ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК. НАУКИ О ЗЕМЛЕ, 2024, том 514, № 2, с. 328–332

ОКЕАНОЛОГИЯ

УДК 577.38:574.62

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОМЫСЕЛ ПРОТИВ ХАОСА В ДИНАМИКЕ ПОПУЛЯЦИЙ

© 2024 г. Академик РАН Г. Г. Матишов[1,]*, В. Г. Ильичев[1,]**

Поступило 16.10.2023 г.
После доработки 27.10.2023 г.
Принято к публикации 30.10.2023 г.

Динамика численности рыбных популяций даже для простых классов функций воспроизводства может быть довольно сложной (вплоть до возникновения хаотических режимов). Возникает проблема: как изменится поведение численности при наложении на нее оптимального долгосрочного промысла. Здесь определены и обоснованы фундаментальные свойства соответствующего ежегодного вылова. На их основе с учетом компьютерных экспериментов обнаружен неожиданный результат: при оптимальном промысле динамика популяции сильно упрощается, и, в частности, хаос трансформируется в монотонное стремление численности рыб к равновесию.

Ключевые слова: популяция, рыба, динамика, численность, ежегодный вылов, функция Беллмана, хаос, устойчивое равновесие

DOI: 10.31857/S2686739724020174

Согласно наблюдениям, динамика численности природных популяций (например, рыб) может быть довольно сложной (вплоть до возникновения хаотических режимов). Это подтверждают и многие модели, используемые в математической экологии [1]. Многие гидробилоги и зоологи полагают, что такого сорта негативные явления связаны с гиперпродукцией природных популяций. Так, при благоприятной температуре возникает бурный рост сине-зеленых водорослей, который порождает экологическую катастрофу – цветение воды.

В связи с этим актуальна проблема влияния оптимального многолетнего промысла на долговременное (= асимптотическое) поведение численности популяций. Так, если промысел еще более “запутывает” динамику рыбных популяций, то это сильно осложняет разработку стратегии вылова. В ряде работ рассмотрены простейшие стратегии промысла (= вылов с фиксированной квотой), и обнаружено: имеет место определенная стабилизация поведения рыбных популяций [2]. Разумеется, такой вылов далек от оптимального, кроме того, выводы получены для конкретных моделей с привлечением компьютерных экспериментов, и поэтому поставленная выше проблема остается открытой.

В наших статьях и работах других авторов [3–7] разработаны фундаментальные подходы к теории оптимизации долголетнего промысла. В конечном счете удалось обнаружить, что стабилизация хаоса при оптимальном промысле имеет место для широкого класса моделей. Веские основания этого результата приведены в данной статье.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОМЫСЛА

В этом вводном разделе представлены результаты, полученные ранее в работах [8, 9]. Для удобства читателей приводимые свойства, кроме нумерации, снабжены большими буквами, означающими: М – математика, У – промысел, Э – экономика.

Обсудим эти свойства на примере одномерной дискретной модели динамики численности рыб (с шагом в 1 год):

$$x_{t+1} = f\left(x_t\right). \quad (1)$$

Здесь x_t – численность рыбы в год t. Естественно полагать $f(0) = 0$ с условием, что функция воспроизводства f является положительной и одновременно гладкой функцией. Рассмотрим типичные варианты таких моделей.

[1]*Федеральный исследовательский центр Южный Научный Центр Российской Академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*

**E-mail: matishov_ssc-ras@ssc-ras.ru*

***E-mail: vitaly369@yandex.ru*

Монотонная модель. Считаем, что функция $f(x)$ строго возрастает и строго вогнута вверх. В таких моделях процессы гибели и размножения сбаласированны при любых x. Кроме того, выполняются условия:

1. $f'(0) > 1$ – сильный рост при малой численности;

2. $f(x)/x < 1$ – слабый рост при большой численности.

Например, данным ограничениям удовлетворяют функции $f(x) = 3 \cdot x/(1+x)$ и $f(x) = \ln(1+2x)$. Геометрически при малых x график f находится выше биссектриссы первого октанта, а при больших – ниже. Поэтому сразу устанавливаем следующее.

Свойство М-1. В модели (1) имеется единственное положительное и устойчивое равновесие (c).

Из монотонности f получаем: при $x_0 < c$ рекурсия (1) порождает возрастающую последовательность $\{x_t\}$, которая сходится к точке c. Аналогично, при $c < x_0$ находим: убывающая рекурсия $\{x_t\}$ стремится к той же точке c. Поэтому в такой модели (1) реализуется простая динамика.

Унимодальная модель, в которой правая часть $f(x)$ является “одногорбой”. Например, $f(x) = 4 \cdot x \cdot (1-x)$ для x из $[0,1]$. Здесь в точке $x = 1/2$ возникает горб, а другая точка $x = 3/4$ является неустойчивым равновесием. Такая ситуация свойственна популяциям, склонным к гиперпродукции. После вспышки численности наступает дефицит корма или самоотравления, а затем происходит падение численности. Тогда в зависимости от выбора начального значения x_0 реализуются разнообразные динамические режимы (периодические, апериодические и даже хаотические). Аналогично, горбатым является и график функции $f(x) = 23 \cdot x \cdot \exp(-x)$.

Теперь дополнительно учтем и ежегодный вылов рыбы (u_t), тогда прежняя модель (1) модифицируется к виду:

$$x_{t+1} = f\left(x_t - u_t\right). \tag{2}$$

Здесь естественно потребовать ограничение на вылов (= *допустимый* вылов): $0 \le u_t \le x_t$ для всех t.

Для оценки экономической эффективности определим так называемую *функцию полезности* (p) каждого вылова. Согласно стандартным экономическим представлениям, считаем: $p(0) = 0$, $p'(0) = 1$ и p является гладкой, монотонно возрастающей и вогнутой (= выпуклой вверх) функцией. Например, $p(u) = u/(1+u)$ или $p(u) = \ln(1+u)$. В простейшем случае $p(u) = c \cdot u$, где c – рыночная цена рыбы (полагаем $c = 1$). Рыночную цену иногда называют внешней ценой.

Разумеется, общий доход за все время промысла зависит от начального значения численности популяции (x_0) и определяется как супремум бесконечного ряда:

$$B\left(x_0\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot p\left(u_t\right) \to \sup \tag{3}$$

по всем допустимым $\{u_t\}$. Здесь через β обозначен так называемый коэффициент дисконтирования (= банковская ставка). При выборе β из диапазона (0,1) обеспечивается, как правило, сходимость ряда (3).

Теперь следует потребовать более сильное условие невымирания $f'(0) > 1/\beta$. В этом случае при $x > 0$ гарантируется выполнение $u(x) < x$. А при $f'(0) < 1/\beta$ ситуация не столь однозначная. В ряде случаев при малых x возможно $u(x) = x$.

Пусть задано начальное значение x_0. Тогда основная проблема долгосрочного промысла – это выбор бесконечного семейства управлений $\{u_t\}$, когда достигается цель (3). Здесь в духе теории динамического программирования [10] следует построить следующую последовательность “укороченных” сумм (3):

$$B_n\left(x_0\right) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t \cdot p\left(u_t\right). \tag{4}$$

И тогда имеет место основное рекурентное соотношение:

$$B_{n+1}(x) = \max[p(u) + \beta \cdot B_n(f(x-u)]$$
$$\text{по всем } u \text{ из } [0,x].$$

В работе [11] установлено, что при $n \to \infty$ предел такой последовательности существует и является “хорошей” функцией: непрерывно дифференцируема и монотонно возрастает. Данная предельная т.н. *функция Беллмана* (= суммарный доход) удовлетворяет ключевому соотношению

$$B\left(x\right) = \max\left[p\left(u\right) + \beta \cdot B\left(f\left(x-u\right)\right)\right]$$
$$\text{по всем } u \text{ из } [0,x]. \tag{5}$$

Дополнительно отметим: если $f(x)$ – вогнута, то и $B(x)$ – вогнута (рис. 1 а). Тогда $B'(x)$оказывается убывающей функцией (рис. 1 б). В экономике принято трактовать производную от дохода как (внутреннюю) цену рыбы, когда ее численность равна x. Справедливо естественное $B'(+0) = \infty$, т.е. при отсутствии рыбы ее цена равна бесконечности.

Далее, из правой части (5) следует, что оптимальный промысел u в (2) зависит только от x и никак не связан с переменной t. Это хорошее

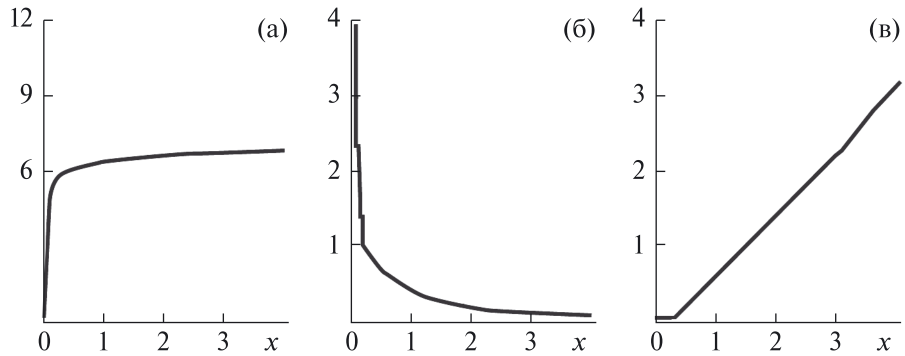

Рис. 1. Конкретный пример функции Беллмана (а), внутренней цены (б), оптимального вылова (в).

свойство реализуется только при оптимизации на бесконечный период промысла.

Напротив, если суммируется доход от промысла за конечный промежуток времени, то u может зависеть и от переменной времени. Здесь, разумеется, в последний год следует изымать всю популяцию. Это неэкологично, поэтому рассматривать бесконечный промысел предпочтительнее.

Функцию Беллмана $B(x)$ можно трактовать как своеобразную *глобальную* функцию полезности, а $p(u)$ – как *локальную* функцию полезности. Эти “полезности” взаимосвязаны.

Свойство Э-2. Для оптимального промысла $u = u(x) > 0$ выполняется соотношение:

$$B'(x) = p'(u) \tag{6}$$

Иными словами, при оптимальном вылове внутренняя цена должна совпадать со внешней. Далее, имеет место (рис. 1 в) следующее.

Свойство У-3. Оптимальный промысел $u(x)$ – неубывающая функция. При малых x оптимальный промысел u равен нулю, а затем монотонно возрастает.

Ниже такое критическое значение численности, при котором начинается реальный промысел, будем обозначать через N.

Далее выполняется важное свойство.

Свойство У-4. Функция $x - u(x)$ монотонно возрастает.

Иными словами, с ростом численности рыбы в водоеме промысел также возрастает, но медленнее. Несколько неожиданно, что найденные математическим образом свойства промысла оказались экологосберегающими.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ

Ниже будем опираться на простые геометрические представления с учетом прежних простых требований: $f(x)$ – монотонна, строго вогнута и слабо растет на бесконечности. Напомним, ранее такую модель называли монотонной.

Для упрощения изложения введем также вспомогательную функцию

$$g(x) = f\left[x - u(x)\right], \tag{7}$$

в которой $u(x)$ – оптимальный промысел в точке x. Теперь модель (2) равносильна следующей $x_{t+1} = g(x_t)$. На основе свойства У-4 находим: g – монотонно возрастает, и выполняются прежние свойства $g(0) = 0$ и $g'(0) = f'(0) > 1/\beta$. Здесь важную роль играют точки пересечения функции g с биссектрисой первого ортанта. Такие точки заведомо существуют, поскольку вблизи $x = 0$ график g располагается выше, а при больших x – ниже биссектрисы. Каждая возможная точка (c) такого пересечения удовлетворяет соотношению “равновесия” (π-равновесие) $g(c) = c$.

Замечательно, когда траектория стартует из π-равновесной точки c (т.е. $x_0 = c$), тогда возникает ситуация “самовоспроизведения”:

$$x_t = c \text{ и } u_t = u(c) \text{ для всех } t. \tag{8}$$

Здесь одновременно стабилизируются две последовательности $\{x_t\}$ и $\{u_t\}$.

Формально таких равновесий может быть много. Ситуацию проясняет [9].

Утверждение М-1. π-равновесие c единственно.

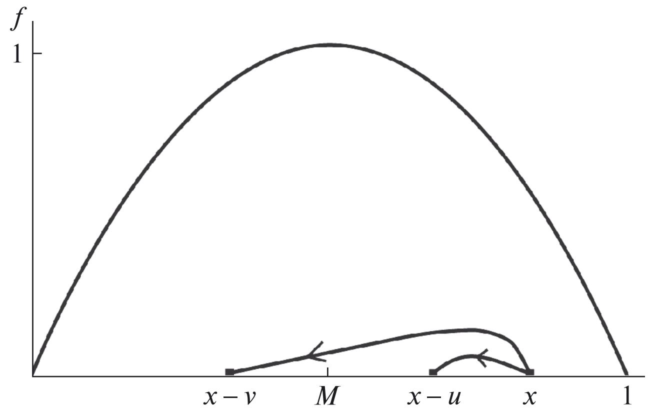

Рис. 2. Замена малого вылова *u* большим выловом *v*. Здесь $f(x-u) = f(x-v)$.

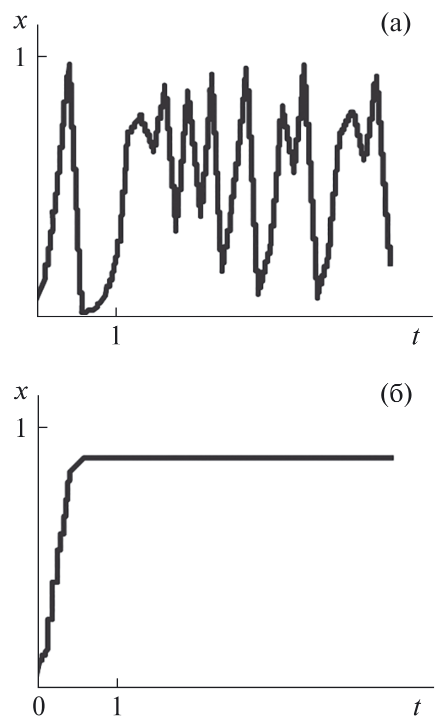

Рис. 3. Хаос в унимодальной модели $x_{t+1} = 4 \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$ (а); стабилизация при добавлении оптимального промысла (б).

Удивительно, но координата равновесной точки c никак не зависит от вида функции полезности p. Теперь совсем легко установить следующее.

Утверждение М-2. В монотонной модели (2)+(3) всякая положительная траектория стремится к π-равновесию c.

Действительно, в силу монотонности функции g при $x_0 < c$ последовательность $\{x_t\}$ монотонно возрастает и сходится к c. Аналогично при выборе $x_0 > c$ возникает убывающая последовательность, стремящаяся к прежнему равновесию.

Таким образом, с учетом свойства М-1 показано, что оптимальный промысел "не портит" исходную стационарную динамику численности популяции.

Ниже рассмотрим более сложный случай, когда $f(x)$ – унимодальная (= горбатая) функция и достигает своего максимума в точке M. Считаем, что в интервале $(0, M)$ данная трофическая функция вогнута. Например, $f(x) = 4 \cdot x \cdot (1 - x)$ или $f(x) = 23 \cdot x \cdot \exp(-x)$. Если последнюю зависимость [12] использовать в модели (2), то в ней возникают сложные режимы (хаотические и др.) [13]. Тем не менее имеет место следующее.

Утверждение М-3. В унимодальной модели (2)+(3) возникает устойчивый стационарный режим.

В самом деле, пусть задана начальная точка $x_0 > 0$. Обозначим через $\{u_0, u_1, u_2 ...\}$ последовательность оптимальных выловов, соответствующую траектории $\{x_0, x_1, x_2 ...\}$. Теперь обсудим возможное расположение точки $z = x_0 - u_0$ относительно точки M. Если $M < z$, то построим другой допустимый ряд выловов $\{v, u_1, u_2 ...\}$, в котором единственный новый элемент удовлетворяет условию $f(z) = f(x_0 - v)$. Тогда $x_1 = f(x_0 - v)$ и, значит, далее реализуется прежняя траектория. Самое главное, обязательно имеет место $v > u_0$, и поэтому доход для новой траектории будет больше. Это противоречит оптимальности прежней траектории. Значит, при $t = 0$ и, разумеется, для остальных моментов времени точка $(x_t - u_t)$ находится на участке $(0, M)$, на котором функция f вогнута и монотонна. Следовательно, согласно приведенному выше утверждению, должна возникать окончательная стабилизация динамики данной модели.

На рис. 3 приведен сравнительный анализ поведения до и после промысла c в модели со сложной динамикой при функции полезности $p(u) = u / (1 + u)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОМЫСЛЕ

Многие "беды" экологических систем происходят от гиперпродукции некоторых популяций. Наличие промысла формально смягчает процессы роста популяции. Оказывается, оптимальный промысел достаточно сильно снижает численность, чтобы полностью "убить" хаос. Для более глубокого понимания данного явления следует провести модельные исследования системного характера. Например, рассмотреть взаимодействие двух популяций со сложным поведением (см. примеры в [14]), которые подвержены промыслу (одновременно или по отдельности). Происходит ли в этих ситуациях стабилизация динамики численности всей системы или только ее отдельных компонент?

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания ЮНЦ РАН № 122011900153 9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *May R.M.* Biological populations obeying equations stable points, stable cycles and chaos // J. Theor. Biology. 1975. V. 51. № 2. P. 511–524.
2. *Фрисман Е.Я., Жданова О.А., Колбина Е.А.* Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделеевской лимитированной популяции // Генетика. 2010. Т. 46. № 2. С. 272–281.
3. *Clark C.W.* Bioeconomic modelling and fisheries management. New York: Wiley, 1985. 320 p.
4. *Tyutyunov Y., Arditi R., Buttiker B., Dombrovsky Y., Staub E.* Modelling fluctuations and optimal harvesting in perch populations // Ecological modeling. 1993. № 69. P. 19–42.
5. *Матишов Г.Г., Ильичев В.Г.* Об оптимальной эксплуатации водных ресурсов. Концепция внутренних цен // ДАН. 2006. Т. 406. № 2. С. 249–251.
6. *Il'ichev V.G., Rokhlin D.B.* Internal prices and Optimal Explotation of Natural Resources // Mathematics. 2022. V. 10. Article 1860. P. 1–14. https://doi.org/10.33390/math10111860
7. *Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П.* Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. М.: Наука, 1979. 165 с.
8. *Ильичев В.Г., Рохлин Д.Б., Угольницкий Г.А.* Об экономических механизмах управления биоресурсами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000. № 4. С. 104–110.
9. *Ильичев В.Г.* Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах. М.: Физматлит, 2009. 192 с.
10. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит. 1960. 400 с.
11. *Рохлин Д.Б.* Производная решения функционального уравнения Беллмана и цена биоресурсов // Сиб. журн. индустр. математики. 2000. Т. 3. № 1 (5). С. 169–181.
12. *Ricker W.E.* Stock and recruitment // J. Fish. Res. Board of Canada. 1954. V. 11. № 5. P. 569–623.
13. *Якобсон М.В.* О свойствах однопараметрического семейства динамических систем // УМН. 1976. Т. 3. № 2 (188). С. 239–240.
14. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

OPTIMAL HARVESTING VS. CHAOS IN POPULATION DYNAMICS

Academician of the RAS **G. G. Matishov**[a,#], **V. G. Il'ichev**[a,##]

[a] *Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*
[#] *E-mail: matishov_ssc-ras@ssc-ras.ru*
[##] *E-mail: vitaly369@yandex.ru*

The dynamics of fish populations, even for simple classes of reproduction functions, can be quite complex (up to the emergence of chaotic regimes). The problem arises: how will the population behavior change when optimal long-term fishing is imposed on it? Here the properties of the corresponding annual catch are defined and justified. On their basis, for the first time, an unexpected result was strictly substantiated: with optimal fishing, population dynamics are greatly simplified, and, in particular, chaos is transformed into a monotonous tendency of fish numbers to balance.

Keywords: population, fish, dynamics, abundance, annual catch, Bellman function, chaos, stable equilibrium