + T_{22} \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned} \quad (27)$$

Из вариационного уравнения (26) принципа возможных перемещений следуют уравнения

равновесия (6), (7), (9) и следующие граничные условия на контурных линиях срединной плоскости пластинки:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \bar{T}_{11}, \quad S_{12} = \bar{S}_{12}, \quad N_{13}^* = \bar{N}_{13}^*, \quad L_{13} = \bar{L}_{13}, \\
L_{11} &= \bar{L}_{11}, \quad L_{12} = \bar{L}_{12}, \quad \text{на } x = 0, \quad a, \\
S_{21} &= \bar{S}_{21}, \quad T_{22} = \bar{T}_{22}, \quad N_{23}^* = \bar{N}_{23}^*, \quad L_{23} = \bar{L}_{23}, \\
L_{21} &= \bar{L}_{21}, \quad L_{22} = \bar{L}_{22}, \quad \text{на } x = 0, \quad b.
\end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, для геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин установлено вариационное уравнение типа Лагранжа (это уравнение (23) с учетом выражений (24) и (25)). На основе этого вариационного уравнения, для решения краевых задач геометрически нелинейной моментно-мембранной теории пластин, можно применять известные вариационные методы, а также разрабатывать вариант, применяя метод конечных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена геометрически нелинейная моментно-мембранная теория упругих пластин как континуальная теория деформаций листа гибкого графена. Установлены определяющая система уравнений (уравнения равновесия, физические соотношения упругости и геометрические соотношения), а также уравнения совместности деформаций указанной нелинейной теории упругих пластин. Введено понятие функций напряжений, разрешающие уравнения геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин представлены в смешанной форме: это система уравнений равновесия поперечно-изгибной деформации, составленная в деформированном состоянии пластинки, с присоединением к этой системе уравнения неразрывности деформаций, выраженное через функции напряжений. На основе применения принципа возможных перемещений составлены уравнения равновесия в вариационной форме, а также установлены граничные условия геометрически нелинейной моментно-мембранной теории упругих пластин.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С093.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д. Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур // ДАН. 2003. Т. 391. № 6. С. 764–768.

2. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток с учетом моментных взаимодействий на микроуровне // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595–615.
3. *Беринский И.Е., Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* Применение моментного взаимодействия к построению устойчивой модели кристаллической решетки графена // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 5. С. 6–16.
4. *Кузькин В.А., Кривцов А.М.* Описание механических свойств графена с использованием частиц с вращательными степенями свободы // ДАН. 2011. Т. 440. № 4. С. 476–479.
5. Современные проблемы механики. Механические свойства ковалентных кристаллов. / Беринский И.Е. [и др.]; под общ. ред. А.М. Кривцова, О.С. Лобода. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. 160 с.
6. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Егорушкин В.Е.* Основы физической мезомеханики структурно-неоднородных сред // Известия РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 8–29.
7. *Саркисян С.О.* Стержневая и континуально-моментная модели деформаций двумерных наноматериалов // Физ. мезомех. 2022. Т. 25. № 2. С. 109–121.
8. *Саркисян С.О.* Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией “сдвиг плюс поворот” // Физ. мезомех. 2020. Т. 23. № 4. С. 13–19.
9. *Саркисян С.О.* Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 1. С. 38–47.
10. *Саркисян С.О.* Поперечный изгиб листа графена по моментно-мембранной континуальной теории упругих пластин / Монография “Актуальные проблемы прочности”. Минск: НАН Беларуси, 2020. Глава 8. С. 99–105.
11. *Еремеев В.А., Zubov Л.М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 280 с.
12. *Eremeyev V., Altenbach H.* Basics of Mechanics of Micropolar Shells / In: Shell-like Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev. Springer, 2017. V. 572. P. 63–112.
13. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: ГУТТЛ, 1948. 210 с.
14. *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. 340 с.
15. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
16. *Миндлин Р.Д.* Влияния моментных напряжений на концентрации напряжений // Сб. пер. иностр. статей: “Механика”. 1964. Вып. 4 (88). С. 115–128.
17. *Nowacki W., Olszak W.* Micropolar Elasticity. Wien: Springer-Verlag, 1974. 168 p.

MOMENT-MEMBRANE THEORY OF ELASTIC FLEXIBLE PLATES AS A CONTINUAL GEOMETRICALLY NONLINEAR THEORY OF A GRAPHENE SHEET

Corresponding Member of NAS of Armenia **S. H. Sargsyan^a**

^a *State University of Shirak, Gyumri, Armenia*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

In the present work, under the assumption of smallness of deformations, bending-torsional characteristics and angles of rotation (including the angles of free rotation) of the elements of the plate, based on the three-dimensional geometrically-nonlinear moment theory of elasticity, preserving only those nonlinear terms, that come from normal displacement (deflection) and its derivatives, a geometrically nonlinear moment-membrane theory of elastic plates is constructed as a continual theory of deformations of a flexible graphene. For the indicated nonlinear theory of elastic plates, by introducing stress functions, the resolving equations are presented also in a mixed form: these are the system of equilibrium equations for transverse-bending deformation, compiled in the deformed state of the plate, and deformations continuity equations, expressed in stress functions and deflection functions. For the geometrically nonlinear moment-membrane theory of elastic plates Lagrange-type variational principle is established.

Keywords: flexible plate, moment-membrane theory, graphene sheet, continual model