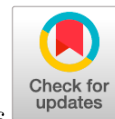




Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40

УДК 519.6



Дата: поступления статьи: 16.02.2023
после рецензирования: 22.03.2023
принятия статьи: 30.06.2023

К.А. Мушанкова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: karinamushankova@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6081-1169>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanovlv2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ВЛИЯНИЕ СЛАГАЕМЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ В РЕШЕНИИ, ОБОБЩАЮЩЕМ ПОДХОД М. УИЛЬЯМСА, УЧИТЫВАЮЩЕМ АНИЗОТРОПИЮ МАТЕРИАЛА¹

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена исследованию поля напряжений у вершины острой трещины в анизотропном материале с тремя взаимно ортогональными осями симметрии четвертого порядка (с кубической сингонией). Рассмотрен плоский случай, когда одна из осей симметрии ортогональна пластине, а оставшиеся две оси лежат в плоскости пластины. Приведен асимптотический анализ вклада высших приближений в обобщенном асимптотическом разложении механических полей вблизи вершины трещины в линейно-упругом анизотропном материале с кубической симметрией его упругих свойств. В статье на основании полученного решения Неджети с соавторами для бесконечной анизотропной пластины с центральной трещиной найдены и проанализированы угловые распределения составляющих тензора напряжений вблизи вершины острой трещины на различных расстояниях от кончика трещины, что позволяет оценить вклад неособых (регулярных) слагаемых в общее асимптотическое представление механических полей, генерированных острой трещиной. В работе Неджети проанализирован вклад исключительно Т-напряжений, тогда, как показано в настоящей статье, следующие за Т-напряжением слагаемые играют значимую роль в описании полей, индуцированных трещиной. Сравнение угловых зависимостей компонент тензора напряжений, построенных на различных расстояниях от вершины трещины, индикативно показывает, что с увеличением расстояния от вершины дефекта требуется сохранение в асимптотических рядах, представляющих напряжения, перемещения и деформации вблизи кончика разреза, слагаемых высокого порядка малости. Сохранение слагаемых высокого порядка малости может быть использовано для расширения области, в которой справедливо асимптотическое решение в рядах.

Ключевые слова: асимптотическое разложение; поля напряжений; кубическая сингония; слагаемые высокого порядка малости.

Цитирование. Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Влияние слагаемых высокого порядка малости в решении, обобщающем подход М. Уильямса, учитывающем анизотропию материала // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 30–40. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Мушанкова К.А., Степанова Л.В., 2023

Карина Артемовна Мушанкова — магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 21-11-00346).

Лариса Валентиновна Степанова — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Многопараметрический анализ полей напряжений является важным аспектом исследований в современной механике разрушения. Этим вопросам посвящается большое количество исследований [2–10]. В статье Неджети с соавторами [1] изучено напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины дефекта и приведено двучленное разложение механических полей. Авторы сфокусировали свое внимание на влиянии Т-напряжений, на целостное описание поля напряжений у вершины острой трещины. Однако научным сообществом принято представление о важной роли следующих за Т-напряжением слагаемых. Во многих статьях [2–10] было показано, что с увеличением расстояния от кончика дефекта эффект влияния высших приближений усиливается. Данная статья может рассматриваться продолжением работы Неджети и соавторов. В настоящей работе реализована попытка учесть высшие приближения в асимптотическом разложении механических полей, индуцированных трещиной в анизотропной пластине с кубической кристаллической решеткой.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о плоском напряженном состоянии $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ в пластине из анизотропного материала. Тогда обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — компоненты тензоров деформации и напряжений, S_{ij} — тензор податливости.

Зависимость деформации от смещения в плоскости описывается следующим соотношением, где u и v — смещения в направлениях x_1 и x_2 :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}. \quad (1.2)$$

Деформации удовлетворяют условию совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (1.3)$$

Представим напряжения через функции Эри:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.4)$$

Тогда, подставляя напряжения в уравнение совместности (1.3) и используя обобщенный закон Гука, заданный уравнением (1.1), получим следующее соотношение:

$$S_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} - 2S_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2S_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^3} + S_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0. \quad (1.5)$$

Для решения уравнения совместности используется общее решение в виде комплексного потенциала $\phi = \phi(z)$ с комплексной переменной $z = x_1 + \mu x_2$. Подставляя это общее решение в уравнение (1.5), получим характеристическое уравнение:

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0 \quad (1.6)$$

Получившееся уравнение определяет зависимость решения от материальных констант. Корни этого характеристического уравнения показывают влияние упругой анизотропии на решение плоской задачи теории упругости.

В данной статье будем опираться на результаты молекулярно-динамического исследования свойств материала, проведенного в пакете LAMMPS. В статье [11] были получены значения упругих модулей

для материалов с кубической сингонией. Воспользуемся тензором упругих модулей ГЦК-меди, описанной потенциалом погруженного атома:

$$\begin{pmatrix} 162 & 115 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 115 & 162 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 115 & 115 & 162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где значения представлены в ГПа.

Для тензора упругих модулей (1.7) были получены следующие корни характеристического уравнения (1.6):

$$\mu_1 = 0.708728 + 0.705482i, \mu_2 = -0.708728 + 0.705482i, \mu_3 = \bar{\mu}_1, \mu_4 = \bar{\mu}_2. \quad (1.8)$$

Асимптотическое разложение полей напряжений, учитывающее анизотропию материала, подробно описанное в статье [1], имеет вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} &= 2Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ - \left(\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \right) \end{bmatrix} \right) + \\ &+ 2Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ - \left(\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \right) \end{bmatrix} \right), \quad (1.9) \end{aligned}$$

где A_n, B_n – амплитудные множители поля напряжений.

Приведем амплитудные множители в случае бесконечной анизотропной пластины с центральной трещиной, подвергнутой одноосному нагружению:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin^2 \alpha, \quad B_1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$A_2 = \frac{\sigma}{2Im(\mu_1 + \mu_2)} [\cos^2 \alpha + Re(\mu_1 \mu_2) \sin^2 \alpha + \lambda Re(\mu_1 + \mu_2)], \quad B_2 = \frac{\sigma Re(\mu_1 + \mu_2)}{2Im(\mu_1 \mu_2)} [\sin \alpha \cos \alpha - \lambda],$$

$$A_3 = \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma \sin^2 \alpha, \quad B_3 = \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$A_{2n+2} = B_{2n+2} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin^2 \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n+2)} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin \alpha \cos \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n+2)} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где λ – константа, относящаяся к вращению тела как абсолютно твердого (исследование проводилось при $\lambda = 0$), α – угол наклона трещины, a – половина длины трещины, σ – прикладываемая к пластине нормальная нагрузка.

2. Результаты исследования

Проведем исследование при приложении к пластине одноосного нагружения $\sigma = 50$ ГПа на различных обезразмеренных половиной длины трещины $a = 20 \text{ \AA}$ расстояниях от вершины дефекта при угле

наклона $\alpha = 0$. Такие значения нагрузки и длины дефекта обусловлены дальнейшим направлением исследований, связанным со сравнением полей напряжений на наноскопическом уровне с представленным в статье Неджети и соавторов [1] аналитическим решением для анизотропных материалов.

Рассмотрим зависимости $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ от полярного угла θ при удержании различного количества слагаемых на безразмерных расстояниях $\frac{r}{a} = \bar{r} = 0.1, 0.5, 1.0, 1.25$. На рисунках 2.1–2.4 кривые, обозначенные цифрой 1, показывают распределение компонент тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при одночленном асимптотическом обобщенном разложении Уильямса, кривая 2 при двучленном разложении и так далее до 7 слагаемого. Также визуализируется разложение при удержании 50 слагаемых, которое мы будем считать точным решением поставленной задачи.

Помимо визуальной оценки найдем средние абсолютные и относительные погрешности. Для каждой компоненты тензора напряжений разобьем отрезок θ от $-\pi$ до π на 500 точек и определим средние отклонения от асимптотического разложения при удержании 50 слагаемых по следующим формулам:

$$\Delta_{\sigma_{ij}} = \frac{\sum_k |\sigma_{ij}^{k,n} - \sigma_{ij}^{k,50}|}{500}, \quad \delta_{\sigma_{ij}} = \frac{\sum_k |\sigma_{ij}^{k,n} - \sigma_{ij}^{k,50}| / |\sigma_{ij}^{k,50}|}{500} 100 \%, \quad (2.10)$$

где $\sigma_{ij}^{k,n}$ – компонента тензора напряжений σ_{ij} при значении полярного угла $\theta = \theta_k$ при удержании в асимптотическом разложении n слагаемых.

В табл. 2.1 – 2.8 приведены средние абсолютные и относительные отклонения кривых $N = 1..7$ от кривой $N = 50$. По данным таблиц можно понять, что для достижения результата требуемой точности при большем удалении от вершины острой трещины необходимо учитывать большее количество регулярных слагаемых.

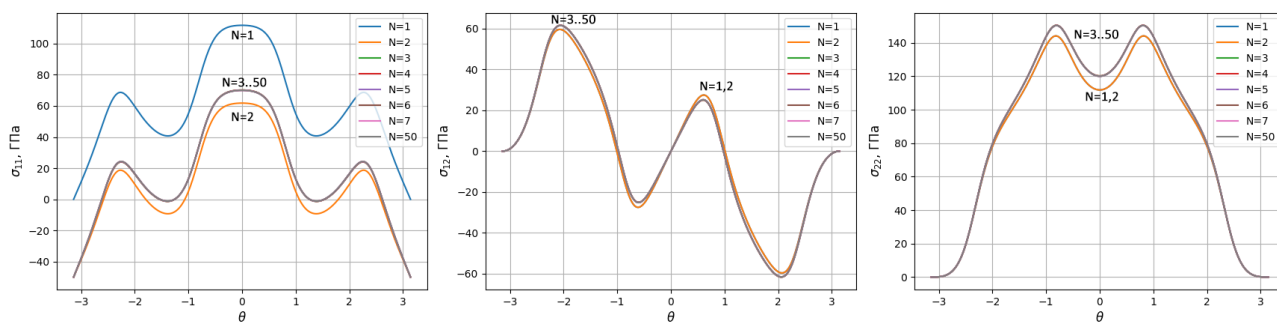


Рис. 2.1. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 0.1$

Fig.2.1. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 0.1$

Таблица 2.1

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.1

Table 2.1

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.1

Кол-во слагаемых	$\Delta_{\sigma_{11}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{12}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{22}}, \text{ ГПа}$
$n = 1$	43.66	1.80	3.52
$n = 2$	6.34	1.80	3.52
$n = 3$	0.14	0.10	0.07
$n = 4$	0.14	0.10	0.07
$n = 5$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-3}$
$n = 6$	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-3}$
$n = 7$	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2.2

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.1

Table 2.2

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.1

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}, \%$	$\delta_{\sigma_{12}}, \%$	$\delta_{\sigma_{22}}, \%$
$n = 1$	1891.76	14.92	3.59
$n = 2$	339.10	14.92	3.59
$n = 3$	5.67	1.21	0.47
$n = 4$	5.67	1.21	0.47
$n = 5$	0.05	0.02	0.01
$n = 6$	0.05	0.02	0.01
$n = 7$	$4.60 \cdot 10^{-4}$	$4.05 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$

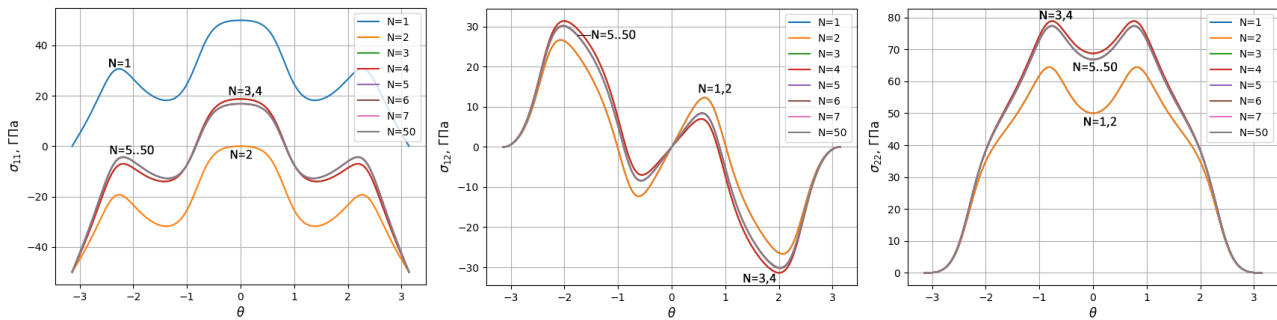


Рис. 2.2. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 0.5$

Fig.2.2. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 0.5$

Таблица 2.3

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.5

Table 2.3

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.5

Кол-во слагаемых	$\Delta_{\sigma_{11}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{12}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{22}}, \text{ ГПа}$
$n = 1$	35.21	3.11	7.27
$n = 2$	14.78	3.11	7.27
$n = 3$	1.55	1.13	0.77
$n = 4$	1.55	1.13	0.77
$n = 5$	0.07	0.07	0.07
$n = 6$	0.07	0.07	0.07
$n = 7$	$3.50 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$3.69 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2.4

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 0.5

Table 2.4

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 0.5

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}, \%$	$\delta_{\sigma_{12}}, \%$	$S_{\sigma_{22}}, \%$
$n = 1$	465.88	54.23	13.28
$n = 2$	230.14	54.23	13.28
$n = 3$	19.28	19.67	1.70
$n = 4$	19.28	19.67	1.70
$n = 5$	0.89	1.11	0.21
$n = 6$	0.89	1.11	0.21
$n = 7$	0.05	0.05	0.02

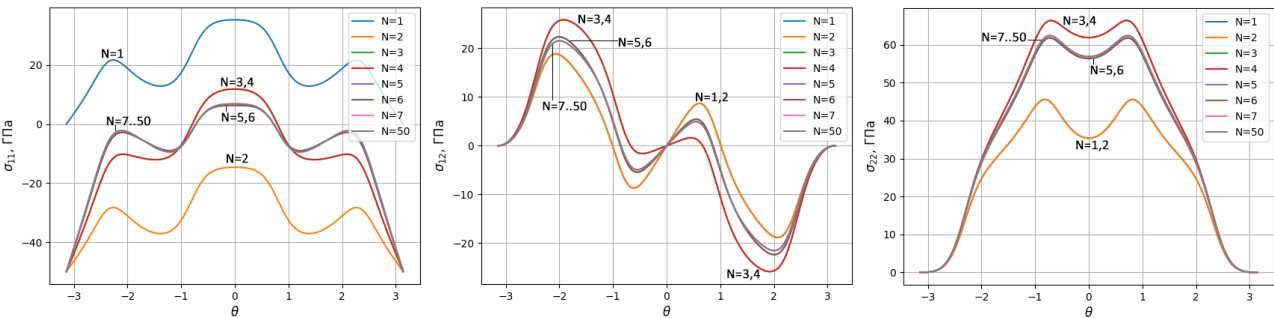


Рис. 2.3. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 1.0$

Fig.2.3. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 1.0$

Таблица 2.5

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.0

Table 2.5

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.0

Кол-во слагаемых	$\Delta_{\sigma_{11}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{12}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{22}}, \text{ ГПа}$
$n = 1$	27.90	2.72	9.37
$n = 2$	22.10	2.72	9.37
$n = 3$	4.47	3.28	2.01
$n = 4$	4.47	3.28	2.01
$n = 5$	0.41	0.41	0.39
$n = 6$	0.41	0.41	0.39
$n = 7$	0.04	0.04	0.04

Таблица 2.6

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.0

Table 2.6

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.0

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}, \%$	$\delta_{\sigma_{12}}, \%$	$\delta_{\sigma_{22}}, \%$
$n = 1$	1110.08	115.09	21.58
$n = 2$	998.25	115.09	21.58
$n = 3$	152.77	118.64	4.30
$n = 4$	152.77	118.64	4.30
$n = 5$	8.66	13.01	1.36
$n = 6$	8.66	13.01	1.36
$n = 7$	1.51	0.98	0.31

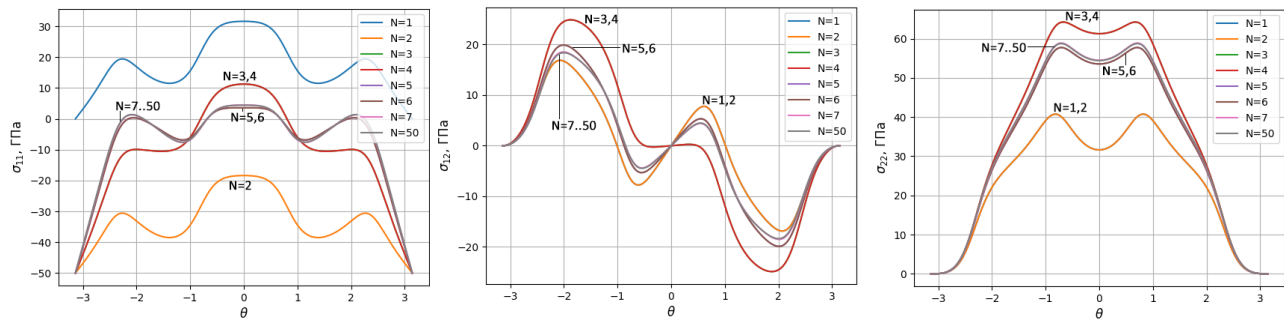


Рис. 2.4. Угловые распределения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ при удержании различного количества слагаемых в обобщенном асимптотическом решении на расстоянии $\bar{r} = 1.25$

Fig.2.4. Angular distributions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ for different numbers of terms in the generalized asymptotic solution at a distance $\bar{r} = 1.25$

Таблица 2.7

Средние абсолютные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.25

Table 2.7

Average absolute deviations of the asymptotic expansion of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.25

Кол-во слагаемых	$\Delta_{\sigma_{11}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{12}}, \text{ ГПа}$	$\Delta_{\sigma_{22}}, \text{ ГПа}$
$n = 1$	24.57	2.11	10.06
$n = 2$	25.42	2.11	10.06
$n = 3$	6.31	4.65	2.67
$n = 4$	6.31	4.65	2.67
$n = 5$	0.73	0.73	0.68
$n = 6$	0.73	0.73	0.68
$n = 7$	0.09	0.09	0.09

Таблица 2.8

Средние относительные отклонения асимптотических разложений компонент тензора напряжений, содержащих $n = 1..7$ слагаемых, от разложения при удержании $n = 50$ слагаемых на безразмерном расстоянии 1.25

Table 2.8

Average relative deviations of the asymptotic expansions of the tensor components of voltages containing $n = 1..7$ terms, from the expansion when holding $n = 50$ terms at dimensionless distance 1.25

Кол-во слагаемых	$\delta_{\sigma_{11}}$, %	$\delta_{\sigma_{12}}$, %	$\delta_{\sigma_{22}}$, %
$n = 1$	1535.34	76.01	25.03
$n = 2$	2424.37	76.01	25.03
$n = 3$	664.48	129.54	5.76
$n = 4$	664.48	129.54	5.76
$n = 5$	46.65	20.24	2.60
$n = 6$	46.65	20.24	2.60
$n = 7$	5.09	3.26	0.74

Выводы

По приведенным результатам видно, что при увеличении количества удерживаемых слагаемых высокого порядка малости уменьшаются абсолютные и относительные погрешности, а также при увеличении расстояния от кончика дефекта необходимо удерживать большее количество слагаемых в обобщенном асимптотическом разложении поля напряжений в окрестности вершины трещины для достижения необходимой точности. Данный анализ был проведен для понимания того, сколько слагаемых нужно удерживать в представленном аналитическом решении при сравнении его с результатами молекулярно-динамического моделирования полей напряжений пластины с центральной трещиной, что является дальнейшим направлением исследований.

Литература

- [1] Nejati M., Ghouli S., Aytollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 91. P. 837–862. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2022. Vol. 119. Article number 103298. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>.
- [3] Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2023. Vol. 30. Issue 19. Pp. 3862–3884. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>.
- [4] Rashidi Moghaddam M., Ayatollahi M., Berto F. The application of strain energy density criterion to fatigue crack growth behavior of cracked components // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2017. Vol. 97. Pp. 440–447. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.014>.
- [5] Razavi M.J., Aliha M.R.M., Berto F. Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimen // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2017. Vol. 97. Pp. 419–425. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.004>.
- [6] Lakshminpathy T., Steinmann P., Bitzek E. LEFM is agnostic to geometrical nonlinearities arising at atomistic crack tips // Forces in Mechanics. 2022. Vol. 9. Article number 100127. URL: <https://arxiv.org/pdf/2208.11462.pdf>.
- [7] Chandra S., Kumar N.N., Samal M.K., Chavan V.M., Patel R.J. Molecular dynamics simulation of crack growth behavior in Al in the presence of vacancies // Computational Materials Science. 2016. Vol. 117. Pp. 518–526. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.02.032>.
- [8] Andric P., Curtin W.A. New theory for Mode I crack-tip dislocation emission // Journal of Mechanics and Physics of Solids. 2017. Vol. 106. Pp. 315–337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.06.006>.
- [9] Gao Y.-J., Deng Q.-Q., Huang L.Ye, Wen Z.C., Luo Zhi-R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale // Computational Materials Science. 2017. Vol. 130. Pp. 64–75. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2017.01.003>.

- [10] Cui C.B., Beom H.G. Molecular dynamics simulation of edge cracks in copper and aluminium single crystals // Materials Science and Engineering: A. 2014. Vol. 609. Pp. 102–109. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.04.101>.
- [11] Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Молекулярно-динамическое моделирование полей напряжений в пластине с центральной трещиной из материалов с гранецентрированной кубической решеткой // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 4. С. 68–82. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-68-82>.
- [12] Хеллан К. Введение в механику разрушения / пер. с англ. Москва: Мир. 1988. 364 с. URL: <https://libcats.org/book/449703>.
- [13] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 100–101. Pp. 11–28. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40

Submitted: 16.02.2023

Revised: 22.03.2023

Accepted: 30.06.2023

K.A. Mushankova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: karinamushankova@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6081-1169>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanova1v2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

INFLUENCE OF HIGH-ORDER TERMS IN THE SOLUTION GENERALIZING THE APPROACH OF M. WILLIAMS, TAKING INTO ACCOUNT THE ANISOTROPY OF THE MATERIAL²

ABSTRACT

The research is devoted to the study of the stress field at the crack tip in an anisotropic material with three mutually orthogonal axes of symmetry of the fourth order (with cubic symmetry). A plane case is considered when one of the axes of symmetry is orthogonal to the cracked plate, and the remaining two axes lie in the plane of the plate. The paper presents an asymptotic analysis of the contribution of higher approximations in the generalized asymptotic decomposition of mechanical fields near the crack tip in a linearly elastic anisotropic material with cubic symmetry of its elastic properties. In the article, based on the obtained solution of M. Nejati and co-authors for an infinite anisotropic plate with a central crack, circumferential apportionments of the stress tensor components at the crack tip at various distances from the crack tip are constructed, which makes it possible to estimate the contribution of non-singular (regular) terms to the general asymptotic representation of mechanical fields generated by an acute crack. In the work of M. Nejati, the contribution of exclusively T-stresses is analyzed, then, as shown in this work, the terms following the T-stress play a significant role in describing the fields induced by the crack. A comparison of the angular distributions of the stress tensor components constructed at different distances from the crack tip indicates that with the increase of distances from the crack tip, it is required to preserve in asymptotic series representing stresses, displacements and strains near the tip of the crack, the terms of high order of smallness. The preservation of the terms of high order of smallness can be used to expand the domain in which the asymptotic solution in the series is valid.

Key words: asymptotic expansion; stress fields; cubic syngony; high-order terms.

Citation. Mushankova K.A., Stepanova L.V. Influence of high-order terms in the solution generalizing the approach of M. Williams, taking into account the anisotropy of the material. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 30–40. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40>.

²The work is carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant № 21-11-00346).

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Mushankova K.A., 2023

Karina A. Mushankova — Master of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Stepanova L.V., 2023

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Nejati M., Ghoul S., Aytollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 91, pp. 837–862. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, vol. 119, Article number 103298. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>.
- [3] Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, vol. 30, issue 19, pp. 3862–3884. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>.
- [4] Rashidi Moghaddam M., Ayatollahi M., Berto F. The application of Strain Energy Density criterion to fatigue crack growth behavior of cracked components. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017, vol. 97, pp. 440–447. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.014>.
- [5] Razavi M.J., Aliha M.R.M., Berto F. Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017, vol. 97, pp. 419–425. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.004>.
- [6] Lakshminpathy T., Steinmann P., Bitzek E. LEFM is agnostic to geometrical nonlinearities arising at atomistic crack tips. *Forces in Mechanics*, 2022, vol. 9, Article number 100127. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2208.11462.pdf>.
- [7] Chandra S., Kumar N.N., Samal M.K., Chavan V.M., Patel R.J. Molecular dynamics simulation of crack growth behavior in Al in the presence of vacancies. *Computational Materials Science*, 2016, vol. 117, pp. 518–526. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.02.032>.
- [8] Andric P., Curtin W.A. New Theory for Mode I Crack-tip Dislocation Emission. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2017, vol. 106, pp. 315–337. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.06.006>.
- [9] Gao Y.-J., Deng Q.-Q., Huang L.Ye, Wen Z.C., Luo Zhi -R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale. *Computational Materials Science*, 2017, vol. 130, pp. 64–75. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2017.01.003>.
- [10] Cui C.B., Beom H.G. Molecular dynamics simulation of edge cracks in copper and aluminium single crystals. *Materials Science and Engineering: A*, 2014, vol. 609, pp. 102–109. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.04.101>.
- [11] Mushankova K.A., Stepanova L.V. Molecular dynamic modeling of stress fields in plates with a central crack made of materials with a face-centered cubic lattice. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 68–82. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-68-82>. (In Russ.)
- [12] Hellan K. Introduction to fracture mechanics: Translated from English. Moscow: Mir, 1988, 364 p. Available at: <https://libcats.org/book/449703>. (In Russ.)
- [13] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 100–101, pp. 11–28. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.