

## ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ / INSTRUMENTS AND METHODS OF EXPERIMENTAL PHYSICS

<https://doi.org/10.15507/2658-4123.035.202504.786-807>EDN: <https://elibrary.ru/zeixmj>

УДК / UDK 53:519.7

*Original article / Оригинальная статья*

### Численное исследование влияния направления вдува капель на поглощение частиц пыли

**А. Л. Тукмаков, Д. А. Тукмаков<sup>✉</sup>***Федеральный исследовательский центр**«Казанский научный центр Российской академии наук»,**г. Казань, Россия*<sup>✉</sup> [tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)**Аннотация**

**Введение.** Одной из наиболее эффективных технологий очистки газа от дисперсных примесей является жидкостная очистка, обусловленная неспособностью инерционных сепараторов улавливать мелкодисперсные частицы. В связи с этим возникает проблема повышения эффективности очистки газодисперсных сред указанным способом. Одним из направлений решения данной задачи является определение угла вдува капельных фракций, при котором процесс коагуляции будет наиболее результативным.

**Цель исследования.** Изучение влияния направления вдува струи капельных фракций на интенсивность процесса поглощения твердодисперсных частиц каплями жидкости.

**Материалы и методы.** Для описания течения многофазной среды применялась континуальная методика моделирования динамики неоднородных сред, в которой предполагалось решение полной гидродинамической системы уравнений движения для каждой из компонент смеси. Дисперсная фаза моделировалась как многофракционная полидисперсная, где фракции отличались плотностью материала и размером дисперсных включений. Учитывался межфазный теплообмен и обмен импульсом, включавший в себя силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс. Динамика несущей среды описывалась системой уравнений Навье – Стокса для вязкого, сжимаемого теплопроводного газа. Математическая модель учитывала столкновительную коагуляцию частиц различных фракций. Система уравнений математической модели дополнялась граничными условиями. Для интегрирования уравнений применялся явный конечно-разностный метод, для преодоления численных осцилляций – схема нелинейной коррекции.

**Результаты исследования.** Смоделирован вдув капельных фракций в поток запыленной под разными углами к стенке канала. Наиболее интенсивное убывание средней плотности пылевой фракции наблюдается для угла  $\varphi = \pi/2$ . Для углов вдува газокапельного потока  $\varphi$  и  $\pi - \varphi$  близки распределения объемных содержаний пылевой фракции. Для широкого диапазона размера капельных фракций наибольшая величина скоростного скольжения наблюдается при вдуве капельного потока перпендикулярно направлению потока запыленной среды.

© Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А., 2025

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License.  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

**Обсуждение и заключение.** Выявленные закономерности позволяют определить направление вдува капельных фракций, при котором происходит наиболее интенсивное поглощение твердодисперсных частиц. Полученные результаты представляют практическую ценность для задач оптимизации технологий жидкостной очистки газодисперсных сред. Установлено, что угол вдува может существенно повысить интенсивность коагуляции дисперсных включений различных фракций. В перспективе полученные данные могут быть использованы для увеличения эффективности работы газожидкостных фильтров.

**Ключевые слова:** промышленная экология, жидкостная очистка дисперсных сред, численное моделирование, коагуляция, многофазная среда, полидисперсная газовзвесь

**Финансирование:** Исследование выполнено в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук», 2025 г.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния направления вдува капель на поглощение частиц пыли. *Инженерные технологии и системы*. 2025;35(4):786–807. <https://doi.org/10.15507/2658-4123.035.202504.786-807>

## Numerical Study of the Influence of Droplet Injection Direction on Dust Particle Absorption

**A. L. Tukmakov, D. A. Tukmakov<sup>✉</sup>**

*Federal State Budgetary Institution of Science*

*“Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences”*

*Kazan, Russia*

<sup>✉</sup> [tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)

### *Abstract*

**Introduction.** One of the most effective technologies for removing dispersed impurities from gas is liquid purification, because inertial separators cannot capture fine particles. The challenge arises of increasing the efficiency of gas-dispersed media purification using this method. One way to solve this challenge is determining the injection angle of the droplet fractions at which the coagulation process will be most effective.

**Aim of the Study.** The aim of the academic work was to study the effect of the injection direction of the droplet fraction jet on the intensity of the absorption of solid particles by liquid droplets.

**Materials and Methods.** To describe the flow of a multiphase medium, there was used a continual approach for modeling the dynamics of inhomogeneous media, which involves solving a complete hydrodynamic system of motion equations for each mixture components. The dispersed phase was modeled as a multifractional polydisperse one; the dispersed phase fractions may differ in both the material density and the size of dispersed particles. There were taken into account interphase heat exchange and momentum exchange including the aerodynamic drag force, the dynamic Archimedes force, and the added mass force. The dynamics of the carrier medium was described by the Navier–Stokes system of equations for a viscous, compressible heat-conducting gas. The mathematical model also took into account the collisional coagulation of particles of different fractions. The system of the mathematical model equations was supplemented with boundary conditions. An explicit finite-difference method was used to integrate the equations of the mathematical model. A nonlinear correction scheme was used to overcome numerical oscillations.

**Results.** There was simulated the injection of droplet fractions into a dust-laden flow at various angles to the channel wall. It has been found that the most intense decrease in the average density of the dust fraction is observed for an angle of  $\varphi = \pi/2$ . For gas-droplet flow injection angles of  $\varphi$  and  $\pi - \varphi$ , the distributions of the volumetric contents of the dust fraction are similar. The calculations have shown that for a wide range of droplet fraction sizes the highest velocity slip is observed for droplet injection perpendicular to the direction of dust-laden flow.

**Discussion and Conclusion.** The identified patterns allow us to determine the injection direction of droplet fractions that maximizes the absorption of solid particles. The results can be used to optimize liquid purification technologies for gas-dispersed media. In the future, these results can be used to improve the efficiency of gas-liquid filters.

**Keywords:** industrial ecology, liquid purification of dispersed media, numerical simulation, coagulation, multiphase medium, polydisperse gas suspension

**Funding:** The work was carried out within the framework of the state assignment of the Federal Research Center of the Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2025.

**Conflict of interest:** The authors declare that there is no conflict of interest.

**For citation:** Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Numerical Study of the Influence of Drop-let Injection Direction on Dust Particle Absorption. *Engineering Technologies and Systems*. 2025;35(4):786–807. <https://doi.org/10.15507/2658-4123.035.202504.786-807>

## ВВЕДЕНИЕ

В существующих исследованиях процессов жидкостной очистки запыленных сред наблюдается пренебрежение свойствами сжимаемости несущей среды или учетом эффектов взаимодействия несущей среды и дисперсной фазы. Также при теоретическом изучении динамики коагулирующих дисперсных включений для упрощения модели процессы коагуляции могут рассматриваться отдельно от газодинамических. Новизна работы заключается в учете взаимообратных эффектов взаимодействия дисперсных включений и несущей среды при моделировании вдува капельных потоков в запыленную среду под различными углами к стенке канала. Актуальность исследования связана с тем, что выявление закономерностей параметра вдува капельных фракций на интенсивность коагуляции позволит оптимизировать технологии жидкостной очистки газодисперсных сред.

Целью работы является исследование влияния угла вдува газокапельных фракций –  $\varphi$  в диапазоне  $\pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6$  на интенсивность коагуляции газокапельных фракций и пылевой фракции.

В рамках реализации цели предполагается проведение вычислительных экспериментов, в которых вдув капельных фракций в поток запыленной среды проводится под разными углами.

## ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Различные промышленные технологии часто связаны с течениями неоднородных сред [1–3]. Неоднородные среды могут быть смесями различных газов или многофазными течениями, в которых компоненты смеси отличаются агрегатным состоянием. Теоретической основой для динамики неоднородных сред, моделирования многофазных течений служат фундаментальные исследования в этой области<sup>1</sup>. Разработаны континуальные методики описания таких систем, а также

<sup>1</sup> Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука; 1978. 336 с.

расчетные методы моделирования многофазных газожидкостных сред<sup>2</sup>. Проблемы математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах нашли отражение в ряде научных школ. Так, Новосибирские ученые рассмотрели теоретические аспекты и получили физические параметры ударных волн в газовзвесях<sup>3</sup>. Одномерные математические модели ударно-волновой динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред, разработанные А. Г. Кутушевым, а также ударно-волновые и детонационные течения металлических частиц в газе, исследованные А. В., Федоровым, В. М. Фоминым, Т. А. Хмель представляют комплексный подход к изучению многофазных сред<sup>4</sup>. А. Ю. Вараксин провел обзор и анализ теоретических и экспериментальных исследований потоков неоднородных газодисперсных сред, в частности, направленных на изучение взаимодействия газа и дисперсных частиц, где автор отмечает преимущество континуальных моделей при моделировании дисперсных потоков с большим объемным содержанием дисперсных частиц [2]. М. А. Пахомовым, В. И. Тереховым на основе численных методов проанализирован процесс распространения дисперсной примеси в трубе, а также рассмотрен теплообмен между фазами смеси [3]. С помощью физического моделирования исследовано влияние вдува на параметры течения газа с твердыми частицами и на скоростные параметры частиц различных размеров, предложено практическое применение выявленных физических закономерностей для защиты поверхностей от дисперсных потоков твердых частиц [4]. В рамках численного моделирования исследовано течение смеси газа и твердых частиц в канале с проницаемыми стенками и описаны процессы, происходящие в камере сгорания твердотопливного ракетного двигателя [5].

Проблемы математического моделирования эффективности скрубберов были рассмотрены в исследованиях, в которых предложен ряд методов повышения эффективности устройств [6]. В работе зарубежных ученых экспериментально изучено влияние коагуляции и седиментации на процесс очистки аэрозолей, образующихся при выбросе продуктов работы атомных электростанций в атмосферу [7]. В свою очередь А. А. Шрайбер, И. В. Фединчик и М. В. Протасов разработали модель динамики полидисперсной газовзвеси в скруббере Вентури с использованием физических упрощений в предположении одномерной геометрии и стационарного характера течения [8]. Учеными из Уральского горного университета были проведены исследования закономерностей динамики вращающихся капель жидкости, по результатам которых разработана математическая модель их циркуляционного движения в газовой среде [9]. На основе уравнения Буссинеска построена математическая модель движения пылевых частиц в аппарате жидкостной очистки, также разработаны критерии подобия физических экспериментов и процессов в реальных условиях шахт [10]. Результаты исследования влияния гидродинамических взаимодействий на скорость коагуляции частиц представлены в трудах авторов

<sup>2</sup> Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат; 1981. 472 с.

<sup>3</sup> Киселев С.П., Руев Г.А., Трунев А.П., Фомин В.М., Шавалеев М.Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука; 1992. 261с.

<sup>4</sup> Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург: Недра; 2003. 284 с.; Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газовзвесях частиц металлов. Новосибирск: Параллель; 2015. 301 с.

из США [11]. В расчетах предполагалась сферическая форма дисперсных включений. Процесс коагуляционного столкновения двух капель криогенной жидкости при низких температурах, а также двух капель воды при комнатных температурах при различных числах Рейнольдса и параметров удара был описан учеными из Китая, однако их математическая модель пренебрегала сжимаемостью среды [12]. В настоящее время разработана математическая модель потока многофазной среды при наличии процессов нуклеации, коагуляции и фазовых переходов, где для описания первого используется модель гомогенной нуклеации [13].

Математически смоделирован процесс жидкостной очистки запыленной среды в трубе Вентури, где за счет воздействия ультразвука происходит интенсификация процесса коагуляции, однако не учитывается воздействие дисперсной фазы на динамику несущей среды [14]. М. В. Тимофеева представила математическую модель процесса коагуляции капель нескольких фракций, отличающихся размером в технологии аэрохолодильного охлаждения без расчетов и моделирования газодинамических процессов несущей среды [15].

Китайскими учеными исследованы процессы столкновения и коагуляции дисперсных частиц, смоделированы процессы коагуляция капель воды, взвешенных в атмосфере [16]. Исследователи из Южной Африки провели расчеты рабочих режимов скруббера методами вычислительной гидродинамики; несущая среда описывалась ими полной гидродинамической системой уравнений, а для описания параметров дисперсной фазы решались обыкновенные дифференциальные уравнения относительно временной переменной с учетом параметров воздействия на дисперсные частицы со стороны несущей среды. Так, пренебрегались эффекты взаимообратного воздействия компонент смеси [17].

Австрийскими учеными разработана математическая модель расчетных соотношений процессов массопереноса в скрубберах, используемых в химической промышленности, без учета гидродинамических процессов [18].

Исследователи из Индии привели обзор публикаций, посвященных проблемам работы скрубберов, и проанализировали влияние различных гидродинамических параметров на эффективность работы этих устройств, отмечая важность вычислительной гидродинамики для оптимизации работы этих аппаратов [19].

В публикациях, посвященных динамике газовзвесей, исследуются различные вопросы, связанные с практическими приложениями. В частности, интерес к исследованию коагулирующих частиц связан с промышленной энергетикой и аэрокосмической техникой<sup>5</sup>. Актуальность исследования динамики коагуляции дисперсных сред обусловлена повышением производительности оборудования для очистки запыленных сред от дисперсных включений.

Анализ литературы демонстрирует, что при моделировании течений многофазных сред исследователи часто пренебрегают либо сжимаемостью несущей среды, либо межфазным взаимодействием. В ряде случаев течение описывается как стационарное течение с одномерной геометрией, при этом описание двухмерных эффектов важно при исследовании вдува капельных фракций поперек потока

<sup>5</sup> Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П., Худяков В.А. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: Методы расчета. М.: ВИНИТИ; 1971. 267 с.

запыленной среды. При моделировании процессов коагуляции в многофазных средах не учитывается межфазное взаимодействие или в целом рассматриваются процессы коагуляции без расчета газодинамических уравнений.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

На данный момент при описании неоднородных сред применяется несколько подходов: равновесный, предполагающий описание течения неоднородной среды как однородной с введением поправок на ее неоднородность<sup>6</sup>; диффузионный, наиболее подходящий для описания течений гомогенных смесей, имеющих одинаковое агрегатное состояние, например, смесей газов. В расчетах применялась компьютерная программа, реализующая численное решение для континуальной математической модели динамики многофазных сред. Дисперсная фаза предполагалась полидисперсной и многофракционной с учетом различных размеров дисперсных включений плотности и теплоемкости фракций дисперсной фазы [20]. Уравнения математической модели учитывали тепловое и скоростное взаимодействие фракций дисперсной фазы и несущей среды. Газовая фаза смеси описывалась системой уравнений Навье – Стокса с учетом теплообмена и обмена импульсом с фракциями дисперсной фазы [21–23]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \left( \left( 1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i \right) \rho_1 \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left( \left( 1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i \right) \rho_1 u_1 \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \left( 1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i \right) \rho_1 v_1 \right)}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy} \right) = - \sum_{i=2,n} F_{xi} + \sum_{i=2,n} \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \\
 & \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_1 u_1 v_1 - \tau_{yx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy} \right) = - \sum_{i=2,n} F_{yi} + \sum_{i=2,n} \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \\
 & \frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e_1 + p - \tau_{xx}] u_1 - \tau_{xy} v_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e_1 + p - \tau_{yy}] v_1 - \tau_{xy} u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) = \\
 & = \sum_{i=2,n} Q_i - \sum_{i=2,n} \left( |F_{xi}| (u_1 - u_i) - |F_{yi}| (v_1 - v_i) \right) + \sum_{i=2,n} \alpha_i \left( \frac{\partial (p u_i)}{\partial x} + \frac{\partial (p v_i)}{\partial y} \right), \quad (1) \\
 & \tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \\
 & \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y},
 \end{aligned}$$

где  $n$  – количество фракций,  $\alpha_i$  – объемное содержание  $i$ -ой фракции;  $\rho_1$  – средняя плотность газа, кг/м<sup>3</sup>;  $t$  – время, с;  $u_1$ ,  $v_1$  – декартовы составляющие скорости

<sup>6</sup> Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука; 1978. 336 с.

несущей среды, м/с;  $x$  – продольная координата, м;  $y$  – поперечная координата, м;  $p$  – давление, Па;  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yy}$  – составляющие тензора вязких напряжений, Па;  $F_{xi}$  и  $F_{yi}$  –  $x$  и  $y$  составляющие межфазного обмена импульсом  $i$ -ой фракции, кг/(м<sup>2</sup>·с<sup>2</sup>);  $e_i$  – полная энергия несущей среды, Дж;  $\lambda$  – теплопроводность газа, Вт/(м·К);  $T_1$  – температура несущей среды, К;  $Q_i$  – тепловой поток между  $i$ -ой фракцией и несущей средой, Дж/с;  $u_i$  – составляющая скорости  $i$ -ой фракции в  $x$  направлении м/с.;  $v_i$  – составляющая скорости  $i$ -ой фракции в  $y$  направлении м/с.;  $\mu$  – динамическая вязкость газа, Па·с;  $D$  – вспомогательная функция, с<sup>-1</sup>.

В работе предполагалось, что плотность несущей среды  $\rho_1$  определяется исходя из ее объемного содержания  $\alpha_1$  и физической плотности несущей среды  $\rho_{g0}$ :  $\rho_1(x, y) = \alpha_1(x, y)\rho_{g0}$ ,  $\rho_{g0}$  – начальная физическая плотность газа, кг/м<sup>3</sup>.

Для моделирования динамики  $i$ -ой фракции дисперсной фазы применялась полная система уравнений динамики сплошной среды [24; 25]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) = F_{xi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \\
 & \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) = F_{yi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \\
 & \frac{\partial(e_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i) = -Q_i, \\
 & \rho_i = \alpha_i \rho_{i0}, \quad e_i = \rho_i C_{vi} T_i, \\
 & F_{xi} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{d_i} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} (u_1 - u_i) + \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \\
 & + 0,5 \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right), \quad (2) \\
 & F_{yi} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{d_i} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} (v_1 - v_i) + \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \\
 & + 0,5 \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right), \\
 & C_{di} = \frac{24}{Re_{i1}} + \frac{4}{Re_{i1}^{0,5}} + 0,4, \quad M_{i1} = \frac{|\bar{V}_1 - \bar{V}_i|}{c}, \\
 & Re_{i1} = \frac{\rho_1 |\bar{V}_1 - \bar{V}_i| d_i}{\mu}, \quad Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda},
 \end{aligned}$$

$$Nu_i = 2 \exp(-M_{i1}) + 0,459 M_{i1}^{0,55} Pr^{0,33},$$

$$Q_i = Q_i = \frac{6\alpha_i \lambda Nu_i (T_1 - T_i)}{d_i^2}, i = 2, \dots, n,$$

где  $\rho_i$  – средняя плотность  $i$ -ой фракции дисперсной фазы,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $e_i$  – тепловая энергия  $i$ -ой фракции дисперсной фазы,  $\text{Дж}$ ;  $\rho_0$  – физическая плотность  $i$ -ой фракции дисперсной фазы,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $C_{vi}$  – теплоемкость материала  $i$ -ой фракции дисперсной фазы,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $T_1$  – температура несущей среды дисперсной фазы,  $\text{К}$ ;  $d_i$  – диаметр частицы  $i$ -ой фракции дисперсной фазы,  $\text{м}$ ;  $C_{di}$  – коэффициент сопротивления  $i$ -ой фракции дисперсной фазы;  $Re_{i1}$  – относительное число Рейнольдса  $i$ -ой фракции;  $M_{i1}$  – относительное число Маха  $i$ -ой фракции дисперсной фазы;  $V_1$  – вектор скорости несущей среды,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $V_i$  – вектор скорости  $i$ -ой фракции дисперсной фазы,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $c$  – скорость звука в  $\text{м}/\text{с}$ ;  $Pr$  – число Прандтля;  $C_p$  – теплоемкость,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $Nu_i$  – относительное число Нуссельта  $i$ -ой фракции дисперсной фазы.

Обмен импульсом  $i$ -ой фракции дисперсной и газовой фазы учитывал несколько различных сил: силу аэродинамического сопротивления  $F_{AD}$ , динамическую силу Архимеда  $F_{DA}$ , силу присоединенных масс  $F_{MA}$  в продольном и поперечном направлении соответственно  $x$  и  $y$ :

$$F_{ADxi} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{d_i} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} (u_1 - u_i),$$

$$F_{DAXi} = \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$F_{AMxi} = 0,5 \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right),$$

$$F_{ADyi} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_i}{d_i} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2} (v_1 - v_i),$$

$$F_{DAYi} = \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

$$F_{AMyi} = 0,5 \alpha_i \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right),$$

где  $F_{ADxi}$  –  $x$  составляющая силы аэродинамического сопротивления  $i$ -ой фракции,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$ ;  $F_{DAXi}$  –  $x$  составляющая динамической силы Архимеда  $i$ -ой фракции,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$ ;  $F_{AMxi}$  –  $x$  составляющая силы присоединенных масс  $i$ -ой фракции,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$ ;  $F_{ADyi}$  –  $y$  составляющая силы аэродинамического сопротивления  $i$ -ой фракции,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$ ;  $F_{DAYi}$  –  $y$  составляющая динамической силы Архимеда  $i$ -ой фракции,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$ ;  $F_{AMyi}$  –  $y$  составляющая силы присоединенных масс  $i$ -ой фракции,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2)$ .

Использовалась модель столкновительной коагуляции дисперсных включений, описанная В. Е. Алемасовым<sup>7</sup> [20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_i}{\partial t} &= \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} n_j m_j, \\ k_{ij} &= \frac{\pi}{4} (d_i + d_j)^2 \left[ u_i \cos(\theta) + v_i \sin(\theta) - \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \right], \quad \theta = \arctg \left( \frac{v_j}{u_j} \right). \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} &= -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} (u_j - u_i) m_j n_j, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} (v_j - v_i) m_j n_j, \\ T_{i*} &= \frac{1}{C_i m_{i*}} \left( \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} n_j C_j m_j T_j + C_i m_i T_i \right). \end{aligned}$$

где  $d$  – диаметр капли, м;  $m_i$  – масса частицы  $i$ -й фракции, кг;  $\rho_{i0}$  – средняя плотность фракции дисперсной фазы, кг;  $k_{ij}$  – константа коагуляции,  $\text{м}^2 \cdot \text{с}$ ;  $n_j$  – концентрация,  $\text{м}^{-3}$ ;  $m_j$  – масса  $j$ -ой фракции, кг;  $d_j$  – диаметр капли  $j$ -ой фракции, м;  $u_j$  –  $x$  составляющая скорости  $j$ -ой фракции, м/с;  $v_j$  –  $y$  составляющая скорости  $j$ -ой фракции, м/с;  $n_i$  – концентрация частиц  $i$ -й фракции,  $\text{м}^{-3}$ ;  $T_{i*}$  – температура частицы  $i$ -й фракции после коагуляции, К;  $C_{i*}$ ,  $C_j$ ,  $C_i$  – теплоемкость  $i$ -й фракции, Дж/(кг·К);  $m_{i*}$  – масса  $i$ -й фракции, кг;  $T_j$  – температура  $i$ -й фракции К.

Предполагается, что частицы  $i$ -й фракции поглощают все частицы меньших размеров, т. е. частицы фракций  $j = 2 \dots i-1$ .

Системы уравнений динамики полидисперсной газовзвеси (1) – (2) интегрировались конечно-разностным методом Мак-Кормака второго порядка точности<sup>8</sup>.

Рассмотрим применение численного алгоритма явного метода Мак-Кормака на примере скалярного нелинейного уравнения в частных производных (3):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial a(f)}{\partial y} = c(f). \quad (3)$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака для скалярного нелинейного уравнения (3) имеет вид (4)–(5):

$$f_{jk}^* = f_{jk}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j+1k}^n - a_{jk}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{jk+1}^n - b_{jk}^n) + \Delta t c_{j,k}^n, \quad (4)$$

$$f_{jk}^{n+1} = 0,5(f_{jk}^n + f_{jk}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{jk}^* - a_{j-1k}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{jk}^* - b_{jk-1}^*) + 0,5 \Delta t c_{j,k}^*, \quad (5)$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  – шаги по пространственному направлению,  $\Delta t$  – шаг по времени,  $b_{j,k+1}^n$ .

<sup>7</sup> Алемасов В.Е., Драгалин А.Ф., Тишин А.П., Худяков В.А. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: Методы расчета. М.: ВИНИТИ; 1971. 267 с.

<sup>8</sup> Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир; 1991. 551 с.

В явном методе Мак-Кормака в качестве условия устойчивости рассматривается условие устойчивости типа Куранта – Фридрихса – Леви<sup>9</sup>:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta h^2}{4v + (|u| + |v|)\Delta h}, \quad \Delta h = \min(\Delta x, \Delta y), \quad |u| = \max|u_i|, \quad |v| = \max|v_i|$$

Численные осцилляции преодолевались с помощью схемы нелинейной коррекции сеточной функции [26; 27]: если  $(\delta\tilde{u}_{j-1/2} \cdot \delta\tilde{u}_{j+1/2}) < 0$  или  $(\delta\tilde{u}_{j+1/2} \cdot \delta\tilde{u}_{j+3/2}) < 0$ ,  $f_j = \tilde{f}_j + k(\delta u_{j+1/2} - \delta u_{j-1/2})$ . Использованы обозначения:  $\delta\tilde{u}_{j-1/2} = \tilde{u}_j - \tilde{u}_{j-1}$ ,  $\delta\tilde{u}_{j+1/2} = \tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j$ ,  $\delta\tilde{u}_{j+3/2} = \tilde{u}_{j+2} - \tilde{u}_{j+1}$ , где  $\tilde{u}_j$  – значение функции после перехода на  $(n+1)$ -ый временной слой по схеме Мак-Кормака, коэффициент коррекции –  $k = 0,125$ .

Сопоставление численной модели с результатами физического эксперимента дало приемлемое соответствие [25].

В данной работе численно моделируется динамика газовзвесей в вязком сжимаемом теплопроводном газе.

Рассматривались углы вдува как по направлению течения пылевой фракции, так и случаи, когда потоки газокапельных фракций втекают против потока пылевой фракции.

В численных расчетах задавались следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_1(t, 1, j) &= u_0, \quad u_2(t, 1, j) = u_0, \quad u_k(t, 1, j) = u_k(t, 2, j), \quad v_k(t, 1, j) = 0, \\ u_k(t, N_x, j) &= 0, \quad v_k(t, N_x, j) = v_k(t, N_x - 1, j), \\ u_k(t, i, N_y) &= 0, \quad v_k(t, i, N_y) = 0, \quad u_k(t, i, 1) = 0, \quad v_k(t, i, 1) = 0, \\ u_k(t, i, 1) &= 0, \quad v_2(t, i, 1) = v_2(t, i, 2), \quad v_k(t, i, 1) = v_0, \\ \rho_1(t, 1, j) &= \rho_1(t, 2, j), \quad \rho_2(t, 1, j) = \rho_{20}\alpha_{20}, \quad \rho_k(t, 1, j) = \rho_k(t, 2, j), \\ \rho_k(t, N_x, j) &= \rho_k(t, N_x - 1, j), \quad \rho_1(t, i, 1) = \rho_1(t, i, 2), \quad \rho_k(t, i, 1) = \rho_k(t, i, 2), \\ \rho_1(t, i, N_y) &= \rho_1(t, i, N_y - 1), \quad \rho_k(t, i, N_y) = \rho_k(t, i, N_y - 1), \\ e_1(t, 1, j) &= e_1(t, 2, j), \quad e_k(t, 1, j) = e_k(t, 2, j), \\ e_1(t, N_x, j) &= e_1(t, N_x - 1, j), \quad e_k(t, N_x, j) = e_k(t, N_x - 1, j), \\ e_1(t, i, 1) &= e_1(t, i, 2), \quad e_k(t, i, 1) = e_k(t, i, 2), \\ e_1(t, i, N_y) &= e_1(t, i, N_y - 1), \quad e_k(t, i, N_y) = e_k(t, i, N_y - 1), \\ p(t, 1, j) &= p(t, 2, j), \quad p(t, N_x, j) = p(t, N_x - 1, j), \quad p(t, i, 1) = p(t, i, 2), \\ p(t, i, N_y) &= p(t, i, N_y - 1), \end{aligned}$$

где  $u_0$  – продольная скорость втекания запыленной среды в канал, м/с.

<sup>9</sup> Там же.

Границные условия на поверхности вдува описывают впрыск капельного потока под углом  $\phi$  к стенке канала:

$$\begin{aligned} L_1 &\leq i\Delta x \leq L_2 \\ \rho_1(t,i,1) &= \rho_1(t,i,2), \quad \rho_2(t,i,1) = \rho_2(t,i,2), \quad \rho_k(t,i,1) = \rho_{k0}, \\ u_1(t,i,1) &= v_0 \cos \phi, \quad u_k(t,i,1) = v_0 \cos \phi, \quad v_1(t,i,1) = v_0 \sin \phi, \quad v_k(t,i,1) = v_0 \sin \phi, \\ v_2(t,i,1) &= v_2(t,i,2), \quad p(t,i,1) = p(t,i,2), \end{aligned}$$

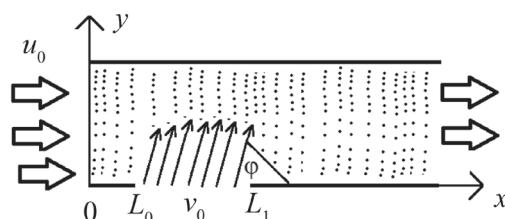
где  $v_0$  – поперечная скорость втекания капельных фракций через поверхность вдува, м/с.

Количество узлов и их нумерация в  $x$  и  $y$  направлениях –  $N_x = 200$ ,  $N_y = 100$ ,  $i, j$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

С целью определения влияние угла вдува капельных фракций на интенсивность коагуляции было проведено несколько вычислительных экспериментов по моделированию коагуляции пылевых частиц и капельных фракций с различными параметрами вдува капельных фракций.

На рисунке 1 схематично изображен моделируемый процесс вдува капельных фракций в поток запыленной среды. Газовая фаза смеси и пылевая фракция дисперсной фазы движутся в продольном направлении со скоростью  $u_0 = 20$  м/с. Четыре капельных фракции с разными размерами капель вдуваются через боковую поверхность. Капельные фракции вдуваются со скоростью  $v_0 = 4$  м/с под углом  $\phi$  к поверхности канала. Параметры физической области: длина канала  $L = 0,4$  м, ширина канала  $h = 0,1$  м,  $L_0 = 0,1$  м,  $L_1 = 0,2$  м.



Р и с. 1. Общая схема моделируемого процесса  
Fig. 1. General scheme of the simulated process

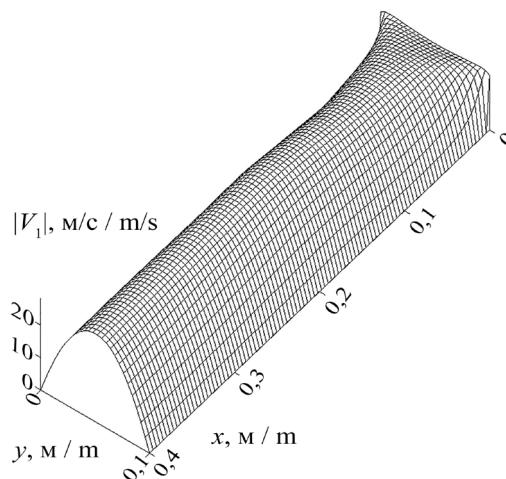
Источник: Рисунок 1 составлен авторами статьи.  
Source: figure 1 is compiled by the authors of the article.

Примечание:  $u_0$  – продольная скорость газа и пылевой фракции, м/с;  $v_0$  – продольная скорость поперечного вдува газа и капельных фракций, м/с;  $y$  – поперечная координата, м;  $x$  – продольная координата, м;  $L_0$  – правая продольная координата поверхности вдува, м;  $L_1$  – левая продольная координата поверхности вдува, м;  $\phi$  – угол вдува, радианы.

Note:  $u_0$  is the longitudinal velocity of gas and dust fraction;  $v_0$  is the longitudinal velocity of transverse injection of gas and droplet fractions;  $y$  is the transverse coordinate;  $x$  is the longitudinal coordinate;  $L_0$  is the right longitudinal coordinate of the injection surface;  $L_1$  is the left longitudinal coordinate of the injection surface;  $\phi$  is the injection angle.

Размеры ячеек вдоль продольной и поперечной координат соответственно  $\Delta x = 0,002$ ,  $\Delta y = 0,001$  м.

Численные расчеты вектора скорости несущей среды проводились в рамках решения системы уравнений Навье – Стокса с однородными граничными условиями Дирихле на стенках канала, для модуля скорости несущей среды  $|V_1| = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$  (рис. 2) можно наблюдать «параболический» ламинарный профиль течения вязкой среды в канале, при котором максимальные значения модуля скорости несущей среды достигаются вблизи оси симметрии канала<sup>10</sup>.



Р и с. 2. Модуль скорости несущей среды  
Fig. 2. Velocity modulus of the carrier medium

Источник: Рисунки 2, 3 составлены авторами статьи с помощью программы Surfer.  
Source: Figures 2 and 3 are made by the authors of the article using the program Surfer.

Примечание:  $|V_1|$  – модуль скорости несущей среды, м/с;  $x$  – продольная координата, м;  $y$  – поперечная координат, м.

Note:  $|V_1|$  is the velocity module of the carrier medium, m/c;  $x$  is the longitudinal coordinate, m;  $y$  is the transverse coordinate, m.

Пылевая фракция с размером частиц  $d_1 = 2$  мкм имеет физическую плотность материала частиц –  $\rho_{20} = 2\ 500$  кг/м<sup>3</sup>, начальное объемное содержание –  $\alpha_{20} = 0,00004$ . Через боковую поверхность канала втекают четыре капельных фракции с размерами частиц  $d_2 = 4$  мкм,  $d_3 = 8$  мкм,  $d_4 = 20$  мкм,  $d_5 = 40$  мкм и плотностью материала капель –  $\rho_{i0} = 1\ 000$  кг/м<sup>3</sup>. Предполагалось, что у всех четырех капельных фракций вблизи поверхности вдува одинаковое постоянное объемное содержание –  $\alpha_{i0} = 25 \cdot 10^{-6}$ ,  $i = 3, \dots, 6$ .

Численные расчеты демонстрируют, что в процессе движения многофракционной газовзвеси в канале за счет коагуляции частиц происходит поглощение пылевой фракции капельными фракциями (рис. 3).

<sup>10</sup> Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир; 1991. 551 с.

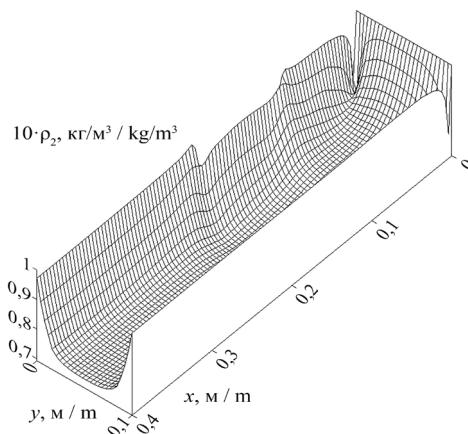


Рис. 3. Пространственное распределение средней плотности материала пылевой фракции  
 Fig. 3. Spatial distribution of the average density of the dust fraction material

На рисунке 4 представлено пространственное распределение средней плотности пылевой фракции вдоль оси  $x$  ( $y = h/2$ ), при различных углах вдува капельной фракции газовзвеси в поперечном распределении пылевой фракции. Наименьшее значение средней плотности достигается когда угол вдува составляет  $-\varphi = \pi/2$ :  $\rho_2 = 0,0695 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Для углов  $\varphi = \pi/6$  и  $\varphi = 5\pi/6$  величины средней плотности составляют  $-\rho_2 = 0,0714 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_2 = 0,0708 \text{ кг}/\text{м}^3$  соответственно. Для углов  $\varphi = \pi/4$  и  $\varphi = 3\pi/4$  величины средней плотности составляют  $-\rho_2 = 0,0707 \text{ кг}/\text{м}^3$  и  $\rho_2 = 0,0702 \text{ кг}/\text{м}^3$  соответственно. Для углов  $\varphi = \pi/3$  и  $\varphi = 2\pi/3$  величины средней плотности составляют  $-\rho_2 = 0,0701 \text{ кг}/\text{м}^3$  и  $\rho_2 = 0,0696 \text{ кг}/\text{м}^3$  соответственно. При втекании капельных фракций против движения потока средняя плотность запыленной среды уменьшается более интенсивно.

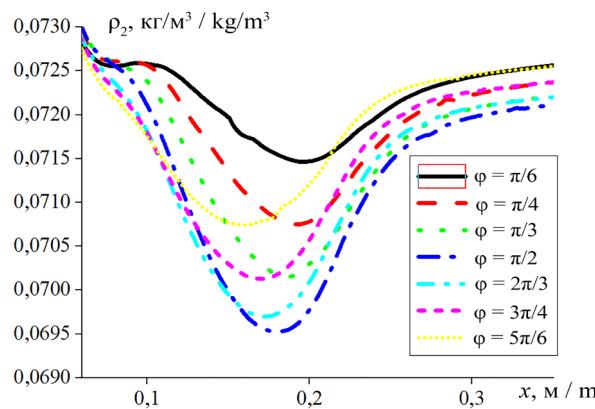
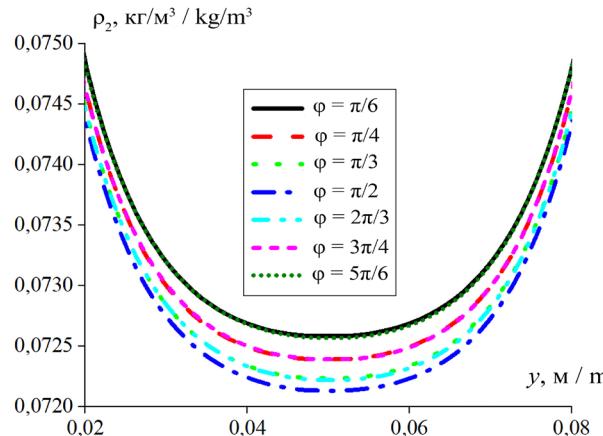


Рис. 4. Продольное распределение средней плотности материала пылевой фракции, в момент времени  $t = 0,0031 \text{ с}$

Fig. 4. Longitudinal distribution of the average density of the dust fraction material at  $t = 0,0031 \text{ s}$

Источник: графики для рисунков 2–10 построены авторами с помощью программы Origin 2022.  
 Source: The graphs for Figures 2–10 are compiled by the authors using the program Origin 2022.

На рисунке 5 показано распределение средней плотности пылевой фракции газовзвеси вдоль оси  $y$  ( $x = L/2$ ) канала при различных углах втекания капельных фракций, наименьшее значение средней плотности пылевой фракции наблюдается вблизи оси симметрии канала. Минимальное значение средней плотности достигается для угла  $\varphi = \pi/2$ . Значение средней плотности для углов  $\varphi$  и  $\pi - \varphi$  близки.



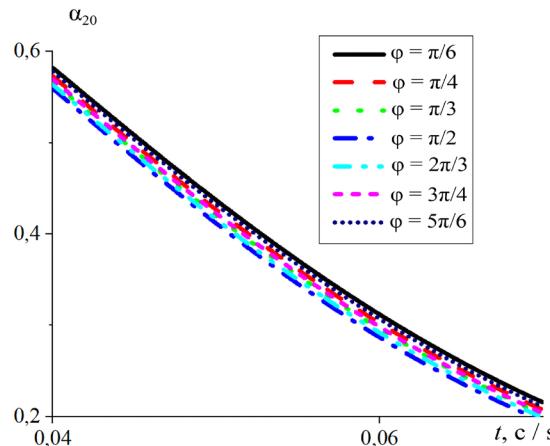
Р и с. 5. Поперечное распределение средней плотности материала пылевой фракции, момент времени  $t = 0,0031$  с

Fig. 5. Transverse distribution of the average density of the dust fraction material, time  $t = 0,0031$  s

На рисунке 6 представлен отрезок временной зависимости объемного содержания пылевой фракции в точке  $x = L/2, y = h/2$ . Наиболее интенсивно убывание объемного содержания пылевой фракции происходит, если угол между потоком пылевой фракции и втекающими капельными фракциями –  $\varphi = \pi/2$ , наименее интенсивно убывание происходит при втекании капельных фракций по направлению движения запыленного потока с углом –  $\varphi = \pi/6$ . В точке ( $x = 0,5h, y = 0,5L$ )  $\varphi = \pi/6 - \alpha_2 = 0,21625\alpha_{20}$ ,  $\varphi = \pi/4 - \alpha_2 = 0,2095\alpha_{20}$ ,  $\varphi = \pi/3 - \alpha_2 = 0,2035\alpha_{20}$ ,  $\varphi = \pi/2 - \alpha_2 = 0,2\alpha_{20}$ ,  $\varphi = 2\pi/3 - \alpha_2 = 0,2175\alpha_{20}$ ,  $\varphi = 3\pi/4 - \alpha_2 = 0,20475\alpha_{20}$ ,  $\varphi = 5\pi/6 - \alpha_2 = 0,21125\alpha_{20}$  в момент времени  $t = 0,07$  с. Интенсивность убывания объемного содержания пылевой фракции для углов  $\varphi$  и  $\pi - \varphi$  близки, но для случая тупого угла интенсивность убывания больше.

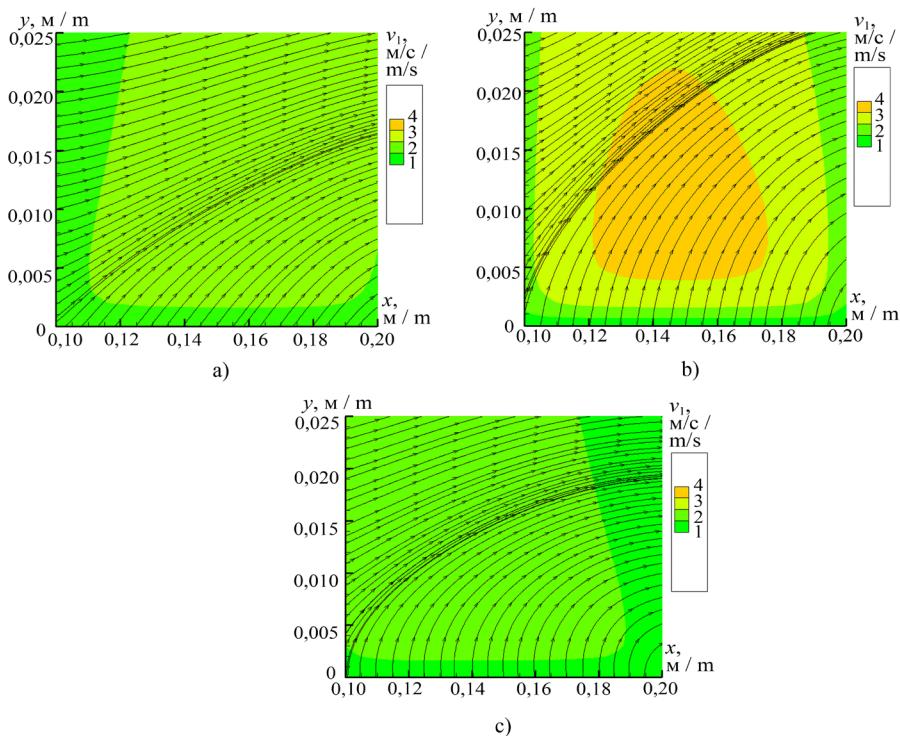
Результаты численных расчетов демонстрируют, что угол вдува газокапельной смеси –  $\varphi$  оказывает влияние на линии тока несущей среды. При остром угле вдува –  $\varphi = \pi/6$  (рис. 7 а), линии тока направлены по потоку, разворота линий тока не наблюдается. При этом за счет разности скоростей вдуваемого и основного потока происходит уменьшение скорости движения всей смеси. При вдуве газа под углом –  $\varphi = \pi/2$  (рис. 7 б) и тупым углом –  $\varphi = 5\pi/6$  (рис. 7 с) наблюдаются отличия линий тока газа. Для тупого угла (рис. 7 с) наблюдается разворот линий тока газа, при этом происходит уменьшение скорости движения несущей среды, связанное с тем, что вдув происходит против движения основного потока. Для углов вдува  $\varphi = \pi/6, \varphi = \pi/4, \varphi = \pi/3, \varphi = \pi/2, \varphi = 2\pi/3, \varphi = 3\pi/4, \varphi = 5\pi/6$  максимальные значения модуля скорости несущей среды –  $\max|V_1|$  в поперечном сечении  $x = L/2$ ,

момент времени  $t = 0,0031$  с соответственно –  $\max|V_1| = 25,5$  м/с,  $\max|V_1| = 26,5$  м/с,  $\max|V_1| = 27,3$  м/с,  $\max|V_1| = 28,22$  м/с,  $\max|V_1| = 27,93$  м/с,  $\max|V_1| = 27,3$  м/с,  $\max|V_1| = 26,5$  м/с соответственно.



Р и с. 6. Временная зависимость объемного содержания в точке  $x = L/2, y = h/2$

F i g. 6. Time dependence of volume content at point  $x = L/2, y = h/2$

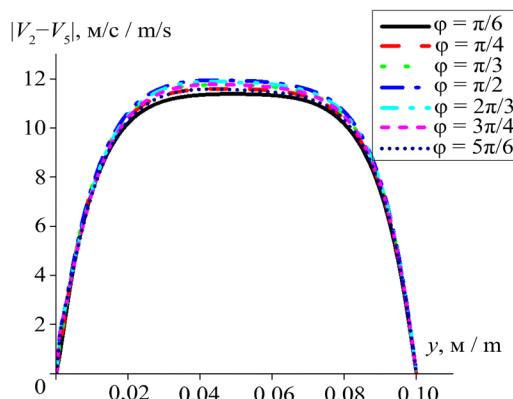


Р и с. 7. Линии тока несущей среды при вдуве капельных фракций:  
a) под углом  $\phi = \pi/6$ ; b) под углом  $\phi = \pi/2$ ; c) под углом  $\phi = 5\pi/6$

F i g. 7. Streamlines of the carrier medium during injection of droplet fractions:  
a) at an angle  $\phi = \pi/6$ ; b) at an angle  $\phi = \pi/2$ ; c) at an angle of  $\phi = 5\pi/6$

Максимальное значение модуля скорости несущей среды достигается для вдува капельных фракций поперек канала, угол вдува –  $\varphi = \pi/2$ .

Поперечные распределения модуля разности скоростей для пылевой фракции и капельной фракции с диаметром дисперсных включений  $d_4 = 20$  мкм (рис. 8) демонстрирует, что наибольшее значение модуля разности скорости пылевой фракции и фракции частиц с дисперсностью  $d = 20$  мкм достигается для угла вдува  $\varphi = \pi/2$ . При прочих углах втекания капельной фракции наблюдается меньшее значение скоростного скольжения.



Р и с. 8. Пространственное распределение вдоль оси  $y$  модуля разности скоростей фракций для различных углов вдува

F i g. 8. Spatial distribution along the  $y$ -axis of the difference in fraction velocities for different injection angles

В таблице представлены максимальные значения модуля разности скоростей пылевой фракции и капельных фракций для поперечного сечения при координате  $x = 0,5L$  для разных углов втекания капельных фракций.

Т а б л и ц а  
Т а б л е

**Влияние угла вдува капельных фракций на величину максимального скоростного скольжения пылевой фракции и различных капельных фракций**

**The influence of the injection angle of droplet fractions on the magnitude of the maximum velocity slip of the dust fraction and various droplet fractions**

Угол вдува, $\varphi$ / injection angle, $\varphi$	$\max V_3 - V_2 $ , м/с при $d_2 = 4$ мкм / $\max V_3 - V_2 $ , м/с at $d_2 = 4$ $\mu\text{m}$	$\max V_4 - V_2 $ , м/с при $d_3 = 8$ мкм / $\max V_4 - V_2 $ , м/с at $d_3 = 8$ $\mu\text{m}$	$\max V_5 - V_2 $ , м/с при $d_4 = 20$ мкм / $\max V_5 - V_2 $ , м/с at $d_4 = 20$ $\mu\text{m}$	$\max V_6 - V_2 $ , м/с при $d_5 = 40$ мкм / $\max V_6 - V_2 $ , м/с at $d_5 = 40$ $\mu\text{m}$
$\pi/6$	0,91	3,50	11,36	19,30
$\pi/4$	0,94	3,71	11,58	19,50
$\pi/3$	0,96	3,80	11,70	19,70
$\pi/2$	1,02	3,95	12,00	20,00
$2\pi/3$	0,97	3,85	11,88	19,85
$3\pi/4$	0,95	3,74	11,75	19,70
$5\pi/6$	0,92	3,55	11,50	19,50

Из таблицы следует, что наибольшее значение модуля разности скоростей пылевой фракции и капельных фракций различных размеров наблюдается для угла  $\varphi = \pi/2$ . Для углов  $\pi - \varphi$  ( $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$ ), когда вдув осуществляется против потока запыленной среды, интенсивность скоростного скольжения пылевой фракции и капельных фракций имеет большее значение, чем для углов  $\varphi$  ( $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$ ), вдува по направлению движения запыленной среды.

## ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена вопросам коагуляции многофракционной взвеси в потоке газа. Исследовалось влияние угла вдува капельных фракций на распределение средней плотности пылевой фракции. В отличие от известных в научной литературе результатов для описания процесса коагуляции применялась континуальная Эйлерова математическая модель. Проведены расчеты для углов вдува потока меньших и больших  $\pi/2$ . Выявлено, что угол вдува капельных фракций оказывает влияние на интенсивность коагуляции дисперсных включений. Наиболее интенсивное убывание средней плотности пылевой фракции наблюдается для угла  $\varphi = \pi/2$ . Для углов вдува газокапельного потока  $\varphi$  и  $\pi - \varphi$  распределения объемных содержаний пылевой фракции близки. Для вдува против потока  $\varphi > \pi/2$  интенсивность убывания объемного содержания пылевой фракции имеет большее значение, чем при вдуве по направлению потока  $-\varphi < \pi/2$ . Закономерность можно объяснить тем, что для капельных фракций, имеющих размеры большие, чем размеры дисперсных включений пылевой фракции, наибольшее значение скоростного скольжения с пылевой фракцией достигается для угла  $-\varphi = \pi/2$ . Минимизация остаточной концентрации может быть достигнута выбором направления вдува капельных фракций и исключением в спектре размеров фракций с малым скоростным скольжением относительно пылевой фракции. При этом играет роль также и концентрация распыляемых фракций. Таким образом, задача оптимизации является многофакторной. В данном исследовании рассматривается только выбор направления дисперсного капельного потока, при котором наблюдается повышенная интенсивность коагуляции пылевой и капельных фракций. В расчетах выявлено, что для широкого диапазона размера капельных фракций наибольшая величина скоростного скольжения наблюдается для вдува капельного потока перпендикулярно направлению потока запыленной среды. Ограничением модели является то, что в исследовании не учитывалось влияние турбулентной вязкости на динамику несущей среды и фракций дисперсной фазы, что имело бы значение для скоростных газодисперсных потоков. Полученные результаты можно использовать при оптимизации аппаратов жидкостной очистки запыленных сред.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Жалнин Р.В., Масягин В.Ф., Пескова Е.Е., Тишкин В.Ф. Моделирование дозвуковых многокомпонентных реагирующих газовых потоков на неструктурированных сетках. *Инженерные технологии и системы*. 2020;30(1):162–175. <https://doi.org/10.15507/2658-4123.030.202001.162-175>

2. Вараксин А.Ю. Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (обзор). *Теплофизика высоких температур*. 2020;58(4):646–669. <https://doi.org/10.31857/S004036442004016X>
3. Пахомов М.А., Терехов В.И. Распределение концентрации частиц в газокапельном ограниченном закрученном потоке. Эйлеров и Лагранжев подходы. *Теплофизика высоких температур*. 2020;58(6):896–900. <https://doi.org/10.31857/S0040364420060149>
4. Вараксин А.Ю., Протасов М.В. О влиянии вдува газа на защиту поверхностей тел, обтекаемых двухфазным потоком. *Теплофизика высоких температур*. 2017;55(6):785–788. <https://doi.org/10.7868/S0040364417060151>
5. Волков К.Н. Нестационарное турбулентное течение газовзвеси в канале при наличии вдува в условиях вынужденных колебаний давления. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013;54(2):65–80. URL: <https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=148528> (дата обращения: 15.02.2022).
6. Лаптев А.Г., Лаптева Е.А. Математическая модель и теплогидравлические характеристики насадочных скрубберов конденсационного охлаждения газа. *Инженерно-физический журнал*. 2022;95(1):259–266. URL: [http://www.itmo.by/publications/jeptber/bibl/?ELEMENT\\_ID=20274](http://www.itmo.by/publications/jeptber/bibl/?ELEMENT_ID=20274) (дата обращения: 22.02.2022).
7. Wu L., Lei S., Wang Y., Yang S., Lin X., Wang H. A Highly Efficient Biomass Compound Aerosol Suppressant in Purifying Radioactive Cesium Droplet Aerosols. *Molecules*. 2022;27(19):6480. <https://doi.org/10.3390/molecules27196480>
8. Шрайбер А.А., Фединчик И.В., Протасов М.В. О влиянии турбулентности газового потока на эффективность улавливания частиц в скруббере Вентури. *Теплофизика высоких температур*. 2015;53(1):85–90. <https://doi.org/10.7868/S0040364414060143>
9. Макаров В.Н., Угольников А.В., Макаров Н.В., Боярских Г.А. Повышение эффективности пылеулавливания. *Горный журнал*. 2022;(8):62–70. <https://doi.org/10.17580/gzh.2022.08.09>
10. Косарев Н.П., Макаров В.Н., Угольников А.В., Макаров Н.В., Дылдин Г.П. Шахтная аэрология пылевых аэрозолей в условиях гидровихревой коагуляции. *Известия Уральского государственного горного университета*. 2020;(4):155–165. <https://doi.org/10.21440/2307-2091-2020-4-155-165>
11. Suresh V., Liu Z., Perry Z., Gopalakrishnan R. Modeling Particle-Particle Binary Coagulation Rate Constants for Spherical Aerosol Particles at High Volume Fractions Using Langevin Dynamics Simulations. *Journal of Aerosol Science*. 2022;164:106001. <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2022.106001>
12. Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision Dynamics of Two Liquid Nitrogen Droplets Under a Low-Temperature Condition. *Cryogenics*. 2022;124:103478. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2022.103478>
13. Amanbaev T.R., Tilleuov G.E., Zuparbekova A. Mathematical Modeling of Dispersed Media Flows in the Presence of Nucleation, Coagulation and Phase Transitions. *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*. 2021;102(2):14–24. <https://doi.org/10.31489/2021ph2/14-24>
14. Хмелев В.Н., Шалунов А.В., Доровских Р.С., Нестеров В.А., Голых Р.Н. Моделирование процесса мокрой очистки газов с наложением ультразвуковых полей. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2017;(4):57–63. URL: <http://s-sibsb.ru/issues/53-2017-issues/issue-20/258-13> (дата обращения: 20.02.2022).
15. Тимофеева М.В. Влияние коагуляции капель воды на их распределение по размерам в рабочей части аэрохолодильной установки. *Журнал технической физики*. 2019;89(4):491–496. <https://doi.org/10.21883/JTF.2019.04.47301.11-18>
16. Wang L.P. Coagulation in Turbulent Particle-Laden Flows. *Modeling Approaches and Computational Methods for Particle-Laden Turbulent Flows*. 2023:111–145. <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-390133-8.00012-8>
17. Lerotholi L., Everson R.C., Hattingh B.B., Koech L., Roux I.L., Neomagus H.W.J.P. и др. Computational Fluid Dynamics Modeling and Analysis of Lime Slurry Drying in a Laboratory

- Spray Dry Scrubber. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2024;63(48):21038–21061  
URL: <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/acs.iecr.4c02014> (дата обращения: 20.02.2022).
18. Schläger M., Baumfrisch M., Haushofer G., Wolf-Zöllner V., Lehner M. Mass Transfer Model of Packed Seawater Scrubbers for Marine Exhaust Gas Cleaning. *Chemical Engineering Research and Design*. 2023;192:128–140. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2023.02.024>
19. Avinasilingam M., Gopalsamy S. Studies on Venturi Scrubber Performance and Efficiency-A Review. *Journal of Advanced Mechanical Sciences*. 2022;1(1):14–20. URL: <http://research.jamsjournal.com/index.php/jamsjournal/article/view/5> (дата обращения: 25.02.2022).
20. Тукмаков А.Л. Модель динамики дисперсных фракций во встречных потоках металлопорошка и полимера при образовании композитного материала. *Теплофизика высоких температур*. 2021;59(3):415–421. <https://doi.org/10.31857/S0040364421020125>
21. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Динамика заряженной газовзвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию. *Теплофизика высоких температур*. 2017;55(4):509–512. <https://doi.org/10.7868/S004036441703022X>
22. Tukmakov D.A. Numerical Investigation of the Influence of Properties of the Gas Component of a Suspension of Solid Particles on the Spreading of a Compressed Gas-Suspension Volume in a Binary Medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020;93(2):291–297. <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02120-9>
23. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовзвеси. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022;22(1):90–102. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102>
24. Tukmakov D.A. One-Dimensional Unsteady Numerical Model of Gas Suspension Flow Caused by Gravitational Sedimentation of Particles with a Constant Velocity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022;63(7):1218–1226. URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S0021894422070148> (дата обращения: 25.02.2022).
25. Tukmakov D.A. Numerical Simulation of Oscillations of Aerosol with a Low Dispersed Phase Concentration in a Closed Tube by the Continuum Mathematical Model. *Technical Physics*. 2022;67(2):764–770. <https://doi.org/10.1134/S1063784222110032>
26. Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа. *Математическое моделирование*. 1993;5(3):74–83. URL: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=1962&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=1962&option_lang=rus) (дата обращения: 26.02.2022).
27. Тукмаков А.Л. Возникновение синфазных колебаний тонких пластин при аэроупругом взаимодействии. *Прикладная механика и техническая физика*. 2003;44(1):77–82. URL: [https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=120006&ARTICLE\\_ID=121760](https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=120006&ARTICLE_ID=121760) (дата обращения: 26.02.2022).

## REFERENCES

1. Zhulin R.V., Masyagin V.F., Peskova E.E., Tishkin V.F. Modeling the Flow of Multicomponent Reactive Gas on Unstructured Grids. *Engineering Technologies and Systems*. 2020;30(1):162–175. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.15507/2658-4123.030.202001.162-175>
2. Varaksin A.Yu. [Two-Phase Flows with Solid Particles, Droplets, and Bubbles: Problems and Research Results (Review)]. *High Temperature*. 2020;58(4):646–669. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S004036442004016X>
3. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. [Particle Concentration Distribution in a Gas–Droplet Confined Swirling Flow: Euler and Lagrange Approaches]. *High Temperature*. 2020;58(6):896–900. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0040364420060149>
4. Varaksin A.Y., Protasov M.V. [The Effect of Gas Injection on the Protection of Body Surfaces Streamlined by a Two-Phase Flow]. *High Temperature*. 2017;55(6):785–788. (In Russ.) <https://doi.org/10.7868/S0040364417060151>

5. Volkov K.N. Unsteady Turbulent Flow of a Gas Suspension in a Channel Under Conditions of Injection And Forced Pressure Oscillations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2013;54(2):65–80. (In Russ., abstract in Eng.) Available at: <https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=148528> (accessed 15.02.2022).
6. Laptev A.G., Lapteva E.A. [Mathematical Model and Thermohydraulic Characteristics of Packed Scrubbers of Condensation Cooling of a Gas]. *Journal of Engineering Physics and Thermo-physics*. 2022;95(1):259–266. (In Russ.) Available at: [http://www.itmo.by/publications/jeptp/bibl/?ELEMENT\\_ID=20274](http://www.itmo.by/publications/jeptp/bibl/?ELEMENT_ID=20274) (accessed 22.02.2022).
7. Wu L., Lei S., Wang Y., Yang S., Lin X., Wang H. A Highly Efficient Biomass Compound Aerosol Suppressant in Purifying Radioactive Cesium Droplet Aerosols. *Molecules*. 2022;27(19):6480 <https://doi.org/10.3390/molecules27196480>
8. Shraiber A.A., Fedinichik I.V., Protasov M.V. [On Effect of Gas Flow Turbulence on the Efficiency of Particle Collection In a Venturi Scrubber]. *High Temperature*. 2015;53(1):85–90. (In Russ.) <https://doi.org/10.7868/S0040364414060143>
9. Makarov V.N., Ugolnikov A.V., Makarov N.V., Boyarskikh G.A. Dust Control Efficiency Improvement. *Gornyj Zhurnal*. 2022;(8):62–70. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.17580/gzh.2022.08.09>
10. Kosarev N.P., Makarov V.N., Ugolnikov A.V., Makarov N.V., Dyldin G.P. Mine Aerology of Dust Aerosols Under Conditions of Hydro-Vortex Coagulation. *News of the Ural State Mining University*. 2020;(4):155–165. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.21440/2307-2091-2020-4-155-165>
11. Suresh V., Liu Z., Perry Z., Gopalakrishnan R. Modeling Particle-Particle Binary Coagulation Rate Constants for Spherical Aerosol Particles at High Volume Fractions Using Langevin Dynamics Simulations. *Journal of Aerosol Science*. 2022;164:106001. <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2022.106001>
12. Zhou D., Liu X., Yang S., Hou Y., Zhong X. Collision Dynamics of Two Liquid Nitrogen Droplets Under a Low-Temperature Condition. *Cryogenics*. 2022;124:103478 <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2022.103478>
13. Amanbaev T.R., Tilleuov G.E., Zuparbekova A. Mathematical Modeling of Dispersed Media Flows in the Presence of Nucleation, Coagulation and Phase Transitions. *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*. 2021;102(2):14–24. <https://doi.org/10.31489/2021ph2/14-24>
14. Khmelev V.N., Shalunov A.V., Dorovskikh R.S., Nesterov V.A., Golykh R.N. Modeling of the Process of Wet Gas Cleaning with the Imposition of Ultrasonic Fields. *South-Siberian Scientific Bulletin*. 2017;(4):57–63. (In Russ., abstract in Eng.) Available at: <http://s-sibsb.ru/issues/53-2017-issues-issue-20/258-13> (accessed 20.02.2022).
15. Timofeeva M.V. The Effect of Coagulation of Water Droplets on their Size Distribution In the Operating Part of an Air-Cooler Device. *Technical Physics*. 2019;89(4):491–496. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.21883/JTF.2019.04.47301.11-18>
16. Wang L.P. Coagulation in Turbulent Particle-Laden Flows. *Modeling Approaches and Computational Methods for Particle-Laden Turbulent Flows*. 2023;111–145. <https://doi.org/10.1016/B978-0-32-390133-8.00012-8>
17. Lerotholi L., Everson R.C., Hattingh B.B., Koech L., Roux I.L., Neomagus H.W.J.P., et al. Computational Fluid Dynamics Modeling and Analysis of Lime Slurry Drying in a Laboratory Spray Dry Scrubber. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2024;63(48):21038–21061. Available at: <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/acs.iecr.4c02014> (accessed 20.02.2022).
18. Schläger M., Baumfrisch M., Haushofer G., Wolf-Zöllner V., Lehner M. Mass Transfer Model of Packed Seawater Scrubbers for Marine Exhaust Gas Cleaning. *Chemical Engineering Research and Design*. 2023;192:128–140. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2023.02.024>
19. Avinasilingam M., Gopalsamy S. Studies on Venturi Scrubber Performance and Efficiency-A Review. *Journal of Advanced Mechanical Sciences*. 2022;1(1):14–20. Available at: <http://research.jamsjournal.com/index.php/jamsjournal/article/view/5> (accessed 25.02.2022).

20. Tukmakov A.L. [Model of the Dynamics of Disperse Fractions in Counter Flows of a Metal Powder and Polymer in the Formation of a Composite Material]. *High temperature*. 2021;59(3):415–421. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0040364421020125>
21. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. [Dynamics of a Charged Gas Suspension with an Initial Spatially Nonuniform Distribution of the Average Dispersed Phase Density During the Transition to the Equilibrium State]. *High temperature*. 2017;55(4):509–512. (In Russ.) <https://doi.org/10.7868/S004036441703022X>
22. Tukmakov D.A. Numerical Investigation of the Influence of Properties of the Gas Component of a Suspension of Solid Particles on the Spreading of a Compressed Gas-Suspension Volume in a Binary Medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020;93(2):291–297. <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02120-9>
23. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Numerical Study of the Influence of the Parameters of Dispersed Particles on the Deposition of the Solid Phase of an Electrically Charged Polydisperse Gas Suspension. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022;22(1):90–102. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102>
24. Tukmakov D.A. One-Dimensional Unsteady Numerical Model of Gas Suspension Flow Caused by Gravitational Sedimentation of Particles with a Constant Velocity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022;63(7):1218–1226. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1134/S0021894422070148> (accessed 25.02.2022).
25. Tukmakov D.A. Numerical Simulation of Oscillations of Aerosol with a Low Dispersed Phase Concentration in a Closed Tube by the Continuum Mathematical Model. *Technical Physics*. 2022;67(2):764–770. <https://doi.org/10.1134/S1063784222110032>
26. Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. Application of Compact Difference Schemes to Investigation of Unstationary Gas Flows. *Matematicheskoe Modelirovaniye*. 1993; 5(3):74–83. (In Russ., abstract in Eng.) Available at: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paper\\_id=1962&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paper_id=1962&option_lang=rus) (accessed 26.02.2022).
27. Tukmakov A.L. [Origination of in-Phase Oscillations of thin Plates with Aeroelastic Interaction]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2003;44(1):77–82. (In Russ.) Available at: [https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=120006&ARTICLE\\_ID=121760](https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=120006&ARTICLE_ID=121760) (accessed 26.02.2022).

#### Об авторах

**Тукмаков Алексей Львович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник института механики и машиностроения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук», (420100, Российская Федерация, г. Казань, ул. Лобачевского д. 2), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8570-4140>, tukmakov@imm.knc.ru

**Тукмаков Дмитрий Алексеевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник института механики и машиностроения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук» (420100, Российская Федерация, г. Казань, ул. Лобачевского д. 2), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>, Researcher ID: K-6563-2014, Scopus ID: 55776164300, SPIN-код: 3556-8576, tukmakovda@imm.knc.ru

#### Вклад авторов:

А. Л. Тукмаков – разработка или проектирование методологии исследований, создание моделей.  
Д. А. Тукмаков – осуществление научно-исследовательского процесса, включая выполнение сбора данных; создание и подготовка рукописи: визуализация результатов исследования.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

*Поступила в редакцию 27.12.2024; поступила после рецензирования 16.06.2025;  
принята к публикации 11.08.2025*

*About the authors:*

**Aleksei L. Tukmakov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher of Institute of Mechanics and Engineering, Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences” (2 Lobachevsky St., Kazan 420100, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8570-4140>, tukmakov@imm.knc.ru

**Dmitry A. Tukmakov**, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher Fellow of Institute of Mechanics and Engineering, Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences” (2 Lobachevsky St., Kazan 420100, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>, Researcher ID: K-6563-2014, Scopus ID: 55776164300, SPIN-code: 3556-8576, tukmakovda@imm.knc.ru

*Authors contribution:*

A. L. Tukmakov – development or design of research methodology, creation of models.

D. A. Tukmakov – implementation of the research process, including data collection; creation and preparation of the manuscript; visualization of research results.

*All authors have read and approved the final manuscript.*

*Submitted 27.12.2024; revised 16.06.2025; accepted 11.08.2025*