



eISSN 2311-2468  
Том 1, № 10. 2013  
Vol. 1, no. 10. 2013

электронное периодическое издание  
для студентов и аспирантов

# Огарёв-онлайн Ogarev-online

<https://journal.mrsu.ru>



ЕРЕМИНА Е.П.

## ПОСТРОЕНИЕ ДИВЕРГЕНТНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

**Аннотация.** В статье рассмотрена задача распространения звуковых волн в неоднородной среде. Получены интегральные законы сохранения и выведены соответствующие дивергентные разностные схемы.

**Ключевые слова:** двумерная акустика, закон сохранения, дивергентная разностная схема, обобщенное решение.

YEREMINA E.P.

## DIVERGENT DIFFERENCE SCHEME FOR ACOUSTICS EQUATIONS SYSTEM IN NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

**Abstract.** The article considers the problem of sound waves propagation in a non-homogeneous medium. Particularly, the author deduces the integral conservation laws. As a result, the divergent difference schemes are derived.

**Keywords:** two-dimensional acoustics, conservation law, divergent difference scheme, generalized solution.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую распространение звуковых волн в неоднородной среде, а также начальные условия, характеризующие состояние системы в начальный момент времени

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} + c_o^2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t, x, y) u(t, x, y)) + c_o^2 \frac{\partial}{\partial y} (\rho(t, x, y) v(t, x, y)) = 0 \quad (1.3)$$

$$u(t, x, y)|_{t=0} = u_0(x, y) \quad (1.4)$$

$$v(t, x, y)|_{t=0} = v_0(x, y) \quad (1.5)$$

$$p(t, x, y)|_{t=0} = p_0(x, y) \quad (1.6)$$

$(t, x, y) \in D \cup S$ ,  $S$  – граница области  $D$ .

Здесь  $u(t, x, y), v(t, x, y), p(t, x, y)$  -отклонения скоростей и давления от их значений в невозмущенной среде,  $\rho(t, x, y)$  -плотность среды в момент времени  $t$  в точке  $(x, y)$ ,  $c_o$  - скорость распространения звука.

## 2. Обобщенное решение системы по Л.С. Соболеву

Рассмотрим бесконечные дифференцируемые функции  $\varphi(t, x, y), \psi(t, x, y), \theta(t, x, y)$ , носитель которых принадлежит ограниченной области.

Рассмотрим некоторое выражение:

$$\frac{\partial(u\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} p \varphi \right) + \frac{\partial(v\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} p \psi \right) + \frac{\partial(p\theta)}{\partial t} + c_o^2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \theta) + c_o^2 \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \theta) \quad (2.1)$$

После некоторых преобразований из выражения (2.1) получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \psi}{\partial y} + p \frac{\partial \theta}{\partial t} + c_o^2 \rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + c_o^2 \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} (u + v + p) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} p + c_o^2 \rho u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} p + c_o^2 \rho v \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Проинтегрируем выражение (2.2) по области  $D$ , далее применим формулу Остроградского-Гаусса. Конкретизируем область  $D$  и границу  $G$  следующим образом:

$$D: t \geq 0, S: t=0$$

Рассмотрим три случая:

$$\psi(t, x, y) \equiv 0, \theta(t, x, y) \equiv 0, \varphi(t, x, y) \neq 0 \quad (2.3)$$

$$\psi(t, x, y) \equiv 0, \theta(t, x, y) \neq 0, \varphi(t, x, y) \equiv 0 \quad (2.4)$$

$$\psi(t, x, y) \neq 0, \theta(t, x, y) \equiv 0, \varphi(t, x, y) \equiv 0 \quad (2.5)$$

Получим обобщенное решение по Л.С Соболеву для задачи (1.1) – (1.6)

$$\int_{t \geq 0} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx dy = \int_{t=0} u \varphi dx dy \quad (2.6)$$

$$\int_{t \geq 0} \left( v \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dt dx dy = \int_{t=0} v \psi dx dy \quad (2.7)$$

$$\int_{t \geq 0} \left( p \frac{\partial \theta}{\partial t} + c_o^2 \rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + c_o^2 \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dt dx dy = \int_{t=0} p \theta dx dy \quad (2.8)$$

### 3. Интегральный закон сохранения для системы уравнений акустики

Рассмотрим поверхности  $\gamma$  и  $\gamma'$ , на которых функции  $\varphi(t, x, y)$ ,  $\psi(t, x, y)$ ,  $\theta(t, x, y)$  определены следующим образом:

$$\varphi(x, y, t), \psi(x, y, t), \theta(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{внутри } \gamma \\ 0 & \text{вне } \gamma' \\ \text{изменяется от 1 до 0 от } \gamma \text{ до } \gamma' \end{cases}$$

Рассмотрим выражение (2.6). Запишем первый интеграл выражения (2.6) в следующем виде:

$$\iint_{\gamma'} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx dy \quad (3.1)$$

Интегрирование по полосе заменим интегрированием по нормали. С учетом правой части выражения (2.6) получим интегральный закон сохранения:

$$\oint\!\!\!\oint u dx dy - \frac{1}{\rho} p dt dy = 0. \quad (3.2)$$

Аналогично для выражений (2.7) и (2.8) получим:

$$\oint\!\!\!\oint v dx dy - \frac{1}{\rho} p dt dx = 0. \quad (3.3)$$

$$\oint\!\!\!\oint p dx dy - c_0^2 \rho u dt dy - c_0^2 \rho v dx dy = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом (3.2) – (3.4) – интегральные законы сохранения для задачи (1.1) – (1.6).

### 4. Конструирование системы дивергентных разностных уравнений

Рассмотрим сетку следующего вида:

$$t = k\tau, \quad x = \left(i + \frac{1}{2}\right)h, \quad y = \left(j + \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 0, 1, \dots; i = 0, \pm 1, \dots; j = 0, \pm 1, \dots \quad (4.1)$$

Введем следующие обозначения:

$$[u]_h \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{u}_{i+1/2, j, k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} u(x, y, t_k) dx dy, \quad (4.2)$$

$$[u]_h \Big|_{\substack{x=x_{i+1/2} \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{U}_{i+1/2, j, k} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} u(x_{i+1/2}, y, t) dy dt, \quad (4.3)$$

$$[p]_h \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{p}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p(x, y, t_k) dx dy, \quad (4.4)$$

$$[p]_h \Big|_{\substack{x=x_{i+1/2} \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{P}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p(x_{i+1/2}, y, t) dy dt, \quad (4.5)$$

$$[v]_h \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{v}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} v(x, y, t_k) dx dy, \quad (4.6)$$

$$[v]_h \Big|_{\substack{x=x_{i+1/2} \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{V}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} v(x_{i+1/2}, y, t) dy dt, \quad (4.7)$$

Связь между величинами (4.2) – (4.7) установим исходя из интегрального закона сохранения (3.2) – (3.4). Получим дивергентные разностные схемы:

$$\frac{\rho(t_k, x_i, y_j)(\tilde{u}_{i,j,k+1} - \tilde{u}_{i,j,k})}{\tau} - \frac{\tilde{P}_{i+1/2,j,k} - \tilde{P}_{i-1/2,j,k}}{h} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\rho(t_k, x_i, y_j)(\tilde{v}_{i,j,k+1} - \tilde{v}_{i,j,k})}{\tau} - \frac{\tilde{P}_{i,j+1/2,k} - \tilde{P}_{i,j-1/2,k}}{h} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\tilde{P}_{i,j,k+1} - \tilde{P}_{i,j,k}}{\tau} - c_0^2 \rho(t_k, x_i, y_j) \frac{\tilde{U}_{i+1/2,j,k} - \tilde{U}_{i-1/2,j,k}}{h} - c_0^2 \rho(t_k, x_i, y_j) \frac{\tilde{V}_{i,j+1/2,k} - \tilde{V}_{i,j-1/2,k}}{h} = 0 \quad (4.10)$$

Таким образом (4.8) – (4.10) – дивергентные разностные схемы для задачи (1.1) – (1.6).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 2-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.
2. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.

КЕЛИН А.Н.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПОКОЯЩЕЙСЯ СРЕДЕ

**Аннотация.** В статье рассматривается процесс распространения плоских звуковых волн (малых возмущений) в покоящейся среде. На основе построенных дивергентных разностных схем разработано программное обеспечение по расчету скорости и давления, вызванные распространением звуковых волн.

**Ключевые слова:** уравнение акустики, численное моделирование, закон сохранения, дивергентная разностная схема.

KELIN A.N.

## NUMERICAL MODELLING OF FLAT SOUND WAVES DISTRIBUTION IN REST ENVIRONMENT

**Abstract.** The article considers the process of flat sound waves (small perturbation) distribution in the rest environment. Constructed on the basis of divergent difference schemes software for the calculation of the velocity and pressure caused by the propagation of sound waves developed.

**Keywords:** acoustics equation, numerical modelling, conservation law, divergent difference scheme.

### 1. Постановка начально-краевой задачи для уравнения акустики

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = 0, & x \in [0; L], \quad t \in [0; T] \\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \rho_0 C_0^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, & x \in [0; L], \quad t \in [0; T] \end{cases} \quad (1)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= g_1(x), & x \in [0; L], & \quad t = 0 \\ p(x, t)|_{t=0} &= g_2(x), & x \in [0; L], & \quad t = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= q_1(t), & t \in (0; T], & \quad x = 0 \\ u(x, t)|_{x=L} &= q_2(t), & t \in (0; T], & \quad x = L \\ p(x, t)|_{x=0} &= w_1(t), & t \in (0; T], & \quad x = 0 \\ p(x, t)|_{x=L} &= w_2(t), & t \in (0; T], & \quad x = L \end{aligned} \quad (3)$$

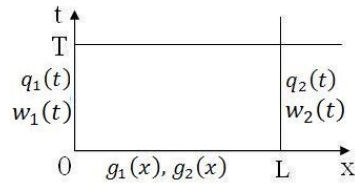


Рис. 1.1. Начальные и граничные данные для уравнения акустики

Система двух дифференциальных уравнений (1) описывает распространение плоских звуковых волн (малых возмущений) в покоящейся среде. Здесь  $u(x, t)$  – малое отклонение скорости возмущенной среды от значения в состоянии покоя;  $p(x, t)$  – малое отклонение давления возмущенной среды от значения в состоянии покоя;  $\rho_0$  – плотность невозмущенной среды;  $C_0$  – характеристика сжимаемости среды или скорость звука.

Требуется найти значения скорости  $u(x, t)$  и давления  $p(x, t)$ , вызванные распространением звуковых волн.

## 2. Дивергентная разностная схема для уравнения акустики

Построим дивергентную разностную схему для решения системы обобщенного уравнения на основе интегрального закона сохранения

$$\begin{cases} \oint \rho_0 u(x, t) dx - p(x, t) dt = 0 \\ \oint \rho_0 u(x, t) dt - \frac{1}{C_0^2} p(x, t) dx = 0 \end{cases} .$$

Определим сетку и выберем на этой сетке одну ячейку

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, \left[ \frac{L}{h} \right]$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, \dots, \left[ \frac{T}{\tau} \right]$$

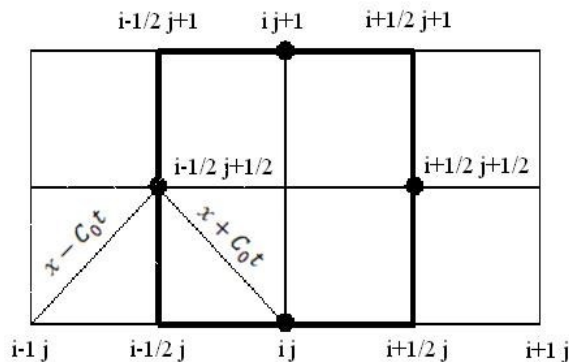


Рис. 1. Рассматриваемая ячейка

Рассмотрим интеграл по выделенной области

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho_0 u(x, t_j) dx - \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho_0 u(x, t_{j+1}) dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt = 0 \\ \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{C_0^2} p(x, t_j) dx - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \rho_0 U(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{C_0^2} p(x, t_{j+1}) dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \rho_0 U(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt = 0 \end{array} \right.$$

Получим дивергентную разностную схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\tau} + \frac{P_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \frac{1}{C_0^2} \frac{p_{ij+1} - p_{ij}}{\tau} + \rho_0 \frac{U_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \end{array} \right.$$

Промежуточные значения в точках  $x_{i-1/2}$  и  $x_{i+1/2}$  на  $j+1$  слое будем вычислять методом инвариантов Римана:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i-1j} + u_{ij}) + \frac{1}{2\rho_0 C_0}(p_{i-1j} - p_{ij}) \\ P_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_0 C_0}{2}(u_{i-1j} - u_{ij}) + \frac{1}{2}(p_{i-1j} + p_{ij}) \\ U_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{i+1j}) + \frac{1}{2\rho_0 C_0}(p_{ij} - p_{i+1j}) \\ P_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_0 C_0}{2}(u_{ij} - u_{i+1j}) + \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{i+1j}) \end{array} \right.$$

Подставим полученные выражения в дивергентную схему и получим конечные формулы для нахождения значений  $u(x,t)$  и  $p(x,t)$  в момент  $T$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{ij+1} = \frac{C_0 \tau}{2h} u_{i-1j} + \left(1 - \frac{C_0 \tau}{h}\right) u_{ij} + \frac{C_0 \tau}{2h} u_{i+1j} - \frac{\tau}{2h \rho_0} (p_{i+1j} - p_{i-1j}) \\ p_{ij+1} = \frac{C_0 \tau}{2h} p_{i-1j} + \left(1 - \frac{C_0 \tau}{h}\right) p_{ij} + \frac{C_0 \tau}{2h} p_{i+1j} - \frac{C_0^2 \tau \rho_0}{2h} (u_{i+1j} - u_{i-1j}) \end{array} \right.$$

при  $i = 1.. \left[\frac{L}{h} - 1\right], j = 1.. \left[\frac{T}{\tau} - 1\right]$



$$\begin{cases} u_{0j} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} q_1(t) dt \\ u_{Lj} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} q_2(t) dt \\ p_{0j} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} w_1(t) dt \\ p_{Lj} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{j-1}}^{t_j} w_2(t) dt \end{cases} \text{ при } j = 1.. \left[ \frac{T}{\tau} \right]$$

$$\begin{cases} u_{i0} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_1(x) dx \\ p_{i0} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_j} g_2(x) dx \end{cases} \text{ при } i = 1.. \left[ \frac{L}{h} \right]$$

Изложенная схема метода Годунова имеет первый порядок аппроксимации по  $h$  и по  $\tau$ .

Получим оценку устойчивости данной схемы на основе принципа максимума. Для этого возьмем модуль от левой и правой части уравнений, заранее заменив все значения в правой части на максимальное значение. В итоге получим:

$$\tau \leq \frac{h}{C_0}$$

При выполнении этого условия разностная схема будет устойчива.

### 3. Численный эксперимент

Для численной реализации дивергентных разностных схем рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) со следующими параметрами

$$\rho_0 = 1,7839; C_0 = 322; L = 1; T = 0,004;$$

начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= 322, \quad x \in [0; 1], \quad t = 0, \\ p(x, t)|_{t=0} &= 1,7, \quad x \in [0; 1], \quad t = 0. \end{aligned}$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 1, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 0, \\ u(x, t)|_{x=1} &= 1, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 1, \\ p(x, t)|_{x=0} &= 1,7, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 0, \\ p(x, t)|_{x=1} &= 1,1, \quad t \in (0; 0,004], \quad x = 1. \end{aligned}$$

Результаты численных расчетов представлены на рис.1.

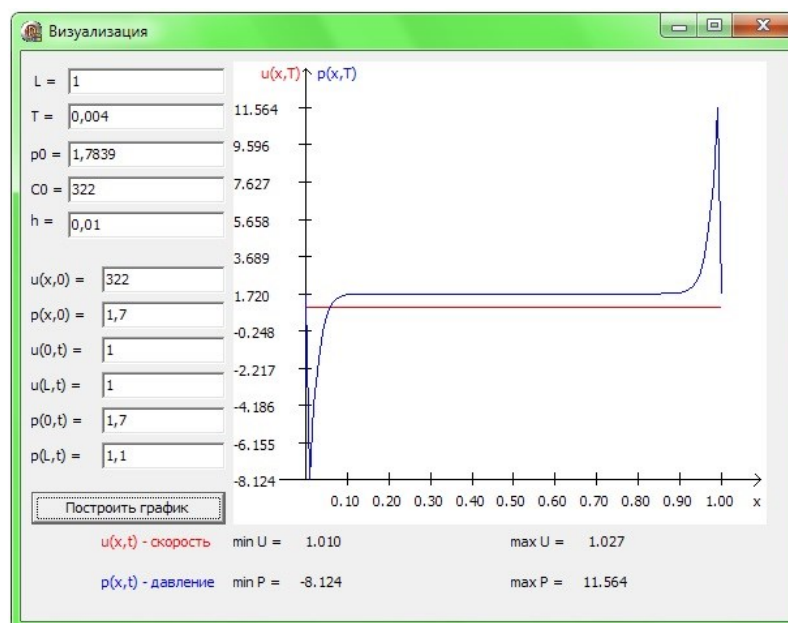


Рис. 1. Графики малых отклонений скорости  $u(x,t)$  и давления  $p(x,t)$  возмущенной среды от значения в состоянии покоя в момент времени  $T$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
2. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. - М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.

КОСОЛАПОВ В.П.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ БЕЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕЕ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

**Аннотация:** В статье рассматривается задача о распределении температуры в однородной пластине без воздействия на нее источником тепла. Построена дивергентная разностная схема. Приведены результаты численного эксперимента.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, численное моделирование, закон сохранения, дивергентная разностная схема.

KOSOLAPOV V.P.

## NUMERICAL MODELLING OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN HOMOGENEOUS PLATE WITHOUT AFFECTING IT BY HEAT SOURCE

**Abstract:** The article considers the problem of temperature distribution in a homogeneous plate without affecting it by heat source. Divergent difference scheme is constructed. Consequently, the numerical experiment results are presented.

**Keywords:** heat equation, numerical modelling, conservation law, divergent difference scheme.

### 1. Постановка начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1)$$

в области  $D = [0, L] \times [0, M]$ ,  $t \geq 0$  с начальными данными

$$u(x_1, x_2, t)|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t)|_{x_1=0} &= p_1(x_2, t), \\ u(x_1, x_2, t)|_{x_2=0} &= p_2(x_1, t), \\ u(x_1, x_2, t)|_{x_1=L} &= p_3(x_2, t) \quad u(x_1, x_2, t)|_{x_2=M} = p_4(x_1, t). \end{aligned} \quad (3)$$

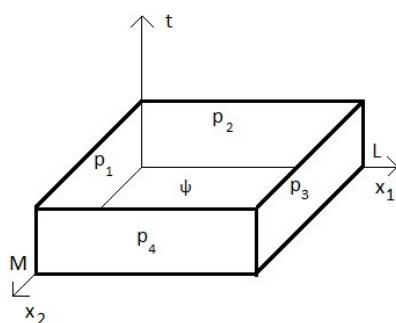


Рис. 1. Начальные и граничные данные для двумерного уравнения теплопроводности

Уравнения (1)-(3) описывает распределение температуры в однородной пластине без воздействия на нее источником тепла и имеющей начальную температуру  $\psi(x_1, x_2)$ .

## 2. Дивергентная разностная схема для уравнения теплопроводности

На основе закона сохранения энергии задачи Коши для уравнения теплопроводности будет иметь следующий вид

$$\oint u dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 dt + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 dt = 0 \quad (4)$$

Построим дивергентную разностную схему для решения уравнения (4). Положим

$$x_{1i} = ih, \quad i = 0, \dots, \left[ \frac{L}{h} \right]$$

$$x_{2j} = jh, \quad j = 0, \dots, \left[ \frac{M}{h} \right]$$

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, \left[ \frac{T}{\tau} \right]$$

и выберем на этой сетке один прямоугольный параллелепипед

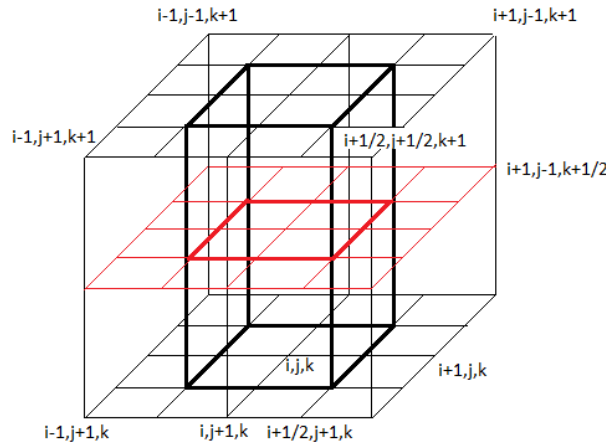


Рис. 2. Прямоугольный параллелепипед

Отметим на сторонах возникающих параллелепипедов их середины и отнесем их к сетке  $D_h$  путем усреднения решения  $u(x, y, t)$  по той стороне сеточного прямоугольника, которому принадлежит рассматриваемая точка сетки. Получим

$$[u]_h \Big|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2j} \\ t=t_k}} \equiv \tilde{u}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{1i-1/2}}^{x_{1i+1/2}} \int_{x_{2j-1/2}}^{x_{2j+1/2}} u(x_1, x_2, t_k) dx_1 dx_2,$$

$$[u]_h \Big|_{\substack{x_1=x_{1i+1/2} \\ x_2=x_{2j} \\ t=t_{k+1/2}}} \equiv \tilde{U}_{i+1/2,j,k+1/2} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{2j-1/2}}^{x_{2j+1/2}} u(x_{i+1/2}, x_2, t) dt dx_2,$$

$$[u]_h \Big|_{\substack{x_1=x_{1_i} \\ x_2=x_{2_{j+1/2}} \\ t=t_{k+1/2}}} \equiv \tilde{U}_{i,j+1/2,k+1/2} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{1_{j-1/2}}}^{x_{1_{j+1/2}}} u(x_1, x_{j+1/2}, t) dt dx_1,$$

Рассмотрим интеграл по выделенной области

$$\begin{aligned} & \int_{x_{2_{j-1/2}}}^{x_{2_{j+1/2}}} \int_{x_{1_{i-1/2}}}^{x_{1_{i+1/2}}} u(x_1, x_2, t) \Big|_{t=t_k} dx_1 dx_2 + \int_{x_{2_{j-1/2}}}^{x_{2_{j+1/2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \Big|_{x=x_{i+1/2}} dx_2 dt + \\ & + \int_{x_{1_{i-1/2}}}^{x_{1_{i+1/2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x=x_{j+1/2}} dx_1 dt - \int_{x_{1_{i-1/2}}}^{x_{1_{i+1/2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x=x_{j-1/2}} dx_1 dt - \\ & - \int_{x_{2_{j-1/2}}}^{x_{2_{j+1/2}}} \int_{x_{1_{i-1/2}}}^{x_{1_{i+1/2}}} u(x_1, x_2, t) \Big|_{t=t_{k+1}} dx_1 dx_2 - \int_{x_{2_{j-1/2}}}^{x_{2_{j+1/2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \Big|_{x=x_{i-1/2}} dx_2 dt = 0 \end{aligned}$$

Получим дивергентную схему

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{i,j,k} - \tilde{u}_{i,j,k+1} + \frac{4\tau}{h^2} \left[ \tilde{U}_{i+1/2,j,k+1/2} - 2\tilde{U}_{i,j,k+1/2} + \tilde{U}_{i-1/2,j,k+1/2} \right] + \\ & + \frac{4\tau}{h^2} \left[ \tilde{U}_{i,j+1/2,k+1/2} - 2\tilde{U}_{i,j,k+1/2} + \tilde{U}_{i,j-1/2,k+1/2} \right] = 0 \\ & \tilde{u}_{i,j,k+1} = \tilde{u}_{i,j,k} + \frac{4\tau}{h^2} \left[ \tilde{U}_{i+1/2,j,k+1/2} - 2\tilde{U}_{i,j,k+1/2} + \tilde{U}_{i-1/2,j,k+1/2} \right] + \\ & + \frac{4\tau}{h^2} \left[ \tilde{U}_{i,j+1/2,k+1/2} - 2\tilde{U}_{i,j,k+1/2} + \tilde{U}_{i,j-1/2,k+1/2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Промежуточные значения на  $k + 1/2$  слое будем искать с помощью явной схемы с шагом  $h/2$ . Для этого будет необходимо доопределить промежуточные точки путем усреднения соседних значений.

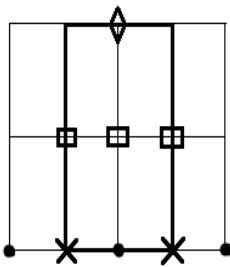


Рис. 3. Последовательность действий вычисления значения на новом слое для одномерного уравнения теплопроводности

● - известные значения

× - доопределяем эти значение путем усреднения соседних точек

□ - эти значения находим по явной схеме

◇ - искомое значение находим по дивергентной схеме

Изложенная дивергентная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по  $h$  и первый порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Для доказательства устойчивости разностной схемы воспользуемся спектральным признаком Неймана. Зададим начальное условие в виде двумерной гармоники, зависящей от двух вещественных параметров  $\alpha, \beta$ :

$$u_{ij}^0 = e^{I(\alpha i + \beta j)}, I^2 = -1, \alpha, \beta \in R$$

Тогда решение задачи при начальном условии имеет вид:

$$u_{ij}^k = \lambda^k e^{I(\alpha i + \beta j)}$$

Подставляя данную гармонику в схему получим:

$$\lambda = 1 - 16r \sin^2 \frac{\alpha}{4} - 16r \sin^2 \frac{\beta}{4} \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

Для выполнения условия устойчивости необходимо, чтобы спектр разностного оператора  $\lambda(\alpha, \beta)$  лежал в единичном круге, т.е.  $|\lambda(\alpha, \beta)| \leq 1$ . Откуда  $r \leq \frac{1}{16}$ .

Следовательно,  $\tau \leq \frac{h^2}{16}$ . При выполнении этого условия разностная схема будет устойчива.

### 3. Численный эксперимент

Для численной реализации дивергентной разностной схемы рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0$$

с начальными данными

$$u(x_1, x_2, t)|_{t=0} = \begin{cases} 100, & x_1 \in ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]), x_2 \in ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]) \\ 0, & x_1 \notin ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]), x_2 \notin ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]) \end{cases}$$

и краевыми условиями

$$u(x_1, x_2, t)|_{x_1=0} = 0, u(x_1, x_2, t)|_{x_2=0} = 0, u(x_1, x_2, t)|_{x_1=2} = 0, u(x_1, x_2, t)|_{x_2=2} = 0.$$

Результаты численных расчетов представлены визуально на рис.4–6.

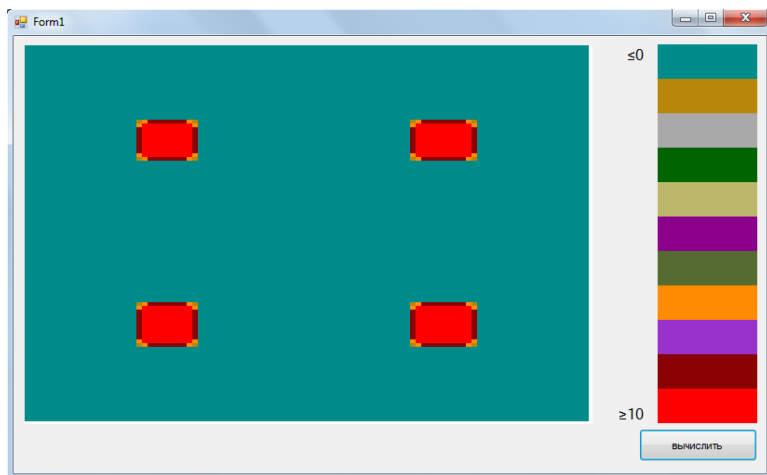


Рис.4. Распределения поля температуры в начальный момент времени

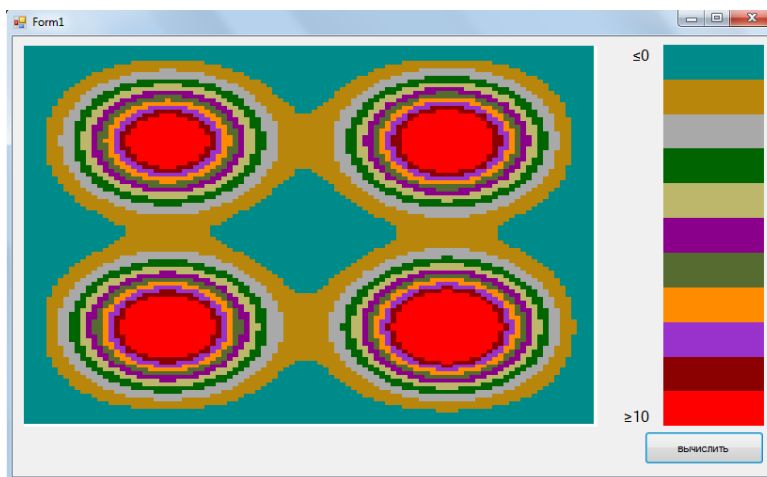


Рис.5. Распределение поля температуры на k-м слое (k=500)

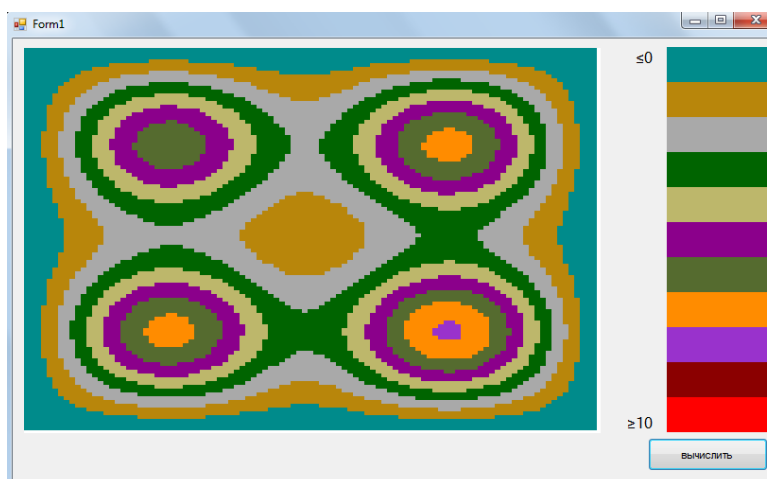


Рис.6. Распределение поля температуры на k-м слое (k=1000)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. Введение в теорию.–М.: Наука, 1977. – 440 с.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
3. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах. –М.: Высш. шк., 2008. – 480 с.

**КУДАШКИНА Е.А.**

## **ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ В ОБЛАСТИ ЭКОНОМИКИ ПО МОДЕЛИ СОЛОУ**

**Аннотация.** В статье рассматривается метод исследования экономического роста с помощью модели Солоу. Выявляются факторы, влияющие на непрерывный экономический рост в условиях устойчивой экономики. Определяются зависимости между темпами экономического роста и объемом инвестиций в основной капитал.

**Ключевые слова:** модель Солоу, капитал, труд, производство, потребление, инвестиции, темп роста.

**KUDASHKINA E.A.**

## **ECONOMICS COMPLEX SYSTEMS: SOLOW MODEL-BASED STUDIES**

**Abstract.** The article considers the Solow model to study the economic growth phenomenon. In this connection, the author reveals the factors that have an impact on the continuous economic growth under the conditions of a sustainable economy. The author also studies the interdependence of economic growth rate and capital investment volume.

**Keywords:** Solow model, capital, labor, production, consumption, investment, growth rate.

Неоклассические модели экономического роста, к числу которых относится модель Солоу, строятся на базе производственной функции и основаны на предпосылках полной занятости, гибкости цен на всех рынках, а также полной взаимозаменяемости факторов производства. Попытки исследовать, в какой степени качество факторов производства и различные пропорции в их сочетании воздействуют на экономический рост, привели к созданию модели производственной функции Кобба-Дугласа [1].

Функция Кобба-Дугласа получена в результате математического преобразования простейшей производственной функции  $Y = F(K, L)$  в такую модель, которая показывает, какой долей совокупного продукта вознаграждается участвующий в его создании фактор производства. Макроэкономическое равенство  $I = S$ , инвестиции равны сбережениям, лежит в основе механизма экономического роста одной из неоклассических моделей, которая базируется на производственной функции Кобба-Дугласа. Она называется моделью роста Солоу, по имени американского экономиста, лауреата Нобелевской премии Роберта Солоу [7]. Целями исследования по модели Солоу являются: достижение высоких и стабильных темпов роста, нахождение максимального объема потребления, влияние экономического роста на увеличение населения и внедрение новых технологий.



Разделив функцию  $Y = F(K, L)$  на количество труда  $L$ , мы получим производственную функцию для одного человека  $y = f(k)$ , где  $k = K/L$  – уровень капиталовооруженности единицы труда,  $y = Y/L$  – выпуск продукции в расчете на одного человека, или производительность труда ( $f(k) = F(k, 1)$ ).

Такая единичная производственная функция  $y = f(k)$  изображена на рисунке 1.

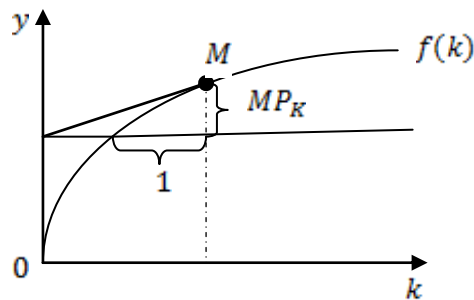


Рис. 1. Производственная функция.

В данной функции предельная производительность капитала  $MP_K$  измеряется постоянно меняющимся углом наклона кривой  $y = f(k)$  и показывает прирост выпуска, если капиталовооруженность работника возрастет на единицу, т.е.  $MP_K = f(k + 1) - f(k)$ .

Совокупный спрос в модели Солоу определяется инвестиционным и потребительским спросом. Уравнение выпуска продукции на одного работника имеет вид:  $y = c + i$ , где  $c$  и  $i$  – потребление и инвестиции.

Доход делится между потреблением и сбережениями в соответствии с нормой сбережения, так что потребление можно представить как  $c = (1 - s)y$ , где  $s$  – норма сбережения (накопления). Тогда  $y = c + i = (1 - s)y + i$ , откуда  $i = sy$ . В условиях равновесия инвестиции равны сбережениям и пропорциональны доходу. В результате условие равенства спроса и предложения может быть представлено как:

$$f(k) = c + i \text{ или } f(k) = i / s.$$

Производственная функция определяет предложение на рынке товаров, а накопление капитала – спрос на производственную продукцию. Объем же капитала меняется под воздействием инвестиции выбытия. Инвестиции в расчете на одного работника являются частью дохода, приходящегося на одного работника ( $i = sy$ ) или  $i = s * f(k)$ . Из этого следует, что, чем выше уровень капиталовооруженности  $k$ , тем выше уровень производства  $f(k)$  и больше инвестиции  $i$ .

В модели Р. Солоу норма сбережений – ключевой фактор, определяющий уровень устойчивости капиталовооруженности. Более высокая норма сбережений обеспечивает больший запас капитала и более высокий уровень производства [4].

Проведем исследование экономического роста промышленности Республики Мордовия по модели Солоу.

**Таблица 1.** Статистические данные показателей экономического роста промышленности Республики Мордовия за 2007, 2008 годы.

| Показатели                                 | Условные обозначения | Базовый период<br>2007 г. | 2008 г.  |
|--------------------------------------------|----------------------|---------------------------|----------|
| Объем продукции, тыс. руб.                 | $Y_t$                | 8960513                   | 13840763 |
| Расходы на потребление, тыс. руб.          | $C_t$                | 7168410                   | 10380572 |
| Сбережения, тыс. руб.                      | $S_t$                | 1792103                   | 3460191  |
| Производственный персонал, чел.            | $L_t$                | 86355                     | 87723    |
| Основные производственные фонды, тыс. руб. | $K_t$                | 16541000                  | 18813000 |
| Амортизация, тыс. руб.                     | $A_t$                | 303069                    | 385022   |

Объем произведенной продукции промышленности Республики Мордовия в году  $t$  по модели Солоу определяется с помощью производственной функции Кобба-Дугласа при  $A = 2,0153, \alpha = 0,75, \beta = 0,25$ , т.е:

$$Y_t = 2,0153 \cdot K_t^{0,75} \cdot L_t^{0,25}.$$

При исследовании экономического роста промышленности Республики Мордовия за базовый период возьмем 2007 год. Тогда из таблицы 1 видно, что на исследуемый момент численность производственного персонала  $L_0 = 86355$  человек и объем производственных фондов  $K_0 = 16541000$  тысячи рублей, тогда базовое значение объема продукции равно:

$$Y_0 = 2,0153 \cdot 16541000^{0,75} \cdot 86355^{0,25} = 8960513 \text{ тыс.руб.}$$

Пользуясь таблицей 1, найдем норму сбережения  $s$  и норму амортизации  $d$  в базовом 2007 году:

$$s = \frac{S_0}{Y_0} = \frac{1792103}{8960513} = 0,2, d = \frac{A_0}{K_0} = \frac{303069}{16541000} = 0,018.$$

Показатель темпа роста производственного персонала  $n$  вычисляется исходя из уравнения динамики трудовых ресурсов модели Солоу:  $\frac{L_t - L_{t-1}}{L_{t-1}} = n$ . В нашем случае

$$n = \frac{87650 - 86355}{86355} = 0,015.$$

Вычислим остальные показатели:

$$y_0 = \frac{Y_0}{L_0} = \frac{8960513}{86355} = 103,76, k_0 = \frac{K_0}{L_0} = \frac{16541000}{86355} = 191,5 \text{ тыс. руб.},$$

$$q_0 = \frac{Y_0}{K_0} = \frac{8960513}{16541000} = 0,542, c_0 = (1 - s)y_0 = 0,8 \cdot 103,76 = 83,01 \text{ тыс. руб.}$$

Проверим выполнение условия равновесного роста:

$$s \cdot y_0 = 0,2 \cdot 103,76 = 20,75 \text{ тыс. руб.}, (n + d)k_0 = 0,033 \cdot 191,5 = 6,32 \text{ тыс. руб.},$$

$$s \cdot y_0 > (n + d)k_0.$$

В такой ситуации равновесный рост невозможен, так как объем сбережений (20,75 тыс. руб.) превышает объем инвестиций (6,32 тыс. руб.), необходимый для оснащения используемого труда на уровне  $k_0 = 191,5$  тыс. руб., что свидетельствует об избытке предложения капитала, и его цена снизится. В данном случае для обеспечения равенства  $s \cdot y_0 = (n + d)k_0$  нужно повысить капиталовооруженность труда.

Для равновесного роста промышленности Республики Мордовия необходимо, чтобы в 2008 году объем основных производственных фондов возрос на  $0,2 \cdot 8960513 = 1792103$  тыс. руб., т.е.  $K_1 = 18333103$  тыс. руб. Принимая во внимание, что в 2008 году численность производственного персонала возрастает до  $L_1 = (1 + 0,015)L_0 = 1,015 \cdot 86355 = 87650$  человек, вычислим в этом году значение объема продукции:

$$Y_1 = 2,0153 \cdot K_1^{0,75} \cdot L_1^{0,25} = 2,0153 \cdot 18333103^{0,75} \cdot 87650^{0,25} = 9715274,3 \text{ тыс. руб.}$$

Вычислим остальные показатели за 2008 год:

$$y_1 = \frac{Y_1}{L_1} = \frac{9715274,3}{87650} = 110,84 \text{ тыс. руб.}, k_1 = \frac{K_1}{L_1} = \frac{18333103}{87650} = 209,16 \text{ тыс. руб.},$$

$$q_1 = \frac{Y_1}{K_1} = \frac{9715274,3}{18333103} = 0,53, c_1 = (1 - s)y_1 = 0,8 \cdot 110,84 = 88,67 \text{ тыс. руб.}$$

Темп роста основных фондов, равный  $\frac{K_1 - K_0}{K_0} = \frac{18333103 - 16541000}{16541000} = 0,1083,$

превышает темп роста объема продукции, равный  $\frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} = \frac{9715274,3 - 8960513}{8960513} = 0,0842,$  и

условие равновесного роста не выполняется.

Для обеспечения равенства  $s \cdot y_t = (n + d)k_t$  требуется дальнейшее повышение капиталовооруженности труда. Так будет продолжаться до достижения равенства  $0,2 \cdot y_t = 0,033 \cdot k_t$ , т.е. до достижения устойчивого уровня капиталовооруженности  $k^* = 22254,8$  тыс. руб. и максимального уровня потребления на одного работника  $c^* = 2937,6$  тыс. руб.

Сравним основные количественные показатели, полученные при исследовании экономического роста промышленности Республики Мордовия по модели Солоу за 2008 год, с реальными количественными показателями промышленности Республики Мордовия из таблицы 1 за 2008 год, используя таблицу 2.

Таблица 2. Сравнение показателей, полученных при исследовании экономического роста промышленности Республики Мордовия по модели Солоу

| Показатели                                 | Из таблицы (2008 г.) | По модели Солоу (2008 г.) |
|--------------------------------------------|----------------------|---------------------------|
| Объем продукции, тыс. руб.                 | 13840763             | 9715274,3                 |
| Производственный персонал, чел.            | 87723                | 87650                     |
| Основные производственные фонды, тыс. руб. | 18813000             | 18333103                  |

Различия объясняются тем, что в модели Солоу норма сбережения, норма амортизации и показатель темпа роста трудовых ресурсов являются постоянными величинами на рассматриваемом количестве периодов, а в действительности они изменяются. Модель не включает также целый ряд ограничений роста, существенных в современных условиях, - ресурсных, экологических, социальных. В модели не отражены возможности повышения эффективности производства, технического прогресса. Используемая в модели функция Кобба-Дугласа, описывая лишь определенный тип взаимодействия факторов производства, не всегда отражает реальную ситуацию в экономике.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агапова Т.А., Серегина С.Ф. Макроэкономика. – М.: Дело и сервис, 1997. – 376 с.
2. Острейковский В.А. Теория систем. – М.: Высшая школа, 1997. – 240 с.
3. Петров А.А. Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1996. – 251 с.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Компьютеры и жизнь. – М., Педагогика, 1987. – 545с.
5. Самарский А.А. Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - М., 2001. – 342с.
6. Советов Б.Я. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 2001. – 275с.
7. Форрестер Д. Мировая динамика. – М.: АСТ, 2003. – 379с.

**КУЛИШОВА С.Ю.**

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАНДАРТА SCORM ДЛЯ СОЗДАНИЯ КУРСОВ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ**

**Аннотация.** В статье приводится краткий обзор программного обеспечения для создания SCORM совместимого контента и пример разработки SCORM-объекта.

**Ключевые слова:** стандарт SCORM, дистанционное образование, тесты.

**KULISHOVA S.YU.**

## **SCORM STANDARD FOR DESIGNING E-LEARNING COURSES**

**Abstract.** The article presents are view of the software to develop SCORM compliant content. In this connection, the author considers a sample SCORM-object designing.

**Keywords:** SCORM standard, distance learning, tests.

Одним из актуальных направлений развития интернет-технологий является разработка спецификаций и стандартов для систем дистанционного обучения. Одним из таких стандартов является стандарт SCORM, предназначенный для обмена учебными материалами.

Для создания SCORM совместного контента может быть использовано следующее программное обеспечение: AdobePresenter – это программный инструмент, позволяющий быстро создавать материалы для электронного обучения и мультимедийные презентации, iSpringSuite – русскоязычный инструмент разработки электронных курсов, iSpringPro – русскоязычный конвертер PowerPoint-презентаций в Flash, iSpringQuizMaker – программа для создания интерактивных тестов, iSpringConverter – конвертер PowerPoint-презентаций в HTML5-курсы, PowerPointForceRU – надстройка в MS PowerPoint и позволяет пересохранить презентации PowerPoint в форматы SCORM 1.2 или 2004, AdvancedSCORMEditor и HotPotatoes – инструментальные оболочки, позволяющие самостоятельно создавать различные задания и тесты для контроля и самоконтроля.

Для примера создадим SCORM-объект с использованием программы eXe, разработанной Оклендским Технологическим Университетом и предназначенной для создания курсов электронного обучения. Программа распространяется бесплатно, имеет открытый исходный код и базируется на веб-браузере MozillaFireFox. С помощью данной программы можно создавать курсы, которые могут включать в себя различный материал в виде Web-страниц, видеороликов, рисунков. Она также может включать в себя и проверку знаний. Допустим, предполагаемый электронный ресурс содержит сведения по одному из разделов дисциплины «Численные методы» и предполагает проверку знаний обучаемого.

Кроме этого для большей эффективности обучения необходимо разместить примеры, содержащие таблицы и математические выражения.

Воспользуемся инструментом «Freetext» для вставки текста и редактируем его (рис. 1).

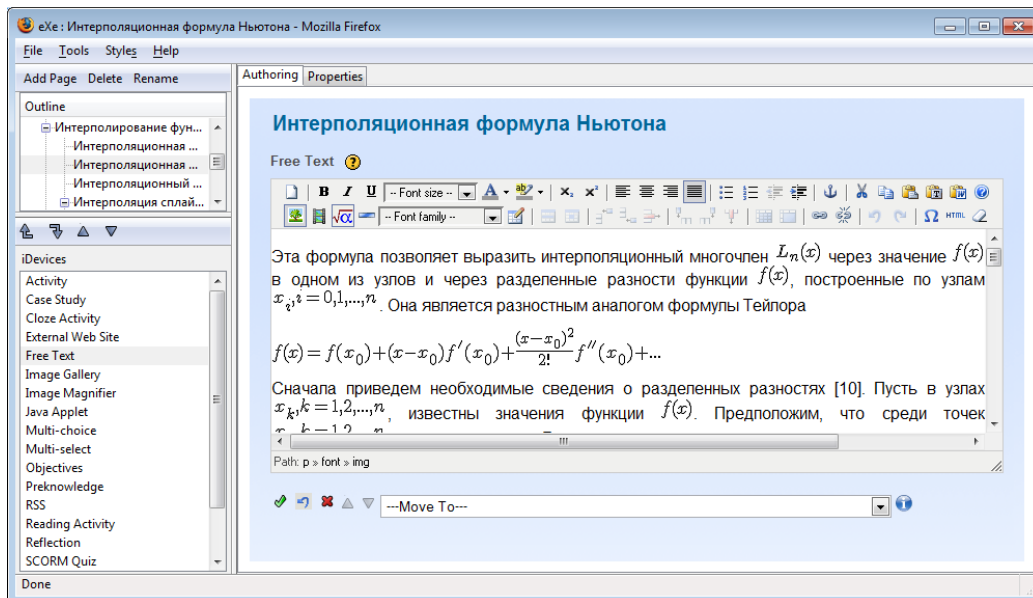


Рис. 1 – Окно редактирование текста

Для размещения формул необходимо использовать команду «Objectives» и набирать формулы, используя макропакет системы компьютерной вёрстки LaTeX (рис.2).

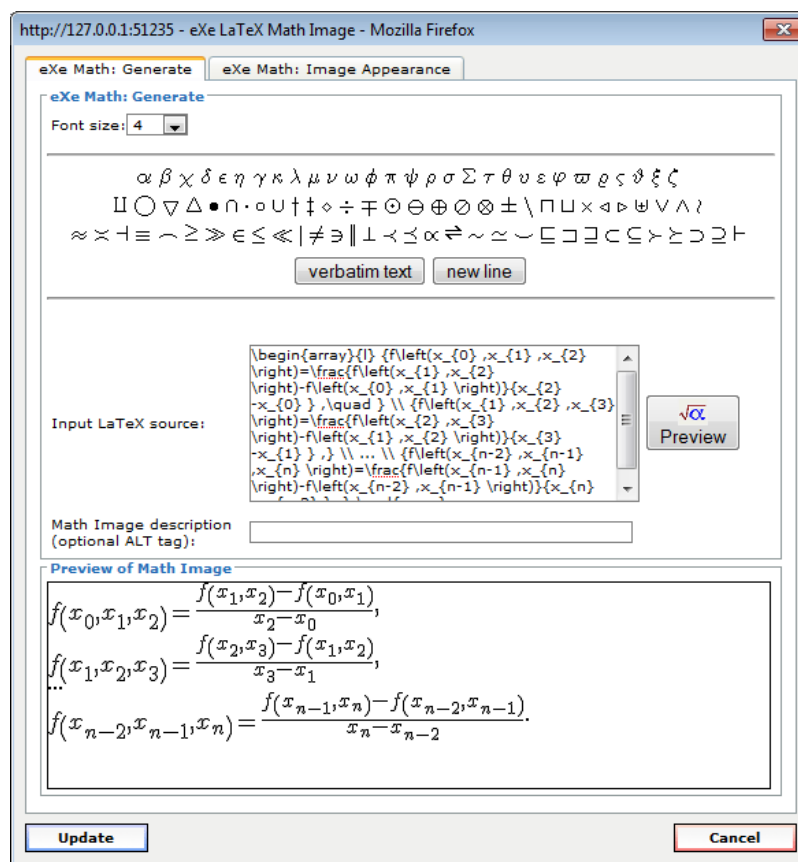


Рис. 2 – Окно ввода формул

Для оценки эффективности усвоения материала с помощью инструмента «SCORM Quiz» добавляем тест, содержащий вопросы по материалу и необходимое количество вариантов ответа. Выбрать верный ответ можно с помощью радиокнопки. В режиме редактирования данный процесс выглядит следующим образом (рис. 3).

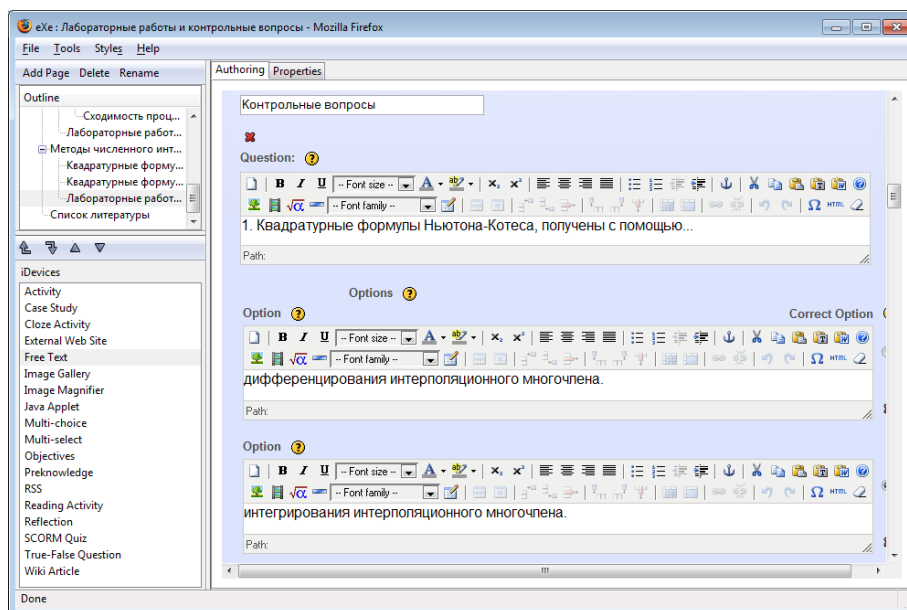


Рис. 3 – Добавление теста в раздел «Методы численного интегрирования»

В результате получим следующий фрагмент учебного электронного ресурса (рис.4).

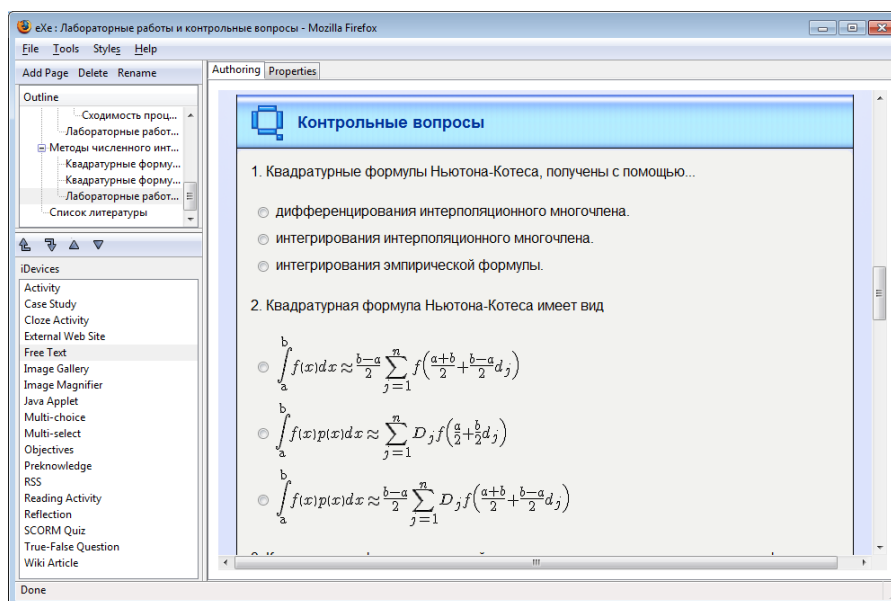


Рис. 4 – Контрольные вопросы к разделу «Методы численного интегрирования»

Для завершения работы сохраняем данный проект в формате SCORM package v. 1.2., как показано на рисунке 5.

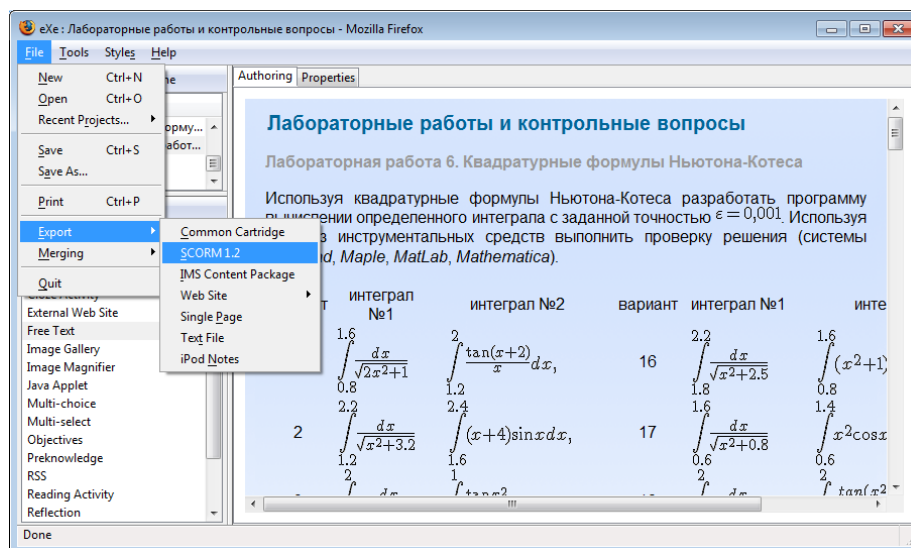


Рис. 5. – Сохранение проекта в формате SCORM package v. 1.2.

Здесь перечислены далеко не все возможности программы eXe, однако даже их достаточно для того, что бы создать несложный работоспособный SCORM-объект.

В заключении, следует отметить, что технологии дистанционного обучения не стоят на месте и быстро развиваются, что рано или поздно приведет к необходимости серьезной модернизации стандарта дистанционного обучения SCORM. Некоторое время назад была инициирована процедура разработки стандарта SCORM следующего поколения. На текущий момент был осуществлен сбор предложений по модернизации стандарта SCORM, но работы начаты не были.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Advanced Distributed Learning (ADL). – [Электронный ресурс]. – Режимдоступа: <http://www.edu.ru/db/portal/e-library/00000053/SCORM-2004.pdf>
2. Стандарт SCORM и его применение. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://cccp.ifmo.ru/scorm/>



**КЯШКИН А.А.**

## **ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Аннотация.** В статье описывается веб-приложение по построению фазовых портретов систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости. Для численного решения задачи Коши используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Приведены примеры фазовых портретов.

**Ключевые слова:** фазовый портрет, система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Рунге-Кутты 4-го порядка, задача Коши.

**KYASHKIN A.A.**

## **CONSTRUCTION OF PHASE PORTRAITS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS**

**Abstract.** The article describes a web application on the construction of phase portraits of ordinary differential equations systems on the plane. The author uses the Runge-Kutta method of 4th order for the Cauchy problem numerical solution. In this connection, the examples of phase portraits are presented.

**Keywords:** phase portrait, ordinary differential equations system, Runge-Kutta method of 4th order, Cauchy problem.

Очень часто в процессе решения задач, возникающих при математическом моделировании многих реальных явлений, приходится узнавать, как поведет себя то или иное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вблизи особых точек. Но поскольку точные решения систем ОДУ могут быть получены лишь для небольшого числа задач, требуется применение приближенных (аналитических и численных) методов решения подобных задач [1, с.347]. Как следствие этого, необходимы программные средства, позволяющие визуализировать фазовые портреты систем ОДУ.

Отметим, что строить фазовые портреты систем ОДУ позволяют почти все существующие математические пакеты: Mathcad, Matlab, Scilab и др. Но во всех случаях для визуализации приходится набирать программный код и вручную строить фазовые траектории, необходимые для создания целостной картины фазовых портретов систем ОДУ, что является весьма трудоемким процессом. Поэтому актуален вопрос об упрощении их построения с помощью создания приложения, облегчающего процедуру создания фазовых портретов. Такое приложение, как правило, должно обладать удобным интерфейсом и некоторыми элементами автоматизации построения фазовых портретов систем ОДУ.

Для построения фазовых портретов будем рассматривать следующую подзадачу – задачу Коши для системы двух ОДУ:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y, z), & y(x_0) = y_0, \\ z'(x) = g(x, y, z), & z(x_0) = z_0. \end{cases} \quad (1)$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка в данном случае будет имеет вид [2, с.303]:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h_{i+1}}{6}(K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}), \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{h_{i+1}}{6}(L_{1,i} + 2L_{2,i} + 2L_{3,i} + L_{4,i}), \end{aligned} \quad (2)$$

для  $i = \overline{0, n-1}$ , где

$$\begin{aligned} K_{1,i} &= f(x_i, y_i, z_i), \\ L_{1,i} &= g(x_i, y_i, z_i), \\ K_{2,i} &= f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{1,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{1,i}\right), \\ L_{2,i} &= g\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{1,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{1,i}\right), \\ K_{3,i} &= f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{2,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{2,i}\right), \\ L_{3,i} &= g\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_i + \frac{1}{2}h_{i+1}K_{2,i}, z_i + \frac{1}{2}h_{i+1}L_{2,i}\right), \\ K_{4,i} &= f(x_i + h_{i+1}, y_i + h_{i+1}K_{3,i}, z_i + h_{i+1}L_{3,i}), \\ L_{4,i} &= g(x_i + h_{i+1}, y_i + h_{i+1}K_{3,i}, z_i + h_{i+1}L_{3,i}). \end{aligned} \quad (3)$$

На основе рассмотренного численного метода (2)-(3) для задачи (1) с помощью средств веб-программирования было написано приложение, позволяющее визуализировать фазовые портреты систем ОДУ. Приведем результаты работы этой программы на нескольких примерах построения фазовых портретов.

Во всех рассмотренных примерах:  $n$  – число точек для построения каждой фазовой траектории,  $a$  и  $b$  – границы отрезка  $[a, b]$  по оси  $Ox$ ,  $c$  и  $d$  – границы отрезка  $[c, d]$  по оси  $Oy$ ,  $t_0$  и  $t_1$  – начальный и конечный промежутки по времени.

*Пример 1.*

$$\begin{cases} \dot{x} = -1.4 \cdot x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Фазовый портрет является устойчивым узлом. Выберем следующие значения:  $n = 300$ ,  $a = -8$ ,  $b = 8$ ,  $c = -8$ ,  $d = 8$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 1.

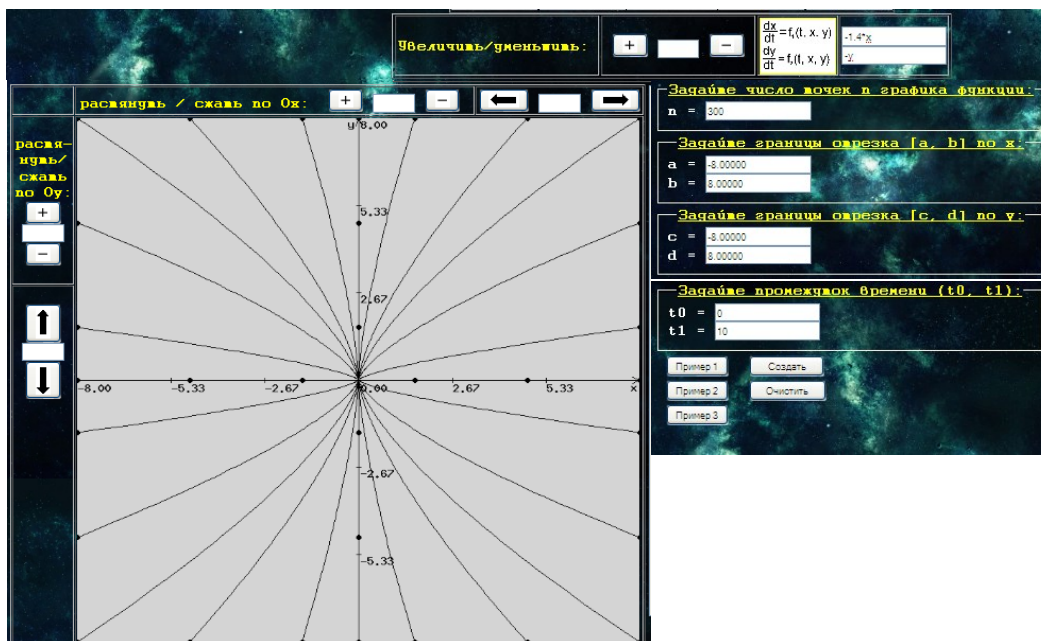


Рис. 1. Устойчивый узел

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1.4 \cdot x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Фазовый портрет является седлом. Выберем следующие значения:  $n=300$ ,  $a=-16$ ,  $b=16$ ,  $c=-16$ ,  $d=16$ ,  $t_0=0$ ,  $t_1=10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 2.

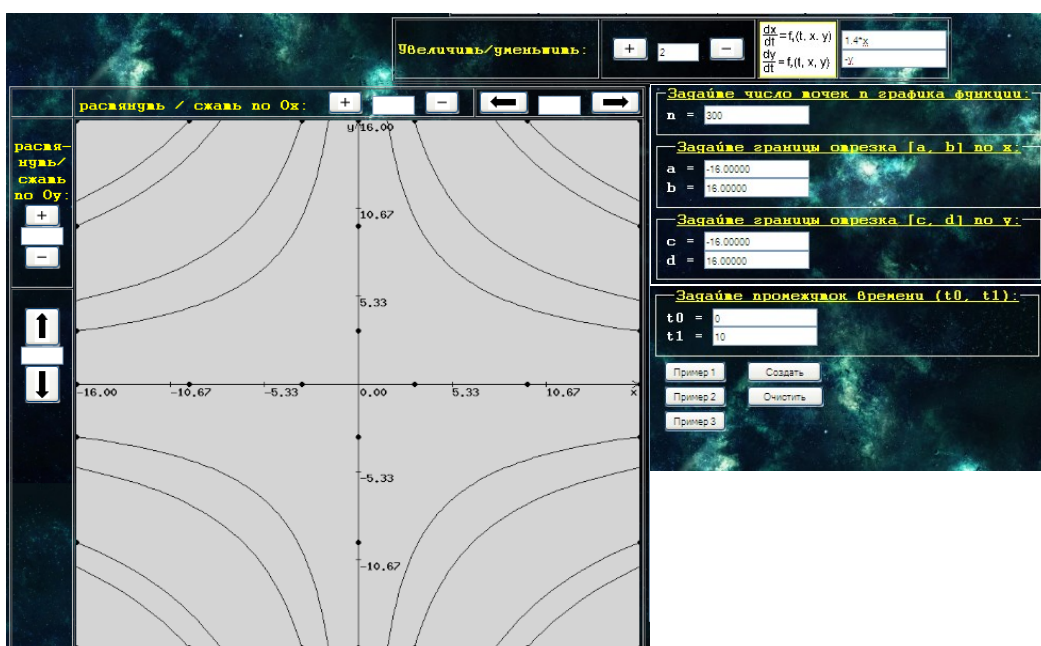


Рис. 2. Седло

Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Фазовый портрет является устойчивым фокусом. Выберем следующие значения:  $n = 300$ ,  $a = -8$ ,  $b = 8$ ,  $c = -8$ ,  $d = 8$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 3.

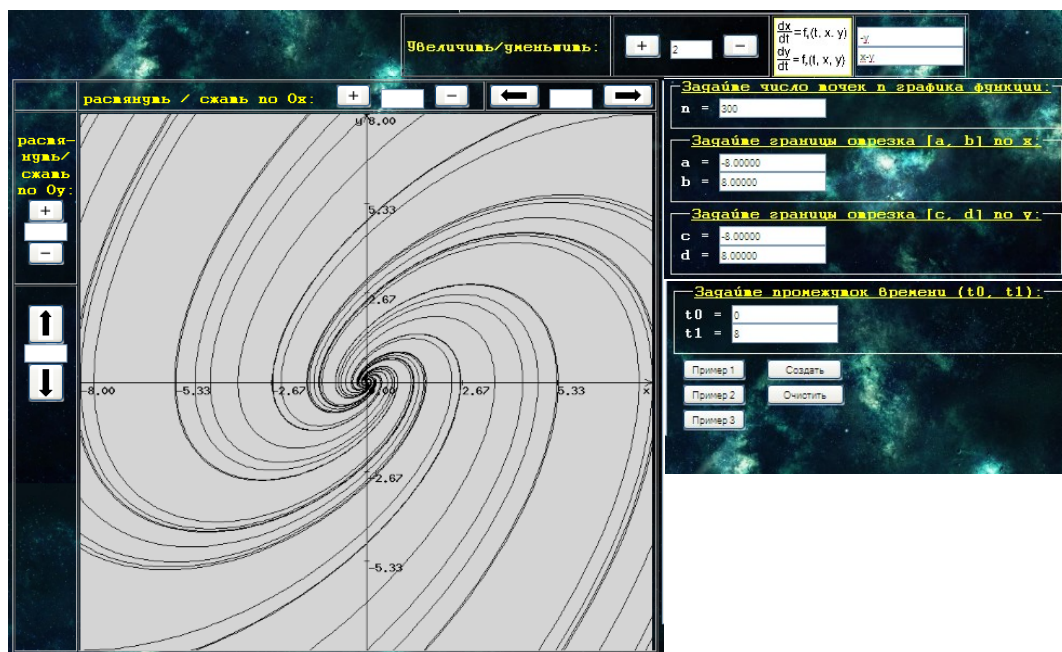


Рис. 3. Устойчивый фокус

Пример 4.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Фазовый портрет является центром. Выберем следующие значения:  $n = 200$ ,  $a = -8$ ,  $b = 8$ ,  $c = -8$ ,  $d = 8$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10$ . Результат работы программы представлен на рисунке 4.

На рисунках 1-4 видно, что приложение верно строит фазовые портреты для всех примеров приведенных систем ОДУ. При этом фазовые траектории строятся автоматически, и нет необходимости вручную задавать начальные значения для решений задач Коши.

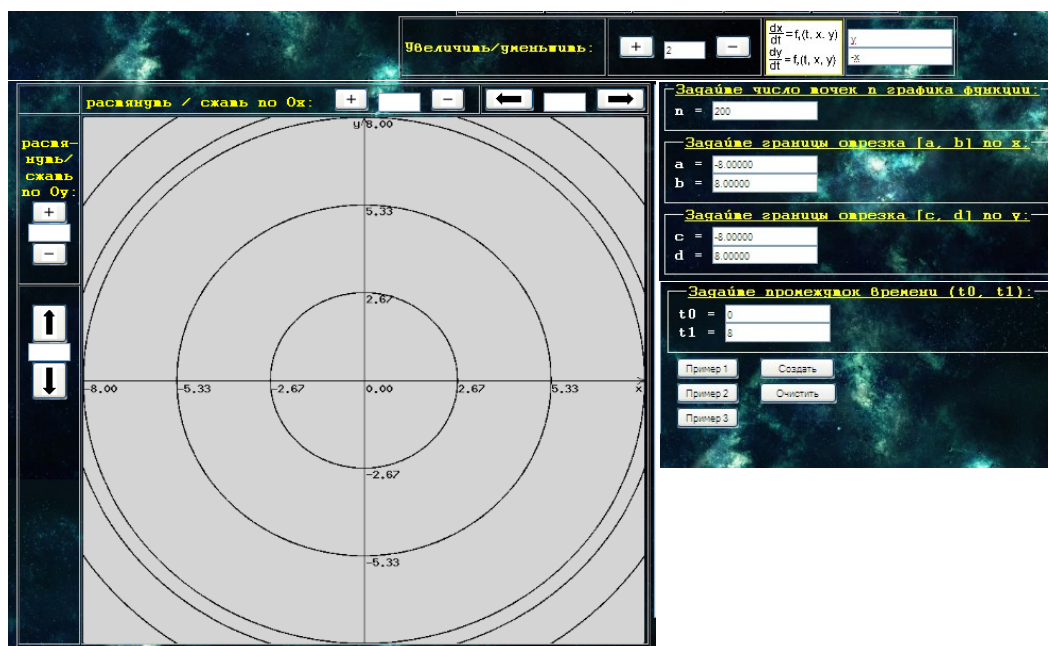


Рис. 4. Центр

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чичкарёв Е. А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов. – М.: ALT Linux, 2012. – 384 с.
2. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие / 2-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.

**КЯШКИН А.А., ШАМАНАЕВ П.А.**

**ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
КОНСЕРВАТИВНОГО АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ**

**Аннотация.** В статье приводится визуализация решений первой краевой задачи для консервативного автономного уравнения Дуффинга методом нахождения решения в виде ряда, методами стрельбы и квазилинеаризации. На основе полученных результатов делается вывод о найденных приближенных аналитических решениях.

**Ключевые слова:** визуализация решений, консервативное автономное уравнение Дуффинга, первая краевая задача, решение в виде ряда, метод стрельбы, метод квазилинеаризации.

**KYASHKIN A.A., SHAMANAEV P.A.**

**VISUALIZATION OF FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTIONS FOR  
CONSERVATIVE AUTONOMOUS DUFFING EQUATION BY USING METHODS OF  
RAMIFICATION THEORY**

**Abstract.** The article provides a visualization of the first boundary value problem solutions for the conservative autonomous Duffing equation by using the method of series solution, the shooting method, and quasilinearization. Considering the study results, it is draw a conclusion about the approximate analytical solutions.

**Keywords:** solutions visualization, conservative autonomous Duffing equation, first boundary value problem, series solution, shooting method, quasilinearization method.

Как правило, для описания физических процессов в теории колебаний применяются математические модели. Осциллятор Дуффинга или осциллятор с кубической нелинейностью является одной из наиболее распространенных моделей теории колебаний. Он рассматривается во многих работах, например, в [2] и [4]. Уравнение осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0.$$

Его можно получить, если рассматривать колебания математического маятника при небольших углах отклонения, колебания груза на пружине с нелинейной возвращающей силой, расположенной на плоской горизонтальной поверхности. Данное уравнение также можно получить при описании движения частицы в потенциале из двух ям [1, с.6].

В связи с невозможностью отыскания точного аналитического решения уравнения Дуффинга стоит вопрос об отыскании приближенных аналитических решений и численных

решений данного уравнения. В связи с этим задача, рассматриваемая в данной статье, является актуальной.

Рассмотрим модель, описывающую консервативный автономный осциллятор Дуффинга [1, с.19], называемый также идеальным осциллятором:

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0.$$

Произведя замену переменных  $x \leftrightarrow y$ ,  $t \leftrightarrow x$  и выбрав следующие значения параметров:  $\beta = \varepsilon + 1$ ,  $\gamma = -1$  (где  $\varepsilon$  – малый параметр), будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения Дуффинга:

$$y'' + y = -\varepsilon y + y^3, \quad -\pi < x < \pi, \quad \varepsilon \in \mathfrak{R}; \quad (1)$$

$$y(-\pi) = 1/2, \quad x = -\pi; \quad y(\pi) = 1/2, \quad x = \pi, \quad (2)$$

которая получается из краевой задачи, исследовавшейся в статье [3], с помощью фиксирования краевых условий:  $y(-\pi) = y(\pi) = 1/2$ .

В целях данной статьи были исследованы решения краевой задачи (1)-(2), в результате чего была получена зависимость числа различных решений  $y \in \mathfrak{R}$  от параметра  $\varepsilon$ , приведенная в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость числа приближенных решений  $y \in \mathfrak{R}$  от параметра  $\varepsilon \in \mathfrak{R}$ , где  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$ ,  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$ ,  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$ .

| Число различных решений $y \in \mathfrak{R}$ | 0                    | 3                   | 2                                | 5                   | 4                                | 7                   | 6                      |
|----------------------------------------------|----------------------|---------------------|----------------------------------|---------------------|----------------------------------|---------------------|------------------------|
| $\varepsilon$                                | $[0, \varepsilon_1)$ | $\{\varepsilon_1\}$ | $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ | $\{\varepsilon_2\}$ | $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ | $\{\varepsilon_3\}$ | $(\varepsilon_3, 1/4)$ |

Приведем графики найденных приближенных аналитических решений краевой задачи (1)-(2) при выбранных значениях  $\varepsilon$ :  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$ ,  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$ ,  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$  методами нахождения решения в виде ряда с коэффициентами до 4-го порядка, стрельбы (см. [6, с.180]) с использованием метода Нюрстрёма 5-го порядка [7, с.278] и квазилинеаризации (см. [5, с.260]) с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

1. При  $\varepsilon = \varepsilon_1 \approx 0,11439$  получаем 3 решения (см. таблицу 1):

$$y_{1,2}(x, \varepsilon_1) \approx \mp 0,0001 \sin(3x) + 0,0027 \cos(3x) \pm 0,0044 \sin(x) - 0,5027 \cos(x), \quad (3)$$

$$y_3(x, \varepsilon_1) \approx 0,0027 \cos(3x) - 0,5027 \cos(x). \quad (4)$$

*Замечание.* Знаки «+/-» для решений (3) для  $y_1$  выбираются верхние, для  $y_2$  – нижние. Для других подобных случаев знаки выбираются тем же образом.

Визуализация приближенных решений выбранными методами при заданном  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$  имеет вид, указанный на рисунке 1.

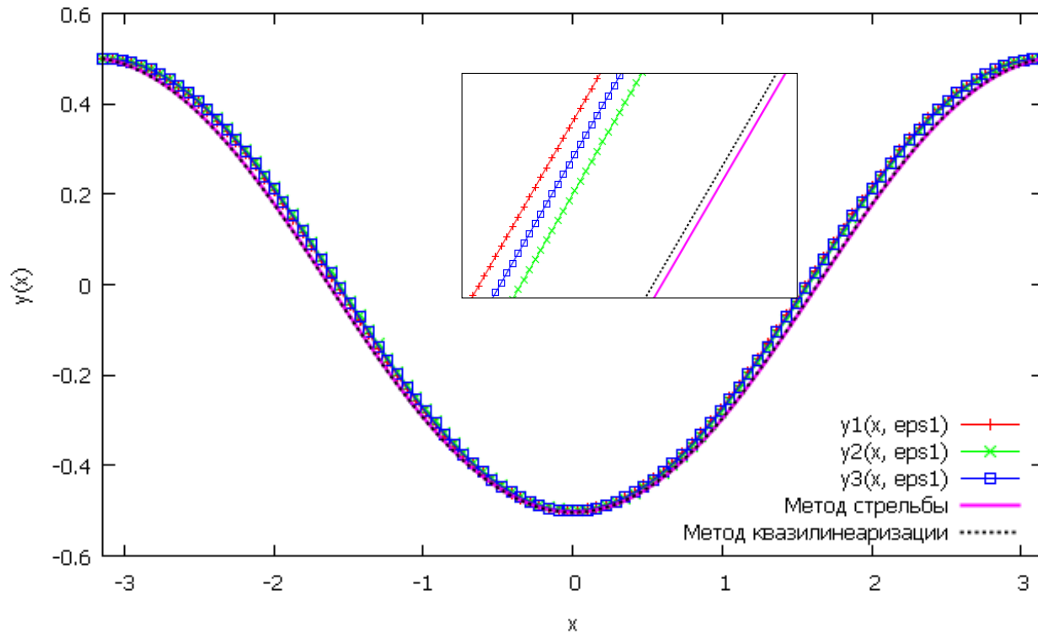


Рис. 1. Визуализация приближенных решений задачи (1)-(2) при выбранном  $\varepsilon_1 \approx 0,11439$  методом нахождения решения в виде ряда (решения (3)-(4)); методами стрельбы и квазилинеаризации с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

2. При  $\varepsilon = \varepsilon_2 \approx 0,24937$  получаем 5 решений:

$$y_{1,2}(x, \varepsilon_2) \approx \mp 0,5566 \sin(3x) + 9,8789 \cos(3x) \pm 0,1947 \sin(x) - 10,3789 \cos(x), \quad (5)$$

$$y_{3,4}(x, \varepsilon_2) \approx \pm 9,8876 \sin(3x) - 0,3704 \cos(3x) \pm 10,3799 \sin(x) - 0,1296 \cos(x), \quad (6)$$

$$y_5(x, \varepsilon_2) \approx 9,8945 \cos(3x) - 10,3807 \cos(x). \quad (7)$$

Визуализация приближенных решений выбранными методами при заданном  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$  имеет вид, указанный на рисунке 2.

3. При  $\varepsilon = \varepsilon_3 \approx 0,24943$  получаем 7 решений:

$$y_{1,2}(x, \varepsilon_3) \approx \mp 4,9862 \sin(3x) + 10,265 \cos(3x) \pm 1,635 \sin(x) - 10,765 \cos(x), \quad (8)$$

$$y_{3,4}(x, \varepsilon_3) \approx \pm 11,4056 \sin(3x) - 0,3793 \cos(3x) \pm 10,8877 \sin(x) - 0,1207 \cos(x), \quad (9)$$

$$y_{5,6}(x, \varepsilon_3) \approx \mp 0,7742 \sin(3x) - 11,3856 \cos(3x) \pm 0,2464 \sin(x) + 10,8856 \cos(x), \quad (10)$$

$$y_7(x, \varepsilon_3) \approx 10,8884 \cos(x) - 11,4119 \cos(3x). \quad (11)$$

Визуализация приближенных решений выбранными методами при заданном  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$  имеет вид, указанный на рисунке 3.



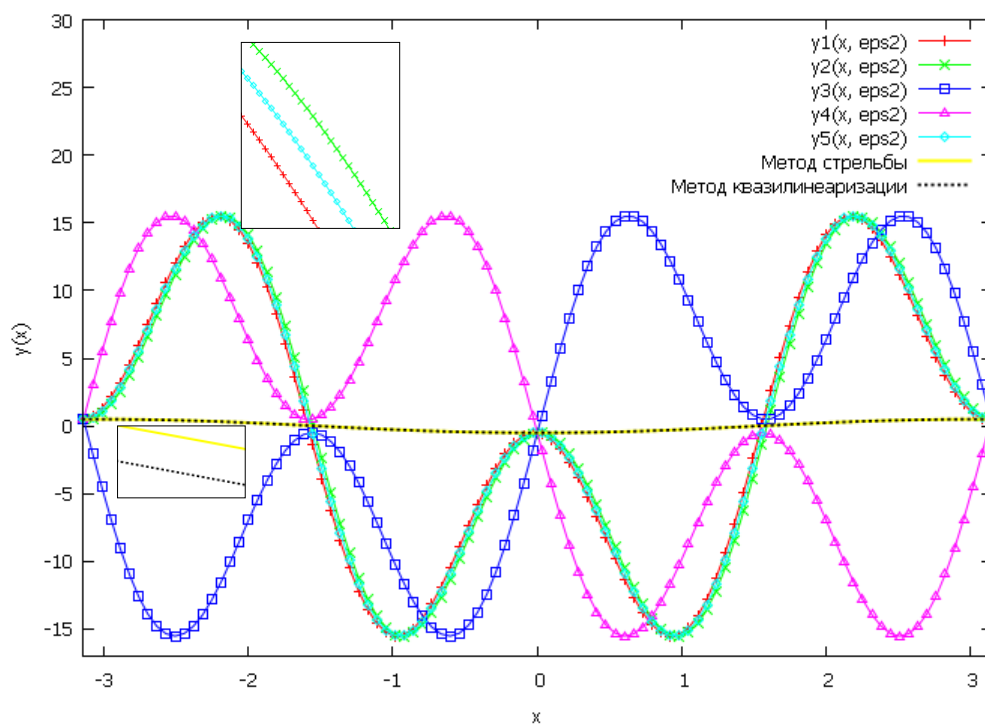


Рис. 2. Визуализация приближенных решений задачи (1)-(2) при выбранном  $\varepsilon_2 \approx 0,24937$  методом нахождения решения в виде ряда (решения (5)-(7)); методами стрельбы и квазилинеаризации с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

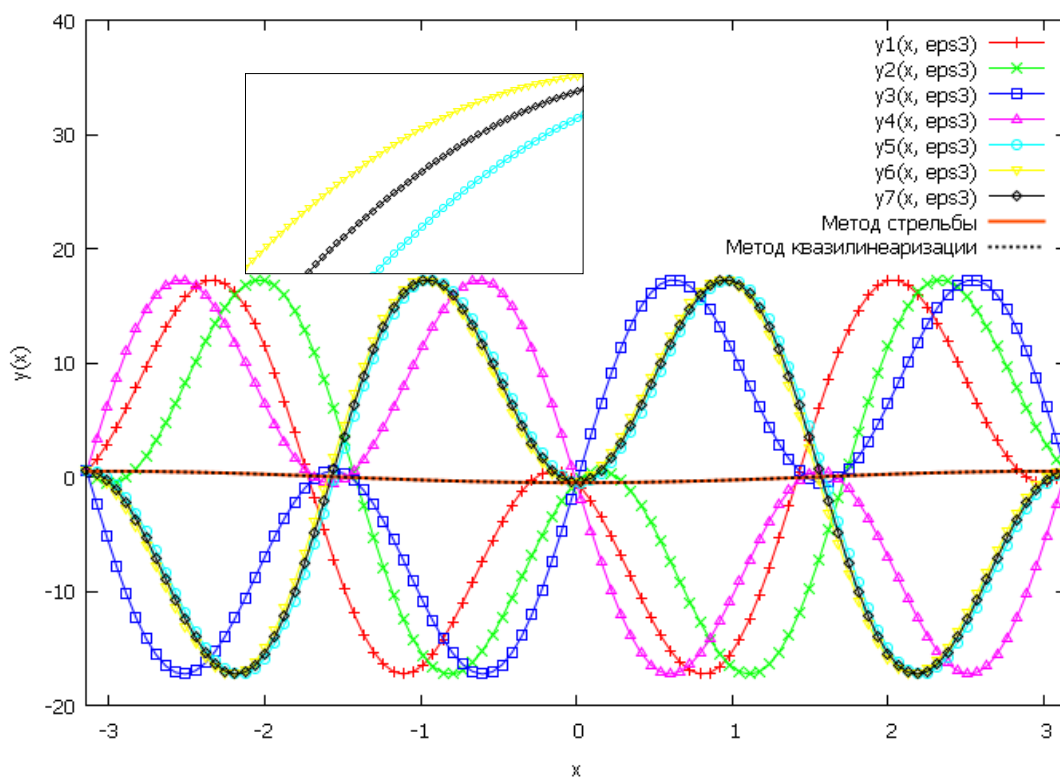


Рис. 3. Визуализация приближенных решений задачи (1)-(2) при выбранном  $\varepsilon_3 \approx 0,24943$  методом нахождения решения в виде ряда (решения (8)-(11)); методами стрельбы и квазилинеаризации с шагом  $h = 0,001$  и точностью  $toch = 0,01$ .

В целях данной статьи были исследованы графики полученных приближенных решений, и было установлено, что при  $\varepsilon$ , близких к  $\varepsilon_1$ , приближенное аналитическое решение методом разложения в ряд (при коэффициентах до 4-го порядка) будет близко к численным решениям, полученным методами стрельбы и квазилинеаризации. При  $\varepsilon$ , приближающихся к  $\varepsilon_2$  и более, видно, что выбранного числа членов ряда явно недостаточно для корректного приближения аналитического решения. Это также видно на рисунках 1-3 при выбранных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В. Осциллятор Дуффинга: Учебное пособие для студентов вузов. – Саратов: СГУ, 2007. – 53 с.
2. Бурд В.Ш. К вопросу о сопряженных резонансах. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=170>
3. Кяшкин А.А., Шаманаев П.А. Нахождение малых решений дифференциального уравнения 2-го порядка с помощью построения уравнения разветвления // Актуальные вопросы прикладной математики: сб. науч. тр. – Саранск: СВМО, 2013. – С.20-24.
3. Манучарян Г.В. Взаимная неустойчивость фазовых траекторий и хаотическое поведение нелинейных механических систем // ФП ФИП PSE. – 2003. – Т. 1, № 3–4. – С. 347-351.
4. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.
5. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2004. – 400 с.
6. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Пер. с англ. – М.: Мир, – 1990. – 512 с.

МИХЕЕВ Д.С., ПИЧУШКИН М.М.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА

**Аннотация.** В статье рассмотрены уравнения, описывающие движение жидкостей и газов, в код программы для моделирования задач гидродинамики cfd\_2d, разрабатываемой на кафедре прикладной математики, добавлена возможность расчёта течений вязкого газа. Также проведён анализ решения типовых задач.

**Ключевые слова:** гидродинамика, вязкость, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса.

MIKHEEV D.S., PICHUSHKIN M.M.

## COMPUTER SIMULATION OF VISCOUS GAS FLOWS

**Abstract.** The article considers equations to describe fluid and gas motions. Particularly, the authors have added formulas for viscous fluid flows computing to the code of fluid mechanics computational program cfd\_2d developed by the Chair of Applied Mathematics. The article also includes an analysis of typical problems.

**Key words:** fluid mechanics, viscosity, computational simulation, Navier-Stokes equations.

Многие вопросы современной науки и техники в той или иной мере связаны с решением уравнений газовой динамики, описывающих движение сплошной сжимаемой среды. Одними из важнейших уравнений являются уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкой ньютоновской жидкости. Они широко применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач.

Для прямоугольной декартовой системы координат  $(x, y)$  все уравнения, входящие в систему уравнений Навье-Стокса, можно записать в следующей общей консервативной форме [2]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^e - \partial F^v}{\partial x} + \frac{\partial G^e - \partial G^v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

где консервативные переменные  $U$  и декартовы компоненты  $F^e$  и  $G^e$  функции невязкого потока и компоненты  $F^v$  и  $G^v$  функции вязкого потока заданы в виде:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}; F^e = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}; G^e = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix};$$

$$F^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{yx} \end{pmatrix}; G^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} \end{pmatrix};$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $u, v$  – компоненты вектора скорости;  $E$  – полная внутренняя энергия,  $t$  – время,  $p$  – давление.

Компоненты тензора вязких напряжений и вектора плотности теплового потока выражаются по формулам:

$$\tau_{xx} = \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\tau_{yy} = \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

где  $\lambda$  – коэффициент объёмной вязкости,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

В рамках данной работы в пакет программ cfd-2d [1] был добавлен код, отвечающий за расчёт вязких потоков.

Для расчёта целевых значений в программе используется метод конечных объёмов [2]. В качестве контрольного объёма возьмем ячейки сетки, являющиеся треугольниками. Тогда разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + \frac{1}{S_{\Delta i}} \left( \sum_{j=1}^3 \overline{F_{nij}^k} l_{ij} - \sum_{j=1}^3 \overline{H_{nij}^k} l_{ij} \right)$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $\overline{F_{nij}}$ ,  $\overline{H_{nij}}$  – конвективный и вязкий потоки на границе между ячейками  $\Delta i$  и  $\Delta j$  соответственно,  $l_{ij}$  – длина стороны треугольника. Отсюда выражается  $u_i^{k+1}$  – величина на следующем временном слое, и так далее до тех пор, пока не будет достигнуто заданное время и установление течения для стационарных задач.

Фактически алгоритм сводится к вычислению потоков на границе ячейки и нахождению значений вектора  $u_i$  на новом временном слое. Конвективные потоки получаются как решение задачи о распаде разрыва на границе между соответствующими ячейками [3]. Для вычисления вязких потоков предварительно вычисляются значения градиентов компонент скорости в ячейках, а затем значения компонент тензора вязких напряжений. Для вычисления градиентов используется формула Гаусса-Грина [4]:

$$\nabla u_i = \frac{1}{S_{\Delta_i}} \oint_{\partial \Delta_i} u \vec{n} dl.$$

Для проверки корректности работы программы были решены две задачи.

**Первая задача** – двумерная задача дозвукового ( $M=0.7$ ) обтекания симметричного крылового профиля NACA 0012 потоком вязкого газа.

Профиль обтекается потоком воздуха под углом атаки  $1.489$  градуса, при давлении  $46066.16$  Па и температуре  $248$  К.

Использовалась неструктурированная треугольная сетка [5]. В качестве сравнительной характеристики между результатом численного метода и ранее проведенным экспериментом рассматривается коэффициент давления по поверхности профиля (рис. 1).

$$C_p = \frac{p}{(\rho_\infty u_\infty^2)/2}, \text{ где } \rho_\infty, u_\infty^2 - \text{параметры набегающего потока.}$$

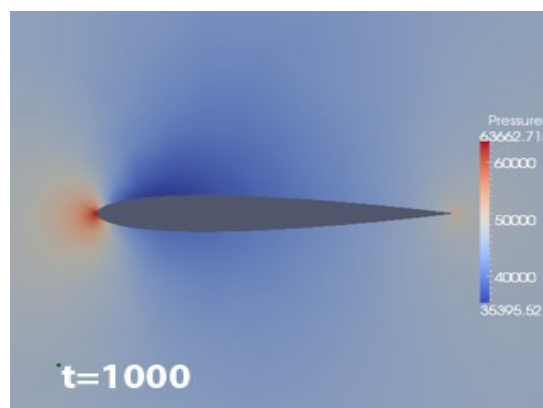
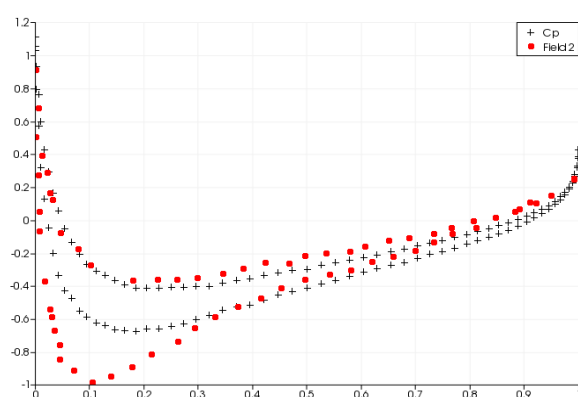


Рис. 1. Распределение коэффициента давления по поверхности профиля (слева; красные маркеры – эксперимент, черные – результаты расчетов) и поле давления вокруг профиля (справа).

Исходя из графика, можно утверждать, что по результатам расчетов предложенный численный метод и разработанный программный код показали хорошее соответствие полученных расчетных результатов с экспериментальными данными. Имеется расхождение экспериментальных и расчетных данных на верхней части профиля, это связано с тем, что в расчетах не учтено влияние турбулентной вязкости.

**Вторая задача** - задача о стационарном сверхзвуковом обтекании клина с числом Маха  $M = 2$ . Производится анализ конфигурации системы скачков уплотнения возникающих при обтекании клина (рис. 2) и многократного отражения начального скачка от стенок канала.

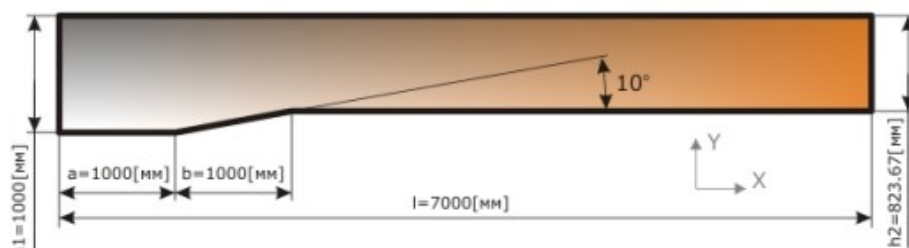


Рис. 2. Эскиз геометрии

Использовалась неструктурированная треугольная сетка [5], модель газа - вязкий газ. На рисунках 3 и 4 представлено распределение полей числа Маха и давления.

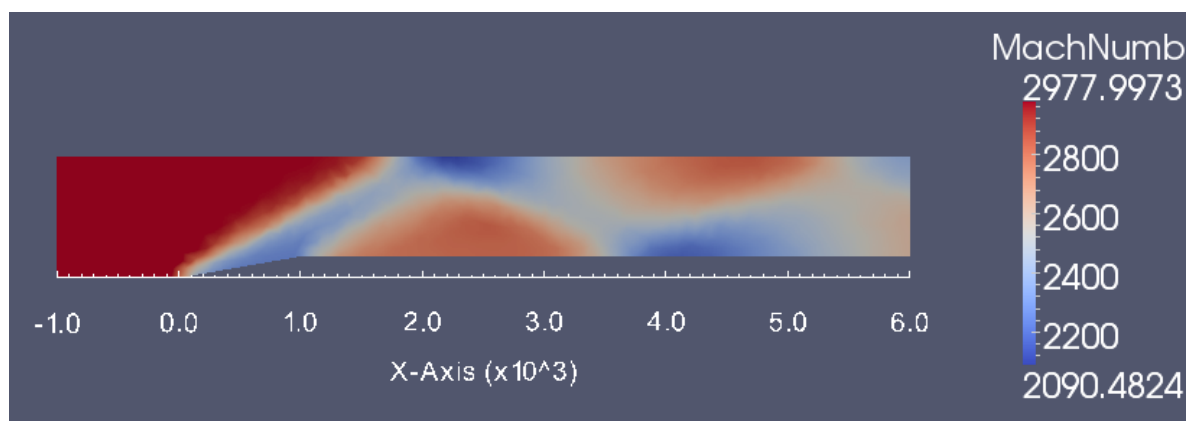


Рис. 3. Поле числа Маха М

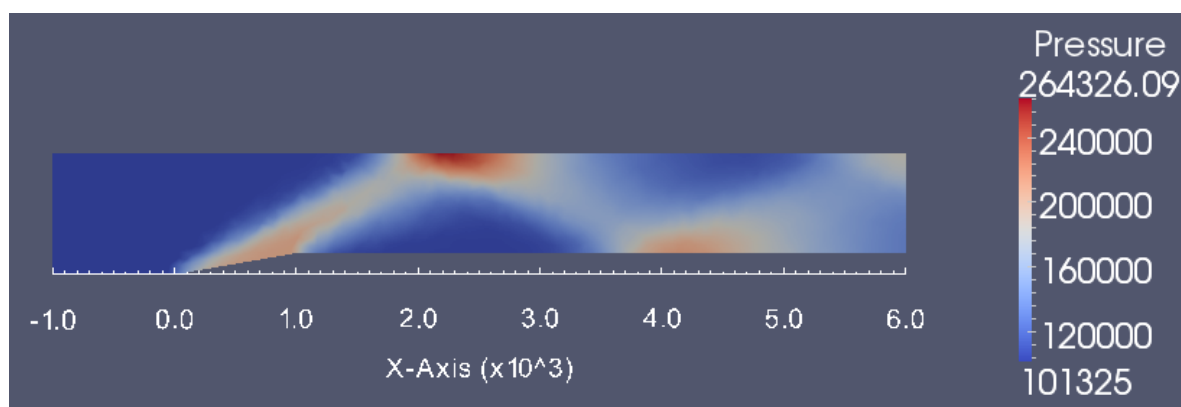


Рис. 4. Поле давления

## ЛИТЕРАТУРА

1. CFD code for 2D simulation gas and fluid flows – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://code.google.com/p/cfd-2d/>
2. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. Т. 1 : пер. с англ / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990. – 384 с.

3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
4. Куликовский А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семёнов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
5. Программа генерации сетки – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
6. Платформа для визуализации и анализа данных приложения – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://paraview.org/>

ПАНТЮШИН А.И.

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

**Аннотация.** Построение вычислительных алгоритмов основано на конечно-объемном методе, используя формулу Остроградского-Гаусса, а решение на временных слоях ищется по неявной схеме методом итераций.

**Ключевые слова:** фильтрация, неструктурированная сетка, флюид, пористость, аппроксимация.

PANTYUSHIN A.I.

## NUMERICAL METHOD FOR SOLVING FILTRATION EQUATION

**Abstract.** The article focuses on the construction of numerical algorithms based on the finite volume method by using the formula of Ostrogradsky-Gauss. The decision on the temporary layers is tried in the implicit scheme by iteration.

**Keywords:** filtration, unstructured mesh, fluid, porosity, approximation.

Рассмотрим однофазную изотермическую фильтрацию флюида в пористой среде [1,2].

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\rho \frac{k_o K_a}{\mu} \operatorname{grad}(p + \rho g z)\right) + \rho q. \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность флюида,  $q$  – накачка, или интенсивность выработки,  $k_a$  – коэффициент абсолютной фазовой проницаемости,  $K_o$  – коэффициент абсолютной фазовой проницаемости.

Уравнение состояния для несжимаемой жидкости записывается в виде

$$T = \operatorname{Const}_1, \quad \rho = \operatorname{Const}_2, \quad \varphi = \operatorname{Const}_3, \quad \mu = \operatorname{Const}_4, \quad k_o = \operatorname{Const}_5, \quad d(\varphi\rho) = \rho\eta dH, \quad (2)$$

где  $\eta$  – коэффициент упругости скелета породы. В этом случае уравнение фильтрации записывается в виде:

$$\eta \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\rho \frac{k_o K_a}{\mu} \operatorname{grad} H\right) + \rho q, \quad (3)$$

$$\eta = \rho\eta^*. \quad (4)$$

Построение вычислительных алгоритмов основано на конечно-объемном методе. В этом методе исходные уравнения записывается в дивергентном виде в декартовых координатах. Разностные формулы получаются в результате интегрирования уравнений по контрольному объему. Контрольные объемы (ячейки сетки) являются произвольными



многогранниками, покрывающими расчетную область без зазоров и наложений. Каждый многогранник ограничен произвольным числом граней. Вершинами (узлами) граней являются узлы разностной сетки:

$$\Omega = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) : 1 \leq i \leq N\}, \quad (5)$$

где  $i$  — номер узла. Общий вид ячейки показан на рисунке 1.

Неструктурированная сетка задается списками ячеек сетки. В списке ячеек указываются число граней, номера граней, образующих ячейку, координаты геометрического центра ячейки, объем ячейки, а также список определяющих расчетных параметров, которые относятся на каждый момент времени к центру ячейки [5]. Для алгоритма расчета процесса фильтрации, список ячеек имеет следующую структуру:

$$\text{Cell} = \{P : F, (f_1, f_2, \dots, f_F), (x_p, y_p, z_p), \Delta V_p, (\rho, p, H, T, k_o, K_a, \dots)_p\}, \quad (6)$$

где  $P$  — номер ячейки,  $F$  — количество граней,  $(f_1, f_2, \dots, f_F)$  — список граней ячейки,  $(x_p, y_p, z_p)$  — координаты центра ячейки,  $\Delta V_p$  — объем ячейки,  $(\rho, p, H, T, k_o, K_a, \dots)_p$  — расчетные параметры, отнесенные к центру ячейки,  $\Delta S_f$  — площадь грани.

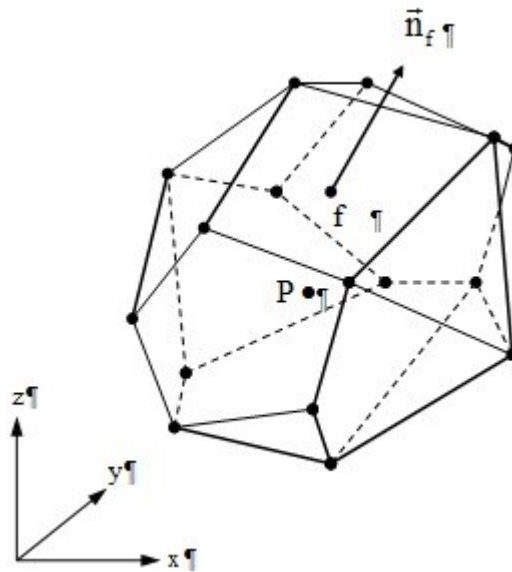


Рис.1. Общий вид ячейки сетки

Проинтегрируем уравнение (3) по объему ячейки  $\Delta V_p$  ограниченной поверхностью

$\Sigma_p = \bigcup_{i=1}^F$  и, используя формулу Гаусса-Остроградского, запишем интегральный закон

уравнения фильтрации:

$$\int_{\Delta V_p} \eta \frac{\partial H}{\partial t} dV - \oint_{\sum_p} (\chi \text{grad} H \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Delta V_p} \rho Q dV. \quad (7)$$

Заменим интегральные выражения разностными. Будем использовать теорему о среднем. В качестве среднего значения функции по объему примем значение ее в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани - значение ее в центре грани [8]. Тогда уравнения (7) в полудискретном виде запишется так:

$$(\eta \Delta V)_p \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_p - \sum_{f=1}^F (\chi \text{grad} H \cdot \vec{n})_{J_f} \Delta \Omega_f = (\rho Q \Delta V)_p. \quad (8)$$

Чтобы описать численный алгоритм, введем обозначение:  $\Lambda(T)$  - разностный оператор, аппроксимирующий фильтрационные потоки через грани ячейки. Перепишем формулу (8) с учетом новых обозначений:

$$(\eta \Delta V)_p \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_p - \Lambda(H) = (\rho Q \Delta V)_p. \quad (9)$$

Соответственно, разностная аппроксимация стационарного уравнения теплопроводности в операторной форме будет иметь вид:

$$-\Lambda(H) = (\rho Q \Delta V)_p \quad (10)$$

Производную по времени будем аппроксимировать либо по схеме первого порядка:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H^{n+1} - H^n}{\tau^n}, \quad (11)$$

либо по схеме второго порядка точности (разложение проводится в точке  $(t^{n+1}, \vec{R}_j)$ ):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\tau^n} \left( \frac{(\tau^{n-1} + 2\tau^n)}{(\tau^n + \tau^{n-1})} H^{n+1} - \frac{\tau^n + \tau^{n-1}}{\tau^{n-1}} H^n + \frac{(\tau^n)^2}{\tau^{n-1}(\tau^n + \tau^{n-1})} H^{n-1} \right) \quad (12)$$

Отметим, что для равномерного шага по времени (12) приобретает вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{3}{2} H^{n+1} - 2H^n + \frac{1}{2} H^{n-1} \right) \quad (13)$$

Представим (10) и (11) в общем виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\tau^n} \left( 1 + \frac{\sigma \tau^n}{\tau^n + \tau^{n-1}} \right) (H^{n+1} - H^n) - \frac{\sigma \tau^n}{\tau^{n-1}(\tau^n + \tau^{n-1})} (H^n - H^{n-1}), \quad (14)$$

где параметр  $\sigma$  может принимать значения:  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Для схемы первого порядка аппроксимации:  $\sigma = 0$ . Для схемы второго порядка аппроксимации:  $\sigma = 1$ .

Подставляя выражение для производной по времени (14) в (9) и аппроксимируя разностный оператор по верхнему временному слою, получим следующую неявную схему:

$$\frac{1}{\tau^n} \left( 1 + \frac{\sigma}{\tau^n + \tau^{n-1}} \right) (\eta \Delta V)_p (H_p^{n+1} - H_p^n) - \Lambda(H^{n+1}) = (Q \rho \Delta V)_p + \frac{\sigma \tau^n (\eta \Delta V)_p}{\tau^{n-1} (\tau^n + \tau^{n-1})} (H_p^n - H_p^{n-1}), \quad (15)$$

Будем искать решение на новом временном слое по неявной схеме методом итераций.

Тогда разностное уравнение (15) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^n} \left( 1 + \frac{\sigma \tau^n}{\tau^n + \tau^{n-1}} \right) (\eta \Delta V)_p (H_p^{\gamma+1} - H_p^n) - \Lambda(H^{\gamma+1}) = \\ = \frac{\sigma (\eta \Delta V)_p}{(\tau^n + \tau^{n-1})} \left( \frac{\tau^n}{\tau^{n-1}} H_p^n - H_p^{n-1} \right) + (Q)_p^n (\rho \Delta V)_p, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\gamma$  – номер итерации.

Проводя линеаризацию пространственного оператора, получим выражение:

$$\Lambda(H^{\gamma+1}) = \Lambda(H^{\gamma+1}) - \Lambda(H^\gamma) + \Lambda(H^\gamma) = \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial H} \right) \Delta H + \Lambda(H^\gamma), \quad (17)$$

где

$$\left( \frac{\partial \Lambda}{\partial H} \right) \Delta H = \sum_{f=1}^F ((\chi \operatorname{grad} \Delta H) \cdot \vec{n})_f \Delta \Omega_f. \quad (18)$$

С учетом (17) разностное уравнение (16) приведем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^n} \left( 1 + \frac{\sigma \tau^n}{\tau^n + \tau^{n-1}} \right) (\eta \Delta V)_p \Delta H_p - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial H} \right)^\gamma \Delta H = \Lambda(H^\gamma) - \\ - \frac{1}{\tau^n} \left\{ \left( 1 + \frac{\sigma \tau^n}{\tau^n + \tau^{n-1}} \right) (H_p^\gamma - H_p^n) - \frac{\sigma \tau^n}{(\tau^n + \tau^{n-1})} \left( \frac{\tau^n}{\tau^{n-1}} H_p^n - H_p^{n-1} \right) \right\} (\eta \Delta V)_p + (Q)_p^n (\rho \Delta V)_p. \end{aligned} \quad (19)$$

Это так называемая дельта форма разностного уравнения, в котором искомое решение является приращение напора в ячейках разностной сетки, а правая часть разностных уравнений является невязкой, то есть погрешностью разностной аппроксимации уравнения фильтрации.

Стационарное распределение напора находится методом итераций, в которых приращение напора в каждой ячейки на новой итерации определяется из решения следующего уравнения:

$$\frac{\Delta H_p}{\omega} - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial H} \right)^\gamma \Delta H = \Lambda(H^\gamma) + (Q \rho \Delta V)_p. \quad (20)$$

где  $\omega$  – релаксационный параметр.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977. -

2. Кочина П.Я., Кочина Н.Н. Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения. - М.: Издательская фирма "Физико-Математическая литература", 1994. – 117 с.
3. Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газов. - М.: Недра 1972. - 288 с.
4. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. - М.: Наука 1975. – 200 с.
5. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. - М.: Мир, 1964.
6. Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газов. - М.: Недра 1972. – 288 с.
7. Закиров С.Н., Сомов Б.Е., Гордон В.Я., Палатник Б.М., Юфин П.А. Многомерная и многокомпонентная фильтрация: Справочное пособие. - М.: «Недра», 1988. - 335с.
8. Величко О.М., Горев В.В., Горев и.В., Дерюгин Ю.Н. и др. Методика численного решения трехмерных задач переноса примесей подземными водами // Математическое моделирование. - 2001. - Т. 13 - № 2. - С 78-85.

**ПАНЯГИНА И.А.**

**АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ПРОМЫШЛЕННОСТИ  
РЕСПУБЛИКИ МОРДОВИЯ ПО МОДЕЛИ СОЛОУ**

**Аннотация.** В статье рассмотрена модель экономического роста Солоу. Проверяется выполнение условия равновесного роста промышленности Республики Мордовия, а также дается анализ полученных результатов и предлагаются возможные варианты приведения развития промышленной деятельности Республики Мордовия к равновесному росту.

**Ключевые слова:** Модель Солоу, производственная функция, факторы экономического роста, уровень капиталовооруженности, равновесный рост.

**PANYAGINA I.A.**

**INDUSTRYECONOMIC GROWTH OF MORDOVIA REPUBLIC:  
SOLOW MODEL-BASED ANALYSIS**

**Abstract.** The article considers the Solow economic growth model. Particularly, the author checks the validity of equilibrium growth condition of Mordovia Republic industry. Considering the analysis results, the author suggests possible options for bringing Mordovia Republic industry to the equilibrium growth.

**Keywords:** Solow model, production function, factors of economic growth, capital intensitylevel, equilibrium growth.

Одной из важнейших долгосрочных целей экономической политики правительства любой страны является стимулирование экономического роста, поддержание его темпов на стабильном и оптимальном уровне.

В экономической теории разрабатываются динамические модели экономического роста, основная цель построения которых – это определение условий, необходимых для равновесного роста [1].

Весь созданный в экономике продукт появляется в результате взаимодействия производственных факторов – труда ( $L$ ), капитала ( $K$ ) и земельных ресурсов ( $N$ ). Их воздействие на величину совокупного продукта описывается с помощью простейшей производственной функции:  $Y = F(K, L, N)$ .

Модель роста Солоу базируется на производственной функции Кобба-Дугласа, имеющей вид:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Параметр  $A$  – коэффициент, отражающий уровень технологической производительности и в краткосрочном периоде он не изменяется. Показатели  $\alpha$  и  $\beta$  –

коэффициенты эластичности объема выпуска ( $Y$ ) по фактору производства, т.е. по капиталу  $K$  и труду  $L$  соответственно.

Разделив функцию  $Y = F(K, L)$  на количество труда  $L$ , мы получим производственную функцию для одного человека  $y = f(k)$ , где  $k = K/L$  – уровень капиталовооруженности единицы труда,  $y = Y/L$  – выпуск продукции в расчете на одного человека.

Совокупный спрос в модели Солоу определяется инвестиционным и потребительским спросом. Доход делится между потреблением и сбережениями в соответствии с нормой сбережения, так что потребление можно представить как  $c = (1 - s)y$ , где  $s$  – норма сбережения (накопления). Тогда  $y = c + i = (1 - s)y + i$ , откуда  $i = sy$ . В условиях равновесия инвестиции равны сбережениям и пропорциональны доходу.

Другим фактором непрерывного экономического роста в условиях устойчивой экономики является рост населения. Для устойчивости экономики необходимо, чтобы инвестиции  $s \cdot f(k)$  должны компенсировать последствия выбытия капитала и рост капитала  $(d + n) \cdot k$ . [2].

В таблице 1 приведены исходные данные для исследования экономического роста промышленности Республики Мордовия по модели Солоу и расчета необходимых показателей [3].

Таблица 1

Исходные данные для исследования экономического роста в 2011 и 2012 гг.

| Показатели                                 | Условные обозначения | Базовый период 2011 г. | 2012г.   |
|--------------------------------------------|----------------------|------------------------|----------|
| Объем продукции, тыс. руб.                 | $Y_t$                | 8960513                | 13840763 |
| Расходы на потребление, тыс. руб.          | $C_t$                | 7168410                | 10380572 |
| Сбережения, тыс. руб.                      | $S_t$                | 1792103                | 3460191  |
| Производственный персонал, чел.            | $L_t$                | 86355                  | 87723    |
| Основные производственные фонды, тыс. руб. | $K_t$                | 16541000               | 18813000 |
| Амортизация, тыс. руб.                     | $A_t$                | 303069                 | 385022   |

Объем произведенной продукции промышленности Республики Мордовия в году  $t$  по модели Солоу определяется с помощью производственной функции Кобба-Дугласа при  $A = 2,0153, \alpha = 0,75, \beta = 0,25$ , т.е.:

$$Y_t = 2,0153 \cdot K_t^{0,75} \cdot L_t^{0,25}.$$

При исследовании экономического роста промышленности Республики Мордовия за базовый период возьмем 2011 год. Тогда из таблицы 1 видно, что на исследуемый момент численность производственного персонала  $L_0 = 86355$  человек и объем производственных фондов  $K_0 = 16541000$  тысячи рублей, тогда базовое значение объема продукции равно:

$$Y_0 = 2,0153 \cdot 16541000^{0,75} \cdot 86355^{0,25} = 8960513 \text{ тыс. руб.}$$

Пользуясь таблицей 1, найдем норму сбережения  $s$  и норму амортизации  $d$  в базовом 2011 году:

$$s = \frac{S_0}{Y_0} = \frac{1792103}{8960513} = 0,2; d = \frac{A_0}{K_0} = \frac{303069}{16541000} = 0,018.$$

Показатель темпа роста производственного персонала  $n$  вычисляется исходя из уравнения динамики трудовых ресурсов модели Солоу:  $\frac{L_t - L_{t-1}}{L_{t-1}} = n$ . В нашем случае  $n = \frac{87650 - 86355}{86355} = 0,015$ .

Вычислим остальные показатели:

- производительность труда  $y_0 = \frac{Y_0}{L_0} = \frac{8960513}{86355} = 103,76$  тыс. руб.,
- уровень капиталовооруженности  $k_0 = \frac{K_0}{L_0} = \frac{16541000}{86355} = 191,5$  тыс. руб.,
- средняя производительность капитала  $q_0 = \frac{Y_0}{K_0} = \frac{8960513}{16541000} = 0,542$ ,
- потребление на одного работника  $c_0 = (1 - s)y_0 = 0,8 \cdot 103,76 = 83,01$  тыс. руб.

Проверим выполнение условия равновесного роста:

$$\begin{aligned} s \cdot y_0 &= 0,2 \cdot 103,76 = 20,75 \text{ тыс. руб.,} \\ (n + d)k_0 &= 0,033 \cdot 191,5 = 6,32 \text{ тыс. руб.,} \\ s \cdot y_0 &> (n + d)k_0. \end{aligned}$$

В такой ситуации равновесный рост невозможен, так как объем сбережений (20,75 тыс. руб.) превышает объем инвестиций (6,32 тыс. руб.), необходимый для оснащения используемого труда на уровне  $k_0 = 191,5$  тыс. руб., что свидетельствует об избытке

предложения капитала, и его цена снизится. В данном случае для обеспечения равенства  $s \cdot y_0 = (n + d)k_0$  нужно повысить капиталовооруженность труда.

Для равновесного роста промышленности Республики Мордовия необходимо, чтобы в 2012 году объем основных производственных фондов возрос на  $0,2 \cdot 8960513 = 1792103$  тыс. руб., т.е.  $K_1 = 18333103$  тыс. руб. Принимая во внимание, что в 2012 году численность производственного персонала возрастает до  $L_1 = (1 + 0,015)L_0 = 1,015 \cdot 86355 = 87650$  человек, вычислим в этом году значение объема продукции:

$$Y_1 = 2,0153 \cdot K_1^{0,75} \cdot L_1^{0,25} = 2,0153 \cdot 18333103^{0,75} \cdot 87650^{0,25} = 9715274,3 \text{ тыс. руб.}$$

Вычислим остальные показатели за 2012 год:

- производительность труда  $y_1 = \frac{Y_1}{L_1} = \frac{9715274,3}{87650} = 110,84$  тыс. руб.,
- уровень капиталовооруженности  $k_1 = \frac{K_1}{L_1} = \frac{18333103}{87650} = 209,16$  тыс. руб.,
- средняя производительность капитала  $q_1 = \frac{Y_1}{K_1} = \frac{9715274,3}{18333103} = 0,53$ ,
- потребление на одного работника  $c_1 = (1 - s)y_1 = 0,8 \cdot 110,84 = 88,67$  тыс. руб.

Темп роста основных фондов, равный  $\frac{K_1 - K_0}{K_0} = \frac{18333103 - 16541000}{16541000} = 0,1083$ , превышает темп роста объема продукции, равный  $\frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} = \frac{9715274,3 - 8960513}{8960513} = 0,0842$ , и условие равновесного роста не выполняется:

$$s \cdot y_1 = 0,2 \cdot 110,84 = 22,168 \text{ тыс. руб.,}$$

$$(n + d)k_1 = 0,033 \cdot 209,16 = 6,9 \text{ тыс. руб.,}$$

$$s \cdot y_0 > (n + d)k_0.$$

Для обеспечения равенства  $s \cdot y_1 = (n + d)k_1$  требуется дальнейшее повышение капиталовооруженности труда. Так будет продолжаться до достижения равенства  $0,2 \cdot y_t = 0,033 \cdot k_t$ , т.е. до достижения устойчивого уровня капиталовооруженности  $k^* = 22254,8$  тыс. руб. и максимального уровня потребления на одного работника  $c^* = 2937,6$  тыс. руб.

Сравним основные количественные показатели, полученные при исследовании экономического роста промышленности Республики Мордовия по модели Солоу за 2012 год, с реальными количественными показателями промышленности Республики Мордовия из таблицы 1 за 2012 год, используя таблицу 2.



Таблица 2

Сравнение показателей экономического роста за 2012 г.: реальных и по модели Солоу

| Показатели                      | Из таблицы (2012 г.) | По модели Солоу (2012 г.) |
|---------------------------------|----------------------|---------------------------|
| Объем продукции, тыс. руб.      | 13840763             | 9715274,3                 |
| Производственный персонал, чел. | 87723                | 87650                     |
| Осн. произв. фонды, тыс.руб.    | 18813000             | 18333103                  |

Из таблицы 2 видно, что:

- реальный объем продукции в 2012 году больше значения объема продукции в 2012 году, вычисленного по модели Солоу, на  $13840763 - 9715274,3 = 4125488,7$  тыс. руб.;
- реальная численность производственного персонала в 2012 году больше численности производственного персонала в 2012 году, вычисленного по модели Солоу, на  $87723 - 87650 = 73$  чел.;
- реальный объем основных производственных фондов в 2012 году больше объема основных производственных фондов в 2012 году, вычисленного по модели Солоу, на  $18813000 - 18333103 = 479897$  тыс. руб.

Таким образом, динамические модели экономического роста, включая модель роста Солоу, помогают исследовать условия достижения равновесного темпа экономического роста народного хозяйства и вырабатывать эффективную долгосрочную экономическую политику.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Добрынин А.И., Тарасевич Л.С. Экономическая теория. – СПб.: Питер, 2000. – 528 с.
2. Петров А. А. Математическое моделирование экономических систем. – М.: Наука, 1989. - 562 с.
3. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс].- Режим доступа: <http://www.gks.ru/dbscripts/cbsd/DBInet.cgi>.