Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 2 (2023). С. 289–305
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.53/.55
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305
EDN: TJWAKD

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

А. С. Кривошеев[1], **О. А. Кривошеева**[2]

[1] *Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия*
[2] *Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия*

Аннотация. В работе исследуются последовательности комплексных чисел первого порядка. Допускаются кратные члены у таких последовательностей. Рассматриваются также комплексные последовательности с конечной максимальной плотностью. Строятся специальные покрытия кратных множеств $\{\lambda_k, n_k\}$, состоящие из кругов с центрами в точках λ_k специальных радиусов. В частности, строятся покрытия, связные компоненты которых имеют относительно малый диаметр, а также покрытия, которые являются C_0-множествами. Эти покрытия выступают в роли исключительных множеств для целых функций экспоненциального типа. Вне этих множеств получено представление логарифма модуля целой функции. Ранее подобное представление было получено Б. Я. Левиным вне исключительного множества, относительно которого утверждается лишь его существование. В отличие от этого в данной работе приводится простое конструктивное построение исключительного множества. Построены базисы в инвариантном подпространстве аналитических функций в выпуклой области. Они состоят из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций (экспоненциальных мономов) оператора дифференцирования, разбитых на относительно малые группы.

Ключевые слова: ряд экспоненциальных мономов, выпуклая область, исключительное множество, индекс конденсации.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование второго автора выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Для цитирования: *А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева.* Исключительные множества// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 2. С. 289–305. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305

1. Введение

Пусть f — целая функция экспоненциального типа в комплексной плоскости, т. е.

$$\sigma_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r} < \infty, \qquad M_f(r) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|.$$

Другими словами, выполнено неравенство

$$\ln|f(z)| \leqslant A + B|z|, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Функция

$$h_f(\varphi) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

называется *индикатором* f. Говорят [15, гл. III], что f имеет *вполне регулярный рост*, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r\notin E, r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где $E \subset (0, +\infty)$ — множество нулевой относительной меры (E_0-множество), т. е.

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{mes}(E \cap (0, r))}{r} = 0$$

(символ mes обозначает лебегову меру множества).

Классический результат Б. Я. Левина [15, гл. II, теорема 2; гл. III, теорема 4] утверждает, что f имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда ее кратное нулевое множество $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является правильно распределенным. При этом выполнено равенство

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = rh_f(\varphi) + \alpha(r), \qquad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus B_f, \qquad \alpha(r)/r \to 0, \quad r \to +\infty, \tag{1.1}$$

где B_f — C_0-*множество*, т. е. может быть покрыто кругами $B(z_j, r_j)$, $j \geqslant 1$, такими, что

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{r} \sum_{|z_j|\leqslant r} r_j = 0.$$

Отметим, что в работе [5] доказывается, что эти круги могут быть непересекающимися. Автор книги [15] отмечает, что исключительное множество B_f строится неконструктивно. Доказывается лишь, что оно существует. В одном частном случае в [15] удается построить простое исключительное множество. С этой целью в книге [15] вводится понятие *регулярного множества* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Это простое (т. е. $n_k \equiv 1$) правильно распределенное множество, для которого круги специальных радиусов с центрами в точках λ_k попарно не пересекаются. В случае, когда Λ_f — регулярное множество, верно (1.1), где B_f является объединением указанных кругов.

В работе [14] вводится понятие *правильно сбалансированного кратного множества* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Это правильно распределенное множество с нулевым индексом конденсации S_Λ, который был введен в работе [6]. В [14] доказывается, что регулярное множество является частным случаем правильно сбалансированного множества. Более того, доказывается [14, теорема 4.5], что правильная сбалансированность множества Λ_f является необходимым и достаточным условием для того, чтобы в равенстве (1.1) исключительное множество B_f состояло из попарно непересекающихся кругов относительно малых радиусов.

Цель данной работы — конструктивное построение простого исключительного множества B_f, которое фигурирует в равенстве (1.1), в форме, удобной для его применения. Другой целью этой работы является конструктивное построение разбиения нулевого множества Λ_f на относительно малые группы так, чтобы групповой индекс конденсации $S_\Lambda(U)$, введенный в работах [9, 10], равнялся нулю. В работе [10] по всем таким разбиениям строится базис в инвариантном относительно оператора дифференцирования подпространстве аналитических функций в выпуклой области комплексной плоскости. При этом в [10] подобные разбиения не строятся, а лишь доказывается, что они существуют.

Во втором разделе данной работы строятся специальные покрытия кратных множеств $\{\lambda_k, n_k\}$, состоящие из кругов с центрами в точках λ_k специальных радиусов. В частности, строятся покрытия, связные компоненты которых имеют относительно малый диаметр, а также покрытия, которые являются C_0-множествами.

Третий раздел носит вспомогательный характер. В нем устанавливаются оценки снизу на модули специальных многочленов.

Основные результаты работы приведены в двух последних разделах. Здесь получена оценка (1.1) для функции вполне регулярного роста вне исключительных множеств B_f, построенных в предыдущем разделе (теоремы 4.1 и 4.2). Построены базисы в инвариантном подпространстве аналитических функций в выпуклой области. Они состоят из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций (экспоненциальных мономов) оператора дифференцирования, разбитых на относительно малые группы (теоремы 5.1 и 5.2).

2. Специальное покрытие

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $n(z, r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей n_k в круге $B(z, r)$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиуса $r > 0$. Положим $n(r, \Lambda) = n(0, r, \Lambda)$. *Верхней плотностью* последовательности Λ называется величина

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Говорят, что Λ имеет *плотность* $n(\Lambda)$ (измерима), если существует предел

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r} = n(\Lambda) < \infty.$$

Положим

$$\overline{n}_0(\Lambda,\delta) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}, \qquad \overline{n}_0(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to 0}\ \overline{n}_0(\Lambda,\delta).$$

Величина $\overline{n}_0(\Lambda)$ называется *максимальной плотностью* Λ. В силу [1, лемма 2.1] верны неравенства

$$\overline{n}(\Lambda) \leqslant \overline{n}_0(\Lambda,\delta) \leqslant \overline{n}_0(\Lambda), \qquad \delta \in (0,1). \tag{2.1}$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $h > 0$ и $\beta_k(h,\Lambda)$, $k \geqslant 1$, обозначает максимальное среди всех $p \in \mathbb{N}$, для которых верно равенство $n(\lambda_k, hp, \Lambda) = p$. Таким образом,

$$n(\lambda_k, \beta_k(h,\Lambda)h, \Lambda) = \beta_k(h,\Lambda), \qquad n(\lambda_k, hp, \Lambda) \neq p, \qquad p > \beta_k(h,\Lambda), \quad k \geqslant 1, \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность с конечной верхней плотностью $\overline{n}(\Lambda) = \tau$. Для всех $h \in (0, \tau^{-1})$ и $k \geqslant 1$ величина $\beta_k(h,\Lambda)$ корректно определена и*

$$n(\lambda_k, hp, \Lambda) < p, \quad p > \beta_k(h,\Lambda). \tag{2.3}$$

Если $h \in (0, ((\mu+1)\tau)^{-1})$, то существует номер $k(h)$ такой, что

$$\mu\beta_k(h,\Lambda)h \leqslant |\lambda_k|, \qquad k \geqslant k(h). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $h \in (0, \tau^{-1})$ и $k \geqslant 1$. Предположим, что для некоторой последовательности чисел p_j верны неравенства $n_k(hp_j, \Lambda) \geqslant p_j$, $j \geqslant 1$. Тогда

$$\tau = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r} \geqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{n(|\lambda_k| + hp_j, \Lambda)}{|\lambda_k| + hp_j} \geqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{n(\lambda_k, hp_j, \Lambda)}{|\lambda_k| + hp_j} \geqslant \frac{1}{h} > \tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, существует номер $\beta_k(h,\Lambda)$ такой, что

$$n(\lambda_k, hp, \Lambda) < p, \quad p > \beta_k(h,\Lambda), \qquad n(\lambda_k, \beta_k(h,\Lambda)h, \Lambda) \geqslant \beta_k(h,\Lambda). \tag{2.5}$$

Предположим, что $n(\lambda_k, \beta_k(h,\Lambda)h, \Lambda) > \beta_k(h,\Lambda)$. Тогда

$$n(\lambda_k, (\beta_k(h,\Lambda)+1)h, \Lambda) \geqslant n(\lambda_k, \beta_k(h,\Lambda)h, \Lambda) > \beta_k(h,\Lambda) \geqslant \beta_k(h,\Lambda) + 1.$$

Это противоречит (2.5). Следовательно, верно (2.2) и (2.3). Это означает, что величина $\beta_k(h,\Lambda)$ определена корректно. Пусть $h \in (0, ((\mu+1)\tau)^{-1})$. Согласно определению $\overline{n}(\Lambda)$ найдем номер $k(h)$ такой, что

$$\frac{\beta_k(h,\Lambda)}{|\lambda_k| + \beta_k(h,\Lambda)h} = \frac{n(|\lambda_k| + \beta_k(h,\Lambda)h, \Lambda)}{|\lambda_k| + \beta_k(h,\Lambda)h} \leqslant \frac{1}{(\mu+1)h}.$$

Отсюда получаем (2.4). Лемма доказана. ☐

Положим

$$\Omega(h,\Lambda) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\lambda_k, \beta_k(h,\Lambda)h),$$

и пусть $\Omega_s(h,\Lambda)$, $s \geqslant 1$, — все связные компоненты множества $\Omega(h,\Lambda)$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *— последовательность с конечной верхней плотностью* $\overline{n}(\Lambda) = \tau$ *и* $h \in (0, (4\tau)^{-1})$. *Множества* $\Omega_s(h, \Lambda)$ *ограничены и существуют номера* $k(s,p)$, $p = \overline{1, p_s}$, $s \geqslant 1$, *такие, что*

$$\Omega_s(h, \Lambda) \subset \bigcup_{p=1}^{p_s} B\left(\lambda_{k(s,p)}, 3\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h\right), \quad s \geqslant 1, \tag{2.6}$$

и круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h)$, $p = \overline{1, p_s}$, $s \geqslant 1$, *попарно не пересекаются. Кроме того,*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{d_s(h)}{\mu_s(h)} \leqslant 3\tau h, \tag{2.7}$$

где $d_s(h)$ *— диаметр множества* $\Omega_s(h, \Lambda)$ *и*

$$\mu_s(h) = \sup_{z \in \Omega_s(h,\Lambda)} |z|, \qquad s \geqslant 1.$$

Доказательство. Покажем вначале, что $\Omega_s(h, \Lambda)$ — ограниченное множество для всех $s \geqslant 1$. Для этого достаточно показать, что ограничены все связные компоненты множества

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h, |\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h).$$

Предположим, что это множество содержит неограниченную компоненту (r_1, ∞). Определим номера $k(l)$. Номер $k(1)$ найдем из условия

$$|\lambda_{k(1)}| + \beta_{k(1)}(h, \Lambda)h = \max\{|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h : |\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h = r_1\}.$$

Предположим, что такой выбор невозможен. Тогда найдутся натуральные числа k_j такие, что $|\lambda_{k_j}| - \beta_{k_j}(h)h \leqslant r_1 + 1$, $j \geqslant 1$. Отсюда согласно условию и определению $\beta_k(h, \Lambda)$ получаем:

$$\tau \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{n(|\lambda_{k_j}| + \beta_{k_j}(h, \Lambda)h, \Lambda)}{|\lambda_{k_j}| + \beta_{k_j}(h, \Lambda)h} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\beta_{k_j}(h, \Lambda)}{|\lambda_{k_j}| + \beta_{k_j}(h, \Lambda)h} \geqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\beta_{k_j}(h, \Lambda)}{r_1 + 1 + 2\beta_{k_j}(h, \Lambda)h} = \frac{1}{2h} > 2\tau. \tag{2.8}$$

Получили противоречие. Таким образом, номер $k(1)$ корректно определен. Далее, среди всех номеров k таких, что

$$|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h > |\lambda_{k(1)}| + \beta_{k(1)}(h, \Lambda)h > |\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h > r_1,$$

выберем номер $k(2)$, реализующий максимум величины $|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h$. Он существует по тем же соображениям, что и при получении неравенств (2.8). Определим по индукции номера $k(l)$ из условия

$$|\lambda_{k(l+1)}| + \beta_{k(l+1)}(h, \Lambda)h = \max\{|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h\},$$

где максимум берется по всем номерам k таким, что

$$|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h > |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h > |\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h \geqslant |\lambda_{k(l-1)}| + \beta_{k(l-1)}(h, \Lambda)h. \tag{2.9}$$

Как и выше, номер $k(l+1)$ корректно определен. Таким образом, верно равенство

$$(r_1, \infty) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \left(|\lambda_{k(l)}| - \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h, |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h\right).$$

В силу (2.9) и определения номера $k(l+1)$ имеем:

$$|\lambda_{k(l+1)}| + \beta_{k(l+1)}(h, \Lambda)h > |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h > |\lambda_{k(l+1)}| - \beta_{k(l+1)}(h, \Lambda)h >$$
$$> |\lambda_{k(l-1)}| + \beta_{k(l-1)}(h, \Lambda)h, \quad l > 1.$$

Последнее означает, что каждая точка множества (r_1, ∞) принадлежит не более чем двум из интервалов $(|\lambda_{k(l)}| - \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h, |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h)$, $l \geqslant 1$. Поэтому с учетом определения чисел $\beta_k(h, \Lambda)$ получаем:

$$\tau \geqslant \overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{n(|\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h, \Lambda)}{|\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \lambda)h} \geqslant \overline{\lim_{l\to\infty}} \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \beta_{k(j)}(h, \Lambda)\right) \left(2h \sum_{j=1}^{l} \beta_{k(j)}(h, \Lambda)\right)^{-1} = \frac{1}{4h} > \tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, все связные компоненты множества U ограничены. Это означает, что ограничены также множества $\Omega_s(h,\Lambda)$, $s \geqslant 1$.

Фиксируем $s \geqslant 1$. Определим точки $\lambda_{k(s,p)} \in \Omega_s(h,\Lambda)$, $p = \overline{1,p_s}$, такие, что верно (2.6) и круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h)$, $p = \overline{1,p_s}$, попарно не пересекаются. Пусть $\lambda_{k(s,1)}$ — одна из точек $\lambda_k \in \Omega_s(h,\Lambda)$, для которой верно равенство

$$\beta_{k(s,1)}(h,\Lambda) = \max_{\lambda_k \in \Omega_s(h,\Lambda)} \beta_k(h,\Lambda).$$

Поскольку $\Omega_s(h,\Lambda)$ — ограниченное множество, то такая точка существует. Предположим, что мы уже определили точки $\lambda_{k(s,p)}$, $p = \overline{1,p_s}$. Тогда в качестве точки $\lambda_{k(s,l+1)}$ берем любую из точек

$$\lambda_k \in \Omega_{s,l} = \Omega_s(h,\Lambda) \setminus \bigcup_{p=1}^{l} B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h),$$

для которой верно равенство

$$\beta_{k(s,l+1)}(h,\Lambda) = \max_{\lambda_k \in \Omega_{s,l}} \beta_k(h,\Lambda). \tag{2.10}$$

Таким образом, точки $\lambda_{k(s,p)} \in \Omega_s(h,\Lambda)$, $p = \overline{1,p_s}$, определены. По построению каждая точка $\lambda_k \in \Omega_s(h,\Lambda)$ принадлежит объединению кругов $B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h)$, $p = \overline{1,p_s}$. Пусть

$$\lambda_k \in B(\lambda_{k(s,l+1)}, 2\beta_{k(s,l+1)}(h,\Lambda)h) \setminus \bigcup_{p=1}^{l} B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h).$$

Тогда в силу (2.10) имеет место вложение

$$B(\lambda_k, \beta_k(h,\Lambda)h) \subset B(\lambda_{k(s,l+1)}, 3\beta_{k(s,l+1)}(h,\Lambda)h).$$

Поскольку

$$\Omega_s(h,\Lambda) = \bigcup_{\lambda_k \in \Omega_s(h,\Lambda)} B(\lambda_k, \beta_k(h,\Lambda)h), \tag{2.11}$$

то это дает нам (2.9). Таким образом,

$$\Omega(h,\Lambda) \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{p_s} B(\lambda_{k(s,p)}, 3\beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h).$$

Отметим, что

$$\lambda_{k(s,l+1)} \notin \bigcup_{p=1}^{l} B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h).$$

Кроме того, в силу (2.10) верны неравенства

$$\beta_{k(s,1)} \geqslant \beta_{k(s,2)} \geqslant \ldots \geqslant \beta_{k(s,p_s)}. \tag{2.12}$$

Поэтому круг $B(\lambda_{k(s,l+1)}, \beta_{k(s,l+1)}(h,\Lambda)h)$ не имеет общих точек с кругами $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h)$ для всех $p = \overline{1,l}$. Учитывая еще (2.10) и то, что множества $\Omega_s(h,\Lambda)$, $s \geqslant 1$, попарно не пересекаются, находим, что все круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h)$, $p = \overline{1,p_s}$, $s \geqslant 1$, попарно не пересекаются. Отсюда с учетом (2.6), (2.11) и (2.2) получаем:

$$\frac{d_s(h)}{\mu_s(h)} \leqslant \frac{1}{\mu_s(h)} \sum_{p=1}^{p_s} 3\beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h \leqslant \frac{3h}{\mu_s(h)} \sum_{p=1}^{p_s} n(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h,\Lambda)h) \leqslant \frac{3hn(\mu_s(h),\Lambda)}{\mu_s(h)}.$$

С учетом определения величины $\overline{n}(\Lambda)$ это дает нам (2.7). Лемма доказана. $\square$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) = \tau$ и $h \in (0, (4\tau)^{-1})$. По лемме 2.2 множества $\Omega_s(h,\Lambda)$ ограничены. В дальнейшем считаем, что

$$\mu_1(h) \leqslant \mu_2(h) \leqslant \ldots \leqslant \mu_s(h) \leqslant \ldots. \tag{2.13}$$

Лемма 2.3. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *— последовательность с конечной максимальной плотностью* $\overline{n}_0(\Lambda) = \tau$ *при порядке* $\rho(r) \equiv 1$. *Для каждого* $h \in (0, (6\tau)^{-1})$ *имеем:*

$$\frac{d_s(h)}{\mu_s(h)} \to 0, \qquad s \to \infty. \tag{2.14}$$

Доказательство. Покажем вначале, что

$$\frac{\beta_k(h,\Lambda)}{|\lambda_k|} \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{2.15}$$

Предположим, что это неверно. Тогда в силу (2.4) существуют число $\alpha > 0$ и номера $k(p)$, $p \geqslant 1$, такие, что

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\beta_{k(p)}(h,\Lambda)h}{|\lambda_{k(p)}|} = \alpha \leqslant \frac{1}{5}.$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \alpha)$ и

$$1 - \delta = \frac{1-\alpha-\varepsilon}{1+\alpha+\varepsilon}.$$

Тогда с учетом (2.2) получаем:

$$\overline{n}_0(\Lambda, \delta) \geqslant \varlimsup_{p\to\infty} \frac{n((1+\alpha+\varepsilon)|\lambda_{k(p)}|,\Lambda) - n((1-\alpha-\varepsilon)|\lambda_{k(p)}|,\Lambda)}{2(\alpha+\varepsilon)|\lambda_{k(p)}|} \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{p\to\infty} \frac{\beta_{k(p)}(h,\Lambda)h}{2(\alpha+\varepsilon)|\lambda_{k(p)}|} \geqslant \varlimsup_{p\to\infty} \frac{(\alpha-\varepsilon)|\lambda_{k(p)}|}{2h(\alpha+\varepsilon)|\lambda_{k(p)}|} = \frac{\alpha-\varepsilon}{2h(\alpha+\varepsilon)}.$$

Отсюда в силу (2.1), произвольности $\varepsilon \in (0, \alpha)$ и выбора числа h имеем:

$$\tau \geqslant \frac{1}{2h} > 3\tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, (2.15) верно.

Предположим теперь, что неверно (2.14). Тогда найдется последовательность номеров $s(j)$, точки $z_{s(j)}$, $w_{s(j)} \in \overline{\Omega_{s(j)}(h,\Lambda)}$ и число $\delta \in (0, 1/2)$ такие, что $|z_{s(j)}| = \mu_{s(j)}(h)$ и $|w_{s(j)} - z_{s(j)}| \geqslant (1-\delta)\mu_{s(j)}$, $j \geqslant 1$. В силу (2.9) проекции кругов

$$B(\lambda_{k(s(j),p)}, 3\beta_{k(s(j),p)}(h,\Lambda)h), \qquad p = \overline{1, p_{s(j)}}, \tag{2.16}$$

на прямую, проходящую через точки $z_{s(j)}$ и $w_{s(j)}$, покрывают отрезок $[z_{s(j)}, w_{s(j)}]$. Поэтому согласно (2.15) и определению числа $\mu_{s(j)}(h)$ для всех достаточно больших номеров j сумма радиусов всех кругов (2.16), лежащих в кольце $(1-2\delta)\mu_{s(j)} < |z| < \mu_{s(j)}$ не меньше, чем $\delta\mu_{s(j)}$. Таким образом,

$$\sum \beta_{k(s(j),p)}(h,\Lambda)h \geqslant \frac{\delta\mu_{s(j)}(h)}{3},$$

где сумма берется по всем указанным кругам. Поскольку круги $B(\lambda_{k(s(j),p)}, \beta_{k(s(j),p)}(h,\Lambda)h)$, $p = \overline{1, p_{s(j)}}$, попарно не пересекаются, то из предыдущего с учетом (2.2) получаем:

$$\overline{n}_0(\Lambda, 2\delta) \geqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{n(\mu_{s(j)}(h),\Lambda) - n((1-2\delta)\mu_{s(j)}(h),\Lambda)}{2\delta\mu_{s(j)}(h)} \geqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{\delta\mu_{s(j)}(h)}{6h\delta\mu_{s(j)}(h)} = \frac{1}{6h}.$$

Отсюда в силу (2.1), произвольности $\varepsilon \in (0, \alpha)$ и выбора числа h имеем:

$$\tau \geqslant \frac{1}{6h} > \tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, (2.14) верно. Лемма доказана. □

Лемма 2.4. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) = \tau$ *и* $2h \in (0, \tau^{-1})$. *Верно неравенство*

$$n(z, ph, \Lambda) < p, \qquad p \geqslant 1, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega(2h, \Lambda). \tag{2.17}$$

Доказательство. Предположим, что $n(z, ph, \Lambda) \geqslant p$. Выберем произвольную точку $\lambda_k \in B(z, ph)$. Верно вложение $B(z, ph) \subset B(\lambda_k, 2ph)$. Следовательно, $n(\lambda_k, p2h, \Lambda) \geqslant p$. Отсюда с учетом (2.3) получаем: $p \leqslant \beta_k(2h, \Lambda)$. Это означает, что $z \in B(\lambda_k, 2ph) \subset B(\lambda_k, 2\beta_k(2h,\Lambda)h) \subset \Omega(2h, \Lambda)$. Получили противоречие. Таким образом, (2.17) верно. Лемма доказана. □

Пусть $U = \{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ — разбиение последовательности $\{\lambda_k, n_k\}$ на конечные группы U_s. Точки λ_k, попавшие в группу U_s, будем обозначать $\lambda_{s,l}$, а их кратности — $n_{s,l}$. Первый индекс совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_s, где M_s — число точек λ_k, попавших в группу U_s. Будем считать, что $|\lambda_{s+1,1}| \geqslant |\lambda_{s,1}|$, $s \geqslant 1$. Разбиение $U = \{U_s\}$ будем называть *тривиальным*, если каждая группа U_s состоит из одной точки $\lambda_{s,1}$. Будем говорить, что U_s — группы *относительно малого диаметра*, если

$$\lim_{s\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_s} \frac{|\lambda_{s,j} - \lambda_{s,l}|}{|\lambda_{s,1}|} = 0. \tag{2.18}$$

Пусть N_s — число точек λ_k, попавших в U_s, с учетом их кратности. Будем также говорить, что группы U_s *относительно малы*, если они являются группами относительно малого диаметра и

$$N(\Lambda, U) = \lim_{s\to\infty} \frac{N_s}{|\lambda_{s,1}|} = 0.$$

Пусть $\overline{n}(\Lambda) = \tau$ и $h \in (0, (4\tau)^{-1})$. Символом $U(h) = \{U_s(h)\}$ обозначим разбиение $\{\lambda_k\}$ на группы, где $U_s(h)$ состоит из всех точек λ_k, принадлежащих $\Omega_s(h,\Lambda)$. По лемме 2.2 группы $U_s(h)$ ограничены. Пусть $N_s(h)$ — число точек λ_k, попавших в $U_s(h)$ с учетом их кратности.

Лемма 2.5. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}_0(\Lambda) = \tau$. Для каждого $h \in (0, (6\tau)^{-1})$ группы $U_s(h)$ относительно малы.*

Доказательство. В силу леммы 2.3 верно (2.18), т. е. $U_s(h)$ — группы относительно малого диаметра. Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\mu_{s(h)}}{|\lambda_{s,1}|} = 1$$

и для каждого $\delta \in (0,1)$ найдется номер $s(\delta)$ такой, что для всех $s \geqslant s(\delta)$ множество $\Omega_s(h,\Lambda)$ лежит в кольце $(1-\delta)\mu_s(h) < |z| < \mu_s(h)$. Следовательно, согласно (2.12) имеем:

$$\varlimsup_{s\to\infty} \frac{N_s(h)}{|\lambda_{s,1}|} \leqslant \delta \varlimsup_{s\to\infty} \frac{n(\mu_s(h),\Lambda) - n((1-\delta)\mu_s(h),\Lambda)}{\delta\mu_s(h)} \leqslant \tau\delta.$$

Так как $\delta \in (0,1)$ — любое, то $N(\Lambda, U) = 0$. Лемма доказана. □

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) = \tau$ и $h' \leqslant h \in (0, (4\tau)^{-1})$. Имеет место вложение

$$\Omega(h',\Lambda) \subset \Omega(h,\Lambda). \tag{2.19}$$

При этом для каждого $s \geqslant 1$ существует $j \geqslant 1$ такое, что $\Omega_s(h',\Lambda) \subset \Omega_j(h,\Lambda)$. Пусть $H = \{h_m\}$, $R = \{r_m\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{1}{6\tau} > h_1 \geqslant \ldots \geqslant h_m \to 0, \quad m\to\infty, \qquad \sum_{l=1}^{m} r_l h_l \leqslant r_{m+1}h_{m+1}, \quad m \geqslant 1. \tag{2.20}$$

Определим множества

$$\Omega_{m,l}(H,R,\Lambda), \qquad 1 \leqslant l \leqslant l(m), \quad m \geqslant 1. \tag{2.21}$$

В качестве $\Omega_{1,l}(H,R,\Lambda)$, $1 \leqslant l \leqslant l(1)$, возьмем все множества $\Omega_s(h_1,\Lambda)$, для которых верно неравенство $\mu_s(h_1) \leqslant R_1$. Предположим, что мы уже построили множества

$$\Omega_{j,l}(H,R,\Lambda), \qquad 1 \leqslant l \leqslant l(j), \qquad j = \overline{1, m-1}. \tag{2.22}$$

Тогда в качестве $\Omega_{m,l}(H,R,\Lambda)$, $1 \leqslant l \leqslant l(m)$, возьмем все множества $\Omega_s(h_m,\Lambda)$, для которых верно неравенство $\mu_s(h_m) \leqslant R_m$, и которые попарно не пересекаются с множествами из (2.22). Положим

$$\Omega(H,R,\Lambda) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{l(m)} \Omega_{m,l}(H,R,\Lambda). \tag{2.23}$$

По построению все множества из (2.21) являются связными и попарно не пересекаются. Таким образом, множества из (2.21) являются связными компонентами множества $\Omega(H,R,\Lambda)$. Из (2.19) следует, что

$$\bigcup_{\mu_s(h_m)\leqslant R_m} \Omega_s(h_m,\Lambda) \subset \Omega(H,R,\Lambda), \qquad p \geqslant 1. \tag{2.24}$$

Лемма 2.6. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *и* $\overline{n}(\Lambda) = \tau$. *Предположим, что* $H = \{h_m\}$ *и* $R = \{r_m\}$ *удовлетворяют соотношениям* (2.20). *Тогда* $\Omega(H, R, \Lambda)$ *является* C_0*-множеством.*

Доказательство. По построению с учетом (2.6) имеем:

$$\Omega(H, R, \Lambda) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\mu_s(h_m)\leqslant R_m} \bigcup_{p=1}^{p_s} B(\lambda_{k(s,p)}, 3\beta_{k(s,p)}(h_m, \Lambda)h_m).$$

Пусть $r_j < r \leqslant r_{j+1}$. По лемме 2.2 круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h_m, \Lambda)h_m)$, $p = \overline{1, p_s}$, $s \geqslant 1$, попарно не пересекаются. Поскольку Λ имеет конечную верхнюю плотность, то найдется $c > 0$ такое, что $n(r_m, \Lambda) \leqslant cr_m$, $m \geqslant 1$. Тогда с учетом (2.11), (2.2), (2.4) и (2.20) получаем:

$$\frac{3}{r}\left(\sum_{m=1}^{j} \sum_{\mu_s(h_m)\leqslant r_m} \sum_{p=1}^{p_s} \beta_{k(s,p)}(h_m, \Lambda)h_m + \sum_{|\lambda_{k(s,p)}|\leqslant r} \beta_{k(s,p)}(h_{j+1}, \Lambda)h_{j+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{r}\left(\sum_{m=1}^{j} n(r_m, \Lambda)h_m + n(2r, \Lambda)h_{j+1}\right) \leqslant \frac{3}{r}\left(\sum_{m=1}^{j} r_m h_m + 2rh_{j+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3c}{r}(2r_j h_j + 2rh_{j+1}) \leqslant 6c(h_j + h_{j+1}) \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Лемма доказана. □

3. Оценки снизу специальных многочленов

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\delta \in (0, 1)$ и $w \neq 0$. Положим

$$q_\Lambda(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k\in B(w,\,\delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}$$

и $q_\Lambda(z, w, \delta) = q_{\Lambda,V}(z, \delta)$, если $V = B(w, \delta|w|)$. В случае, когда круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной точки λ_k, полагаем $q_\Lambda(z, w, \delta) \equiv 1$. Нетрудно заметить, что верны неравенства:

$$\frac{|z - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \leqslant 1, \quad z, \lambda_k \in B(w, \delta|w|), \quad \delta \in (0, 1/3), \tag{3.1}$$

$$\frac{|z - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \geqslant 1, \quad z \in B(w, 5\delta|w|), \quad \lambda_k \in B(w, \delta|w|), \quad \delta \in (0, 1/3). \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) = \tau$, $2h \in (0, \tau^{-1})$, $\delta \in (0, 1/3)$, *и* $w \neq 0$. *Тогда*

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)| \geqslant n \ln \frac{nh}{18\delta(1 + \delta)|w|}, \quad z \in B(w, \delta|w|) \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad n = n(w, \delta|w|, \Lambda). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $z \in B(w, \delta|w|) \setminus \Omega(h, \Lambda)$ и $\xi_{k(1)}, \ldots, \xi_{k(n)}$ — все точки λ_k с учетом их кратностей n_k из круга $B(w, \delta|w|)$. При этом

$$|z - \xi_{k(n)}| \geqslant \ldots \geqslant |z - \xi_{k(j)}| \geqslant \ldots \geqslant |z - \xi_{k(1)}|.$$

В силу леммы 2.4 имеем:

$$|z - \xi_{k(j)}| \geqslant jh/2, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда получаем:

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)| \geqslant \ln\left|\prod_{j=1}^{n} \frac{jh}{6\delta(1 + \delta)|w|}\right| = \ln \frac{n!h^n}{(6\delta(1 + \delta)|w|)^n} \geqslant n \ln \frac{nh}{18\delta(1 + \delta)|w|}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) = \tau$, $2h \in (0, \tau^{-1})$. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta \in (0, 1/3)$ *такое, что*

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)| \geqslant -\varepsilon|w|, \quad z \in B(w, \delta|w|) \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad w \neq 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. В силу (3.3) имеем:

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)| \geqslant \frac{18\delta(1+\delta)}{h}|w|b, \quad b=\min_{x>0} x\ln x.$$

Отсюда получаем (3.4). Лемма доказана. □

Введем локальную характеристику последовательности $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$. Пусть Λ разбита на группы $U=\{U_s\}$. Положим

$$q^{s,l}_{\Lambda,U}(z,\delta)=\prod_{\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{s,l},\ \delta|\lambda_{s,l}|),\ k\neq s}\left(\frac{z-\lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|}\right)^{n_{k,v}}, \quad s\geqslant 1.$$

Если круг $B(\lambda_{s,l},\delta|\lambda_{s,l}|)$ не содержит точек $\lambda_{k,v}$, $k\neq s$, то $q^{s,l}_{\Lambda,U}(z,\delta)\equiv 1$. Для разбиения U определим *групповой индекс конденсации* (см. [9, 10])

$$S_\Lambda(U)=\lim_{\delta\to 0}S_\Lambda(U,\delta), \quad S_\Lambda(U,\delta)=\varliminf_{s\to\infty}\min_{1\leqslant l\leqslant M_s}\frac{\ln|q^{s,l}_{\Lambda,U}(\lambda_{s,l},\delta)|}{|\lambda_{s,l}|}.$$

В силу (3.1) функция $S_\Lambda(U,\delta)$ монотонна. Поэтому предел всегда существует. При этом верно неравенство $S_\Lambda(U)\leqslant 0$. В случае, когда разбиение U тривиально, $S_\Lambda(U)$ совпадает с индексом конденсации S_Λ, введеным в работе [6]. Индексы S_Λ и $S_\Lambda(U)$ играют важную роль при исследовании задач интерполяции и фундаментального принципа [6], представления функций из инвариантных подпространств [10], а также при решении задачи о распределении особых точек суммы ряда экспоненциальных мономов, расположенных на границе его области сходимости [12].

Лемма 3.3. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda)=\tau$, $h\in(0,(4\tau)^{-1})$. *Тогда* $S_\Lambda(U(h))=0$.

Доказательство. Пусть $s\geqslant 1$. Рассмотрим последовательность

$$\Lambda_s(h)=\{\lambda_{k,v},n_{k,v}\}_{1\leqslant v\leqslant M_k,\ k\neq s}.$$

Так как $\Omega_s(h,\Lambda)$ — связная компонента множества $\Omega(h,\Lambda)$, то верно равенство

$$\Omega(h,\Lambda_s(h))=\Omega(h,\Lambda)\setminus\Omega_s(h,\Lambda).$$

В силу (3.3) для каждого $l=\overline{1,M_s}$, $\lambda_{s,l}\neq 0$, имеем:

$$\ln|q^{s,l}_{\Lambda,U(h)}(\lambda_{s,l},\delta)|=\ln|q_{\Lambda_s(h)}(\lambda_{s,l},\delta)|\geqslant n\ln\frac{nh}{18\delta(1+\delta)|\lambda_{s,l}|}\geqslant\frac{18\delta(1+\delta)}{h}b|\lambda_{s,l}|,$$

$$n=n(\lambda_{s,l},\delta|\lambda_{s,l}|,\Lambda), \quad b=-1/e.$$

Отсюда получаем неравенство

$$S_\Lambda(U(h),\delta)\geqslant\frac{18\delta(1+\delta)}{h}b.$$

Следовательно, $S_\Lambda(U(h))\geqslant 0$. Поскольку всегда $S_\Lambda(U(h))\leqslant 0$, то $S_\Lambda(U(h))=0$. Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$, $\overline{n}_0(\Lambda)=\tau$. *Предположим, что* H, R *удовлетворяют* (2.20) *и*

$$r_m>\mu_m(h_1), \quad m\geqslant 1, \quad \varliminf_{m\to\infty}\frac{r_{m+1}}{r_m}>1, \quad \ln h_m\max_{s\geqslant m}\frac{N_s(h_1)}{\mu_s(h_1)}\to 0, \quad m\to\infty. \tag{3.5}$$

Тогда для каждого $\varepsilon>0$ *существуют* $\delta\in(0,1/3)$ *и* $t>0$ *такие, что*

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)|\geqslant-\varepsilon|w|, \quad z\in B(w,\delta|w|)\setminus\Omega(H,R,\Lambda), \quad |w|\geqslant t. \tag{3.6}$$

Доказательство. Предположим, что (3.6) неверно. Тогда для некоторого числа $\varepsilon>0$ существуют последовательности $\{w_p\}$, $\{z_p\}$ такие, что $z_p\in B(w_p,p^{-1}|w_p|)\setminus\Omega(H,R,\Lambda)$, $|w_p|\to\infty$,

$$\ln|q_\Lambda(z_p,w_p,p^{-1})|<-5\varepsilon|w_p|, \quad p>3. \tag{3.7}$$

Отсюда и из (3.1) следует, что

$$\ln|q_\Lambda(z_p,w_p,\delta)|<-4\varepsilon|w_p|, \quad \delta\in(0,1/3), \quad p>\delta^{-1}. \tag{3.8}$$

По лемме 3.2 для $h = h_1$ выполнено (3.4). Следовательно, для каждого $p > 3$ найдется номер $s(p)$ такой, что $z_p \in \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$. Как и в лемме 3.3, рассмотрим последовательность $\Lambda_{s(p)}(h_1)$. Верно представление

$$q_\Lambda(z_p, w_p, \delta) = q_{\Lambda_{s(p)}(h_1)}(z_p, w_p, \delta) \prod_{\lambda_k \in B(w,\delta|w|)\cap\Omega_{s(p)}(h_1,\Lambda)} \left(\frac{z_p - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

В силу (3.3) имеем:

$$\ln|q_{\Lambda_{s(p)}(h_1)}(z_p, w_p, \delta)| \geqslant \frac{18\delta(1+\delta)}{h_1} b|w_p| \geqslant -\varepsilon|w_p|, \quad \delta \in (0, 1/3), \quad p > p(\varepsilon). \tag{3.9}$$

Пусть $r_{m(p)} < |z_p| \leqslant r_{m(p)+1}$. Так как $z_p \in \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$, то в силу (2.14) и (3.5)

$$r_{m(p)} < \mu_{s(p)}(h_1) < r_{m(p)+2}, \quad p > p_0.$$

Из первого неравенства в (3.5) следует, что $s(p) \geqslant m(p)+1$. Рассмотрим случай $\mu_{s(p)}(h_1) \leqslant r_{m(p)+1}$. Поскольку $z_p \in \Omega(H, R, \Lambda)$, то в силу (2.24) и (2.19) $z_p \in \Omega(h_{m(p)+1}, \Lambda)$. Тогда по лемме 2.4, как и в лемме 3.1, получаем:

$$\frac{1}{|w_p|} \ln\left|\prod_{\lambda_k \in B(w_p,\delta|w_p|)\cap\Omega_{s(p)}(h_1,\Lambda)} \left(\frac{z_p - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}\right| \geqslant \frac{n}{|w_p|} \ln \frac{nh_{m(p)+1}}{36\delta(1+\delta)|w_p|} \geqslant 36\delta(1+\delta)b +$$

$$+ \frac{n}{|w_p|} \ln h_{m(p)+1} \geqslant -\varepsilon + \frac{n}{|w_p|} \ln h_{m(p)+1} \geqslant -\varepsilon + \frac{N_{s(p)}(h_1)}{|w_p|} \ln h_{m(p)+1}, \quad b = -1/e,$$

где n — число точек λ_k с учетом кратностей, принадлежащих множеству $B(w, \delta|w|) \cap \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$, и $0 < \delta < \delta_0$. Так как $z_p \in B(w_p, p^{-1}|w_p|) \cap \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$, то с учетом (2.14) находим, что

$$\frac{\mu_{s(p)}(h_1)}{|w_p|} \to 1, \quad p \to \infty.$$

Следовательно, согласно (3.5) имеем:

$$\frac{1}{|w_p|} \ln\left|\prod_{\lambda_k \in B(w_p,\delta|w_p|)\cap\Omega_{s(p)}(h_1,\Lambda)} \left(\frac{z_p - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}\right| \geqslant -2\varepsilon.$$

Вместе с (3.9) это противоречит (3.8). Пусть теперь $\mu_{s(p)}(h_1) > r_{m(p)+1}$. Тогда в силу (3.5) $s(p) \geqslant m(p) + 2$. Поскольку $\mu_{s(p)}(h_1) < r_{m(p)+2}$, то, как и выше, получаем $z_p \in \Omega(h_{m(p)+2}, \Lambda)$. Затем получаем противоречие с (3.8). Лемма доказана. □

Пусть $U(H, R) = \{U_{m,l}(H, R)\}$ — разбиение последовательности Λ на группы, где $U_{m,l}(H, R)$ состоит из всех точек $\lambda_k \in \Omega_{m,l}(H, R, \Lambda)$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}_0(\Lambda) = \tau$. *Предположим, что* H *и* R *удовлетворяют* (2.20) *и* (3.5). *Тогда* $S_\Lambda(U(H, R)) = 0$.

Доказательство. Для удобства можно считать, что группы разбиения $U(H, R)$ пронумерованы одним индексом: $U(H, R) = \{U_s\}$. Пусть Ω_s, $s \geqslant 1$, — все связные компоненты множества $\Omega(H, R, \Lambda)$, $U_s = \{\lambda_{s,l}, n_{s,l}\}_{l=1}^{M_s}$, $\lambda_{s,l} \in \Omega_s$, $l = \overline{1, M_s}$, и $\varepsilon > 0$. Из (2.14), (2.19) и определения $\Omega(H, R, \Lambda)$ следует, что

$$\frac{d_s}{\mu_s} \to 0, \quad s \to \infty, \tag{3.10}$$

где d_s — диаметр множества Ω_s и

$$\mu_s = \sup_{z \in \Omega_s} |z|, \quad s \geqslant 1.$$

По лемме 3.4 существуют $\delta \in (0, 1/3)$ и $t > 0$ такие, что выполнено (3.6). Фиксируем номер $s \geqslant 1$, для которого $|\lambda_{s,l}| > t$, $l = \overline{1, M_s}$. Тогда в силу (3.6) и (3.1) имеем:

$$\ln|q^{s,l}_{\Lambda,U(H,R)}(z, \delta)| \geqslant \ln|q_\Lambda(z, \lambda_{s,l}, \delta)| \geqslant -\varepsilon|\lambda_{s,l}|, \quad z \in B(\lambda_{s,l}, \delta|\lambda_{s,l}|) \setminus \Omega(H, R, \Lambda), \quad l = \overline{1, M_s}.$$

Согласно (3.10) можно считать, что $\Omega_s \in B(\lambda_{s,l}, \delta|\lambda_{s,l}|)$, $l = \overline{1, M_s}$. Тогда

$$\ln|q^{s,l}_{\Lambda,U(H,R)}(z,\delta)| \geqslant -\varepsilon|\lambda_{s,l}|, \quad z \in \partial\Omega_s, \quad l = \overline{1, M_s}.$$

Многочлен $q^{s,l}_{\Lambda,U(H,R)}(z,\delta)$ не имеет нулей на множестве Ω_s. Поэтому по принципу минимума для гармонических функций последнее неравенство продолжается на Ω_s. В частности,

$$\ln|q^{s,l}_{\Lambda,U(H,R)}(\lambda_{s,l},\delta)| \geqslant -\varepsilon|\lambda_{s,l}|, \quad l = \overline{1, M_s}.$$

Следовательно, $S_\Lambda(U(H,R),\delta) \geqslant -\varepsilon$. В силу (3.1)

$$S_\Lambda(U(H,R),\delta_1) \geqslant S_\Lambda(U(H,R),\delta), \quad \delta_1 \in (0,\delta).$$

Поэтому $S_\Lambda(U(H,R)) \geqslant -\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое и всегда верно неравенство $S_\Lambda(U(H,R)) \leqslant 0$, то $S_\Lambda(U(H,R)) = 0$. Лемма доказана. □

4. Оценки снизу целых функций

Пусть f — целая функция экспоненциального типа. Отметим одно свойство индикатора [15, гл. I, §18, теорема 28]: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi) + \varepsilon)r, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \geqslant R(\varepsilon). \tag{4.1}$$

Функция h_f совпадает с опорной функцией

$$H_T(\varphi) = \max_{z \in T} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})$$

некоторого выпуклого компакта $T \subset \mathbb{C}$, который называется *индикаторной диаграммой* функции f. Сопряженная диаграмма K функции f является компактом, комплексно сопряженным к компакту T [16, гл. I, §5, теорема 5.4]. Таким образом,

$$h_f(\varphi) = H_K(-\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Отсюда следует, что функция h_f непрерывна (а значит, и равномерно непрерывна) на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому для каждого $\varepsilon_0 > 0$ найдется $\delta_0 \in (0,1)$ такое, что

$$|th_f(\psi) - h_f(\varphi)| \leqslant \varepsilon_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad te^{i\psi} \in B(e^{i\varphi}, \delta_0). \tag{4.2}$$

Говорят также, что f имеет вполне регулярный рост на луче $L_\varphi = \{re^{i\varphi}, r > 0\}$, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r \notin E_\varphi,\ r \to +\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r},$$

где E_φ — E_0-множество. Если f имеет вполне регулярный рост на каждом луче, то множество E_φ, вообще говоря, зависит от $\varphi \in [0, 2\pi]$. Оказывается, однако, что можно подобрать исключительное E_0-множество, которое подходит для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ [15, гл. III, §1, теорема 1]. Другими словами, функция f имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда она имеет вполне регулярный рост на каждом луче. Известно также другое эквивалентное определение функции вполне регулярного роста (см. [2] и [14, лемма 4.1]). Функция f имеет вполне регулярный рост на луче L_φ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} |z_m| = \infty, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{z_m}{|z_m|} = e^{i\varphi}, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{|z_{m+1}|}{|z_m|} = 1, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\ln|f(z_m)|}{|z_m|} = h_f(\varphi). \tag{4.3}$$

Пусть f — целая функция экспоненциального типа и $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}$ — все ее нули с учетом их кратностей. По теореме Линделефа [15, гл. I, §3] верно неравенство $\overline{n}(\Lambda) = \tau < \infty$.

Теорема 4.1. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, которая имеет вполне регулярный рост на каждом луче L_φ, и $h \in (0, \tau^{-1})$, $\tau = \overline{n}(\Lambda)$. Тогда*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = rh_f(\varphi) + \alpha(r), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad \alpha(r)/r \to 0, \quad r \to +\infty. \tag{4.4}$$

Доказательство. Предположим, что (4.4) неверно. Тогда в силу (4.1) существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{w_j\}$ такие, что $w_j \in \mathbb{C} \setminus \Omega(h, \Lambda)$,

$$\ln|f(w_j)| \leqslant r_j(h_f(\varphi_j) - \varepsilon), \quad w_j = r_j e^{i\varphi_j}, \quad j \geqslant 1. \tag{4.5}$$

Можно считать, что $e^{i\varphi_j} \to e^{i\varphi}$, $j \to \infty$. По условию существует последовательность $\{z_m\}$, для которой выполнено (4.3). В силу второго и третьего равенства в (4.3) для каждого $\delta > 0$ и всех $j \geqslant j(\delta)$ найдется номер $m(j)$ такой, что $w_j \in B(z_{m(j)}, \delta|z_{m(j)}|/5)$.

Согласно (4.1), (4.2) и второму равенству в (4.3) существует $\delta \in (0, 1/5)$ такое, что

$$\ln|f(z)| \leqslant (h_f(\varphi) + \varepsilon/6)|z_m|, \quad z \in B(z_m, 5\delta|z_m|), \quad m \geqslant m(\varepsilon). \tag{4.6}$$

Уменьшая при необходимости δ, можно считать, что

$$r_j(h_f(\varphi_j) - \varepsilon) \leqslant |z_{m(j)}|(h_f(\varphi) - 2\varepsilon/3), \quad j \geqslant j(\delta). \tag{4.7}$$

В силу леммы 3.2 можно также считать, что

$$\ln|q_\Lambda(z, z_m, \delta)| \geqslant -\varepsilon|z_m|/6, \quad z \in B(z_m, \delta|z_m|) \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad m \geqslant 1. \tag{4.8}$$

Из (4.5) и (4.7) получаем:

$$\ln|f(w_j)| \leqslant |z_{m(j)}|(h_f(\varphi) - 2\varepsilon/3), \quad j \geqslant j(\delta). \tag{4.9}$$

Согласно последнему равенству в (4.3) имеем:

$$\ln|f(z_m)| \geqslant |z_m|(h_f(\varphi) - \varepsilon/6), \quad m \geqslant m_1(\varepsilon) \geqslant m(\varepsilon). \tag{4.10}$$

Рассмотрим функции

$$g_m(z) = \frac{f(z)}{f(z_m) q_\Lambda(z, z_m, \delta)}, \quad m \geqslant 1.$$

Из (4.6), (4.10), (3.2) и принципа максимума модуля следует неравенство

$$\ln|g_m(z)| \leqslant \varepsilon|z_m|/3, \quad z \in B(z_m, 5\delta|z_m|), \quad m \geqslant m_1(\varepsilon).$$

Кроме того, $g_m(z_m) = 1$. Тогда по лемме [16, лемма 4.1] об оценке снизу функции, не имеющей нулей, получаем:

$$\ln|g_m(z)| \geqslant -\varepsilon|z_m|/6, \quad z \in B(z_m, \delta|z_m|/5), \quad m \geqslant m_1(\varepsilon).$$

В частности,

$$\ln|g_{m(j)}(w_j)| \geqslant -\varepsilon|z_{m(j)}|/8, \quad j \geqslant j(\delta), \quad m(j) \geqslant m_1(\varepsilon).$$

Поскольку $w_j \in B(z_{m(j)}, \delta|z_{m(j)}|/5) \setminus \Omega(h, \Lambda)$, то с учетом (4.8) и (4.10) имеем:

$$\ln|f(w_j)| \geqslant |z_{m(j)}|(h_f(\varphi) - \varepsilon/2), \quad j \geqslant j(\delta), \quad m(j) \geqslant m_1(\varepsilon).$$

Это противоречит (4.9). Теорема доказана. □

Пусть f — целая функция экспоненциального типа и $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}$ — ее кратное нулевое множество. Как отмечалось во введении, Λ_f является правильно распределенным множеством. В частности, Λ_f имеет плотность $n(\Lambda) = \tau$. Тогда по лемме 2.1 из работы [1] верны равенства $\overline{n}_0(\Lambda) = n(\Lambda) = \tau$.

Таким образом, заменяя лемму 3.2 на лемму 3.4 и практически дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4.1, получаем следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, которая имеет вполне регулярный рост на каждом луче L_φ. Предположим, что H и R удовлетворяют* (2.20) *и* (3.5). *Тогда*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = rh_f(\varphi) + \alpha(r), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \Omega(H, R, \Lambda), \quad \alpha(r)/r \to 0, \quad r \to +\infty. \tag{4.11}$$

Замечание 4.1. Равенство (4.11) является полным аналогом равенства (1.1). Однако в отличие от (1.1) исключительное множество в (4.11) строится конструктивно.

5. Базис в инвариантном подпространстве

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и $H(D)$ — пространство функций, аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах из D. Символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,\ n=0}^{\infty,\ n_k-1}.$$

Если $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, то $W(\Lambda, D)$ является нетривиальным ($\neq H(D), \{0\}$) замкнутым подпространством в $H(D)$. Из определения вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)$ — это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W(\Lambda, D)$, а Λ — его кратный спектр.

Пусть $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство, инвариантное относительно оператора дифференцирования, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — его кратный спектр. Он является не более чем счетным множеством с единственной предельной точкой ∞ [6, гл. II, §7]. В случае, когда спектр W конечен, оно совпадает с пространством решений однородного линейного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Более общим примером инвариантного подпространства служит множество решений уравнения свертки $\mu(g(z + w)) \equiv 0$ (или системы таких уравнений), где μ — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D)$. Частными случаями уравнения свертки являются линейные дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков, а также некоторые виды интегральных уравнений.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является представление всех функций $g \in W$ при помощи собственных функций оператора дифференцирования — $e^{\lambda_k z}$. Однако этих функций недостаточно для представления даже в случае, когда W есть пространство решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Это пространство совпадает с линейной оболочкой всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W (т. е. с линейной оболочкой системы $\mathcal{E}(\Lambda)$). Этот результат известен как фундаментальный принцип Л. Эйлера. В этой связи задача представления функций $g \in W$ посредством рядов по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, т. е. рядов

$$\sum_{k=1,\ n=0}^{\infty, n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{5.1}$$

называется *проблемой фундаментального принципа* для инвариантного подпространства.

Первым шагом на пути к представлению (5.1) является решение *проблемы спектрального синтеза*, т. е. выяснение условий, при которых система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в подпространстве W (другими словами, когда $W = W(\Lambda, D)$). Проблему фундаментального принципа, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, т. е. для подпространств вида $W(\Lambda, D)$.

Отметим, что критерий допустимости спектрального синтеза в подпространстве W получен в работах [3, 4].

Исследование проблемы фундаментального принципа имеет богатую историю. Частично она отражена в работе [6]. Полное решение проблемы фундаментального принципа в случае ограниченной выпуклой области получено в работах [6, 11, 13].

Одним из необходимых условий (см. [6]) фундаментального принципа является равенство нулю индекса конденсации S_Λ. Если оно нарушается, то становится невозможным представление всех функций из подпространства $W(\Lambda, D)$ в виде ряда (5.1). Известно, однако, что и в этом случае иногда удается получить представление всех функций $g \in W(\Lambda, D)$ (для $D = \mathbb{C}$) в виде ряда (5.1) «со скобками»

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z) \right), \quad z \in D.$$

История такого представления частично изложена в работе [10]. В этой связи естественным образом возникает задача о переходе от такого представления в виде ряда «со скобками» к представлению рядом

$$\sum_{s=1,\ j=1}^{\infty, N_s} d_{s,j} e_{s,j}(z), \tag{5.2}$$

где участвуют фиксированные линейные комбинации элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, которые образуют базис в подпространстве $W(\Lambda, D)$. При этом показатели λ_k разбиты на группы $U = \{U_s\}$. Линейная комбинация $e_{s,j}$ формируется по точкам λ_k группы U_s.

Указанная задача называется *проблемой существования базиса* в инвариантном подпространстве. Если он существует, то возникает еще целый ряд вопросов. Каковы условия его существования. Как осуществить разбиение U и можно ли описать все подходящие разбиения? Как составлять линейные комбинации внутри группы и можно ли описать все подходящие комбинации? Насколько малым можно сделать диаметр групп U_s, т. е. насколько новый «чистый» ряд будет близок по своим свойствам к (5.1)? Наконец, как описать пространство коэффициентов сходящихся рядов, построенных по базису? Другими словами, с каким пространством числовых последовательностей можно отождествить $W(\Lambda, D)$? Ответы на эти вопросы (за исключением второго) в случае ограниченной области были даны в работах [7–10]. В частности, было установлено, что группы должны быть относительно малыми, а групповой индекс конденсации $S_\Lambda(U)$ должен равняться нулю.

Здесь мы дадим ответ на последний оставшийся вопрос — второй.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ разбита на группы $U = \{U_s\}$, $U_s = \{\lambda_{s,l}, n_{s,l}\}_{s=1}^{M_s}$. Следуя [8], положим

$$P_s(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_s} \frac{e^{\varsigma z}(\omega_s(\varsigma) - \omega_s(\lambda))}{(\varsigma - \lambda)\omega_s(\varsigma)} d\varsigma, \quad \omega_s(\lambda) = \prod_{l=1}^{M_s} (\lambda - \lambda_{s,l})^{n_{s,l}}, \quad s \geqslant 1,$$

где Γ_s — контур, охватывающий точки группы U_s. Пусть

$$e_{s,j}(z) = P_s^{(j-1)}(\lambda_{s,1}, z) = \frac{(j-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda - \lambda_{s,1}|=1} \frac{P_s(\lambda, z)}{(\lambda - \lambda_{s,1})^j} \, d\lambda, \quad j = \overline{1, N_s}.$$

Полученную систему функций $\{e_{s,j}\}_{j,s=1}^{N_s, \infty}$ обозначим символом $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. В случае тривиального разбиения система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ совпадает с $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)$ — множество всех пар λ_k, n_k таких, что λ_k лежит в угле $\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \{z = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t > 0\}$.

Пусть K — выпуклый компакт и z_1, z_2 — точки его границы ∂K. Через $s(z_1, z_2, K)$ обозначим длину дуги ∂K, соединяющей z_1 и z_2, движение по которой от z_1 к z_2 осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки). Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ пересечение опорной прямой и границы компакта

$$L(\varphi) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_K(e^{i\varphi})\} \cap \partial K$$

является либо точкой $z(\varphi)$, либо отрезком. Множество $\Phi(K)$ направлений φ, для которых $L(\varphi)$ — отрезок, не более чем счетное. Положим

$$S_K(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{z_1 \in L(\varphi_1),\ z_2 \in L(\varphi_2)} s(z_1, z_2, K).$$

Функция $S_K(\varphi_1, \varphi_2)$ является неубывающей по φ_2 и невозрастающей по φ_1, а множество ее точек разрыва по обеим переменным совпадает с $\Phi(K)$. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(K)$, то

$$S_K(\varphi_1, \varphi_2) = s(z(\varphi_1), z(\varphi_2), K).$$

Теорема 5.1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda) = \tau$, $h \in (0, (6\tau)^{-1})$ *и* D *— ограниченная выпуклая область. Предположим, что* $W(\Lambda, D)$ *нетривиально. Тогда эквивалентны утверждения*:

1) *Система* $\mathcal{E}(\Lambda, U(h))$ *является базисом в подпространстве* $W(\Lambda, D)$.

2) *Существует* $\gamma > 0$ *такое, что для всех* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(K)$ *с условием* $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ *выполнено неравенство*
$$\overline{n}_0(\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)) \leqslant \frac{S_K(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi},$$
где K *— компакт, комплексно сопряженный к замыканию* $\overline{D}$ *области* D.

Доказательство. По лемме 2.5 $U(h)$ — разбиение на относительно малые группы. Согласно лемме 3.3 верно равенство $S_\Lambda(U(h)) = 0$. Тогда в силу [11, теорема 3.1] утверждения 1) и 2) эквивалентны. Теорема доказана. □

Аналогично доказывается следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\overline{n}_0(\Lambda) = \tau$ *и* D *— ограниченная выпуклая область. Предположим, что* H *и* R *удовлетворяют* (2.20) *и* (3.5)*, а* $W(\Lambda, D)$ *нетривиально. Тогда эквивалентны утверждения*:

1) *Система* $\mathcal{E}(\Lambda, U(H, R))$ *является базисом в подпространстве* $W(\Lambda, D)$.
2) *Существует* $\gamma > 0$ *такое, что для всех* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(K)$ *с условием* $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ *выполнено неравенство*
$$\overline{n}_0(\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)) \leqslant \frac{S_K(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi},$$
где K *— компакт, комплексно сопряженный к замыканию* $\overline{D}$ *области* D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдулнагимов А. И., Кривошеев А. С.* Правильно распределенные подмножества в комплексной плоскости// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 4. — С. 1–46.
2. *Брайчев Г. Г.* Индекс лакунарности// Мат. заметки. — 1993. — *53*, № 6. — С. 3–10.
3. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — *87*, № 4. — С. 459–489.
4. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный анализ на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — *88*, № 1. — С. 3–30.
5. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона// Мат. заметки. — 1978. — *24*, № 4. — С. 531–546.
6. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях// Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — *68*, № 2. — С. 71–136.
7. *Кривошеев А. С.* Почти экспоненциальный базис// Уфимск. мат. ж. — 2010. — *2*, № 1. — С. 87–96.
8. *Кривошеев А. С.* Базисы «по относительно малым группам»// Уфимск. мат. ж. — 2010. — *2*, № 2. — С. 67–89.
9. *Кривошеев А. С.* Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов// Уфимск. мат. ж. — 2012. — *4*, № 1. — С. 88–106.
10. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций// Мат. сб. — 2013. — *204*, № 12. — С. 49–104.
11. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 5. — С. 684–697.
12. *Кривошеева О. А.* Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости// Алгебра и анализ. — 2011. — *23*, № 2. — С. 162–205.
13. *Кривошеева О. А., Кривошеев А. С.* Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости// Функц. анализ и его прилож. — 2012. — *46*, № 4. — С. 14–30.
14. *Кривошеева О. А., Кривошеев А. С., Рафиков А. И.* Оценки снизу целых функций// Уфимск. мат. ж. — 2019. — *11*, № 3. — С. 46–62.
15. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
16. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.

А. С. Кривошеев
Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

О. А. Кривошеева
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

UDC 517.53/.55
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305
EDN: TJWAKD

Exceptional sets

A. S. Krivosheev[1] and O. A. Krivosheeva[2]

[1] *Institute of Mathematics with Computing Centre of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*
[2] *Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

Abstract. In this paper, we study sequences of complex numbers of the first order. Multiple terms are allowed for such sequences. We also consider complex sequences with a finite maximum density. We construct special coverings of multiple sets $\{\lambda_k, n_k\}$ consisting of circles centered at points λ_k of special radii. In particular, we construct coverings are with connected components of a relatively small diameter, as well as coverings that are C_0-sets. These coverings act as exceptional sets for entire functions of exponential type. Outside these sets, we obtain a representation of the logarithm of the modulus of an entire function. Previously, a similar representation was obtained by B. Ya. Levin outside the exceptional set, with respect to which only its existence is asserted. In contrast to this, in this paper we present a simple effective construction of an exceptional set. We construct bases of the invariant subspace of analytic functions in a convex domain. They consist of linear combinations of eigenfunctions and associated functions (exponential monomials) of the differentiation operator divided into relatively small groups.

Keywords: series of exponential monomials, convex domain, exceptional set, condensation index.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research of the second author was supported by the competition “Young Mathematics of Russia.”

For citation: A. S. Krivosheev, O. A. Krivosheeva, “Exceptional sets,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 289–305. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305

REFERENCES

1. A. I. Abdulnagimov and A. S. Krivosheev, “Pravil’no raspredelennye podmnozhestva v kompleksnoy ploskosti” [Properly distributed subsets in the complex plane], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2016, **28**, No. 4, 1–46 (in Russian).
2. G. G. Braychev, “Indeks lakunarnosti” [Lacunarity index], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1993, **53**, No. 6, 3–10 (in Russian).
3. I. F. Krasichkov-Ternovskiy, “Invariantnye podprostranstva analiticheskikh funktsiy. I. Spektral’nyy analiz na vypuklykh oblastyakh” [Invariant subspaces of analytic functions. I. Spectral analysis on convex regions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **87**, No. 4, 459–489 (in Russian).
4. I. F. Krasichkov-Ternovskiy, “Invariantnye podprostranstva analiticheskikh funktsiy. II. Spektral’nyy analiz na vypuklykh oblastyakh” [Invariant subspaces of analytic functions. II. Spectral analysis on convex regions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **88**, No. 1, 3–30 (in Russian).

5. I. F. Krasichkov-Ternovskiy, “Odna geometricheskaya lemma, poleznaya v teorii tselykh funktsiy, i teoremy tipa Levinsona” [One geometric lemma useful in the theory of entire functions and Levinson-type theorems], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1978, **24**, No. 4, 531–546 (in Russian).
6. A. S. Krivosheev, “Fundamental’nyy printsip dlya invariantnykh podprostranstv v vypuklykh oblastyakh” [Fundamental principle for invariant subspaces in convex domains], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2004, **68**, No. 2, 71–136 (in Russian).
7. A. S. Krivosheev, “Pochti eksponentsial’nyy bazis” [Almost exponential basis], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2010, **2**, No. 1, 87–96 (in Russian).
8. A. S. Krivosheev, “Bazisy «po otnositel’no malym gruppam»” [Bases “on relatively small groups”], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2010, **2**, No. 2, 67–89 (in Russian).
9. A. S. Krivosheev, “Pochti eksponentsial’naya posledovatel’nost’ eksponentsial’nykh mnogochlenov” [Almost exponential sequence of exponential polynomials], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2012, **4**, No. 1, 88–106 (in Russian).
10. A. S. Krivosheev and O. A. Krivosheeva, “Bazis v invariantnom podprostranstve analiticheskikh funktsiy” [Basis in an invariant subspace of analytic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2013, **204**, No. 12, 49–104 (in Russian).
11. A. S. Krivosheev and O. A. Krivosheeva, “Fundamental’nyy printsip i bazis v invariantnom podprostranstve” [Fundamental principle and basis in an invariant subspace], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 5, 684–697 (in Russian).
12. O. A. Krivosheeva, “Osobye tochki summy ryada eksponentsial’nykh monomov na granitse oblasti skhodimosti” [Singular points of the sum of a series of exponential monomials on the boundary of the region of convergence], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2011, **23**, No. 2, 162–205 (in Russian).
13. O. A. Krivosheeva and A. S. Krivosheev, “Kriteriy vypolneniya fundamental’nogo printsipa dlya invariantnykh podprostranstv v ogranichennykh vypuklykh oblastyakh kompleksnoy ploskosti” [Criterion for fulfillment of the fundamental principle for invariant subspaces in bounded convex domains of the complex plane], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2012, **46**, No. 4, 14–30 (in Russian).
14. O. A. Krivosheeva, A. S. Krivosheev, and A. I. Rafikov, “Otsenki snizu tselykh funktsiy” [Lower estimates for entire functions], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2019, **11**, No. 3, 46–62 (in Russian).
15. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
16. A. F. Leont’ev, *Tselye funktsii. Ryady eksponent* [Entire Functions. Exponential Series], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).

A. S. Krivosheev

Institute of Mathematics with Computing Centre of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

O. A. Krivosheeva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: kriolesya2006@yandex.ru