



eISSN 2311-2468
Том 3, № 23. 2015
Vol. 3, no. 23. 2015

электронное периодическое издание
для студентов и аспирантов

Огарёв-онлайн Ogarev-online

<https://journal.mrsu.ru>



КОЗЛОВ М. В.

**ПРЕДЕЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ СКОРОСТЕЙ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАЛЫМИ ИНЕРЦИОННЫМИ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Аннотация. Рассматривается задача о предельной ограниченности обобщенных скоростей механических систем с полным набором сил и малыми инерционными характеристиками. Задача сводится к исследованию системы уравнений Лагранжа второго рода с большим положительным параметром. Получены оценки области предельной ограниченности, а также времени переходного процесса.

Ключевые слова: предельная ограниченность, уравнения Лагранжа второго рода, диссипативные силы, большой параметр.

KOZLOV M. V.

**ULTIMATE BOUNDEDNESS OF GENERALIZED VELOCITIES
OF MECHANICAL SYSTEMS WITH LOW INERTIA CHARACTERISTICS**

Abstract. The article deals with the problem of ultimate boundedness of generalized velocities of mechanical systems with the complete set of forces and low inertia characteristics. The problem is reduced to the study of the Lagrange equations of the second order with a large positive parameter. The estimations of ultimate boundedness area and transient time have been obtained.

Keywords: ultimate boundedness, Lagrange equation of the second order, dissipative force, large parameter.

Известно, что положение равновесия механической системы при наличии в ней гироскопических сил и сил полной диссипации, обладает свойством асимптотической устойчивости по вектору обобщенных скоростей [1; 2]. При добавлении консервативных и позиционных неконсервативных сил ситуация в общем случае меняется. Так, например, неконсервативные позиционные силы могут разрушить устойчивость, а при наличии постоянно действующих силовых возмущений положение равновесия вообще отсутствует. На практике довольно часто вместо асимптотической устойчивости достаточным является требование ограниченности решений. В данной статье предложены достаточные условия предельной ограниченности обобщенных скоростей системы с полным набором сил. В качестве способа контроля радиуса предельной области для обобщенных скоростей используется уменьшение инерционных характеристик системы.

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Лагранжа.

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_k} = Q_k(\tau, q, \dot{q}), k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ – вектор обобщенных координат, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T$ – вектор обобщенных скоростей, $\bar{T} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \bar{A}(q) \dot{q}$ – кинетическая энергия системы, $\bar{A}(q) = \{\bar{a}_{ij}(q)\}_{i,j=1}^n$ – симметричная положительно определенная матрица, $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$ – вектор обобщенных сил, $\tau \in R$ – переменная «времени».

Предположим, что коэффициенты кинетической энергии $\bar{a}_{ij}(q)$ можно представить в виде

$$\bar{a}_{ij}(q) = \mu^2 a_{ij}(q), i, j = \overline{1, n},$$

где $\mu > 0$ – малый параметр. Кроме того, пусть вектор сил Q представим в виде [3]

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + R(q) + \Gamma(q, \dot{q}) + D(q, \dot{q}) + \varphi(\tau),$$

где $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы, $R(q)$ – вектор позиционных неконсервативных сил, $\Gamma(q, \dot{q})$ – вектор гироскопических сил, $D(q, \dot{q})$ – вектор диссипативных сил, $\varphi(\tau)$ – постоянно действующие силовые возмущения. Тогда, переходя к новой переменной времени t по формуле $d\tau = \mu dt$, получаем систему

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + R_k(q) + \Gamma_k(q, h\dot{q}) + D_k(q, h\dot{q}) + \varphi_k(\mu t), k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где через $\dot{q}$ обозначен вектор $\frac{dq}{dt}$, $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q}$, $A(q) = \{a_{ij}(q)\}_{i,j=1}^n$, $h = \frac{1}{\mu} > 0$ – большой параметр.

Будем исследовать решение системы (2) на предельную ограниченность решений по вектору $\dot{q}$ при больших значениях параметра h и произвольных начальных условиях.

Ограниченность в пределе. В соответствии с [4] дадим определение понятия ограниченности в пределе для системы вида (2).

Определение 1. Решения системы (2) будем называть ограниченными в пределе по вектору $\dot{q}$, если существуют числа $B > 0$ и $\Delta > 0$, такие, что решения системы (2) удовлетворяют неравенству $\|\dot{q}(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)\| \leq B^1$ при $t \geq t_0 + \Delta$, причем число B зависит

¹ В работе во всех случаях используется евклидова норма вектора $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

только от параметра h , но не зависит от частного решения, тогда как Δ определяется для каждого конкретного решения, т. е. $\Delta = \Delta(h, t_0, q_0, \dot{q}_0)$.

Определение 2. Величину $\Delta = \Delta(h, t_0, q_0, \dot{q}_0)$ будем называть временем переходного процесса. Если Δ не зависит от t_0 , то будем говорить, что решения системы (2) ограничены в пределе равномерно по t_0 .

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть элементы матрицы $A(q) = \{a_{ij}(q)\}_{i,j=1}^n$ являются ограниченными функциями, а собственные числа λ_l этой матрицы удовлетворяют соотношению $\min_l \inf_{q \in E^n} \lambda_l(q) > 0$. Кроме того, функции в правой части системы (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$C1. \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad (k = \overline{1, n}) - \text{ограниченные функции.}$$

$$C2. \sum_{k=1}^n D_k(q, h\dot{q}) \dot{q}_k \leq -h^\sigma d(q) \|\dot{q}\|^{\sigma+1}, \text{ где } d(q) - \text{некоторая непрерывная функция,}$$

$$d(q) \geq d_0 > 0, \quad \sigma \geq 1 - \text{вещественное число.}$$

$$C3. \sum_{k=1}^n R_k(q) \dot{q}_k \leq r(q) \|\dot{q}\|, \text{ где } r(q) - \text{некоторая непрерывная положительная}$$

ограниченная функция.

$$C4. \|\varphi(\mu t)\| \leq \bar{\varphi}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ где } \bar{\varphi} > 0 - \text{некоторая постоянная.}$$

Тогда при $h > 0$ решения системы (2) ограничены в пределе по вектору $\dot{q}$ равномерно по t_0 .

Доказательство. Идея доказательства состоит в использовании кинетической энергии $T(q, \dot{q})$ в качестве функции типа Ляпунова для оценки решений системы (2) по вектору $\dot{q}$. Обозначим $\lambda_{\min} = \min_l \inf_{q \in E^n} \lambda_l(q)$, $\lambda_{\max} = \max_l \sup_{q \in E^n} \lambda_l(q)$. По условию теоремы, $\lambda_{\min} > 0$, $\lambda_{\max} < \infty$, поэтому $T(q, \dot{q})$ является положительно определенной квадратичной формой переменных $\dot{q}_k$ и удовлетворяет оценке

$$\lambda_{\min} \|\dot{q}\|^2 \leq T(q, \dot{q}) \leq \lambda_{\max} \|\dot{q}\|^2. \quad (3)$$

Полная производная функции $T(q, \dot{q})$ на решениях системы (2) имеет вид [5, стр. 58]

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & -\sum_{k=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n R_k(q) \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n D_k(q, h\dot{q}) \dot{q}_k + \\ & + \sum_{k=1}^n \varphi_k(\mu t) \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Применяя условия С1 – С3 теоремы, получаем неравенство

$$\frac{dT}{dt} \leq M \|\dot{q}\| + r(q) \|\dot{q}\| - h^\sigma d(q) \|\dot{q}\|^{\sigma+1} + \bar{\varphi} \|\dot{q}\|,$$

где $M = \sup_{q \in E^n} \left\| \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right\|$. Выберем число c_0 , удовлетворяющее неравенству $0 < c_0 < d_0$. Тогда

будет справедливо неравенство

$$\frac{dT}{dt} \leq -c_0 h^\sigma \|\dot{q}\|^{\sigma+1} \quad (4)$$

при $\|\dot{q}\| \geq R(h)$, где

$$R(h) = h^{-1} \sup_{q \in E^n} \left(\frac{M + \bar{\varphi} + r(q)}{d(q) - c_0} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (5)$$

(в силу условия С4 теоремы супремум в правой части выражения (5) является конечным числом). Рассмотрим решение системы (2) с начальными данными $(t_0, q_0, \dot{q}_0)$, $\|\dot{q}_0\| > R(h)$. Проинтегрируем неравенство (4) в пределах $[t_0; t]$, где t достаточно близко к t_0 , и, применяя оценки (3), получим

$$\lambda_{\min} \|\dot{q}(t)\|^2 + c_0 h^\sigma \int_{t_0}^t \|\dot{q}(s)\|^{\sigma+1} ds \leq \lambda_{\max} \|\dot{q}_0\|^2. \quad (6)$$

Если предположить, что $\|\dot{q}(t)\| \geq R(h)$ при всех $t \geq t_0$, то получится противоречие, поскольку интеграл в левой части неравенства (6) будет неограниченно возрастать при $t \rightarrow +\infty$, а в правой части находится постоянное число. Следовательно, при некотором $t_1 > t_0$ будет $\|\dot{q}(t_1)\| = R(h)$, т. е. в пространстве векторов $\dot{q}$ траектория $\dot{q} = \dot{q}(t)$ попадет на сферу $\|\dot{q}\| = R(h)$. Теперь, если неравенство (4) проинтегрировать в пределах $[t_1; t]$ и учесть, что $\|\dot{q}(t_1)\| = R(h)$, то будет справедлива оценка

$$\lambda_{\min} \|\dot{q}(t)\|^2 + c_0 h^\sigma \int_{t_1}^t \|\dot{q}(s)\|^{\sigma+1} ds \leq \lambda_{\max} (R(h))^2,$$

откуда следует справедливость при всех $t \geq t_1 > t_0$ неравенства

$$\|\dot{q}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} R(h). \quad (7)$$

Если $\|\dot{q}_0\| \leq R(h)$, то в пространстве векторов $\dot{q}$ траектория $\dot{q} = \dot{q}(t)$ либо останется при всех $t \geq t_0$ внутри шара $\|\dot{q}\| < R(h)$, либо в какой-то момент t_1 окажется на его границе. В обоих случаях неравенство (7) будет справедливым, поэтому величину $B(h)$, указанную в теореме, можно определить по формуле

$$B(h) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} R(h). \quad (8)$$

Найдем оценку на время переходного процесса $\Delta(q_0, \dot{q}_0, h)$. Пусть начальные данные удовлетворяют условию $\|\dot{q}_0\| > B$. Найдем число $v > 0$, такое, что поверхность уровня $S_v(q) = \{\dot{q} : T(q, \dot{q}) = v\}$ при всех $q \in E^n$ лежит внутри шара $\|\dot{q}\| \leq B(h)$. Из неравенств (3) следует, что в качестве такого числа v можно принять $v = \lambda_{min} B^2$. Из неравенств (3) также следует, что поверхность $S_v(q)$ при всех $q \in E^n$ будет охватывать шар $\|\dot{q}\| \leq R(h)$. Поскольку $\frac{dT}{dt} < 0$ при $\|\dot{q}\| \geq R(h)$, то в пространстве векторов $\dot{q}$ траектория $\dot{q} = \dot{q}(t)$, попав на поверхность $S_v(q)$, уже не выйдет за пределы шара $\|\dot{q}\| \leq B(h)$. Поэтому в качестве оценки времени окончательного попадания траектории $\dot{q} = \dot{q}(t)$ в шар $\|\dot{q}\| \leq B(h)$ можно принять время достижения этой траекторией поверхности $S_v(q)$. Проинтегрируем неравенство (4) в пределах $[t_0; t_0 + \Delta]$

$$T(q(t_0 + \Delta), \dot{q}(t_0 + \Delta)) - T(q_0, \dot{q}_0) \leq -c_0 h^\sigma \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \|\dot{q}(s)\|^{\sigma+1} ds.$$

Учитывая, что $T(q(t_0 + \Delta), \dot{q}(t_0 + \Delta)) = v$ и $\|\dot{q}(s)\| \geq R(h)$, получаем

$$v - T(q_0, \dot{q}_0) \leq -c_0 h^\sigma R^{\sigma+1} \Delta,$$

откуда

$$\Delta \leq h \frac{T(q_0, \dot{q}_0) - \lambda_{min} B^2}{c_0 \sup_{q \in E^n} \left(\frac{M + \bar{\varphi} + r(q)}{d(q) - c_0} \right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}}. \quad (9)$$

Как следует из формулы (9), верхняя оценка на время переходного процесса не зависит от t_0 , следовательно, ограниченность в пределе равномерна по t_0 . Теорема доказана.

Как видно из формул (5) и (8) радиус предельного шара $B(h)$ может быть сделан как угодно мал увеличением параметра h . Это означает, что уменьшение инерционных характеристик системы может сгладить действие любых ограниченных возмущающих сил $\varphi(\tau)$, если все остальные силы удовлетворяют условиям теоремы. Однако, если в условии С2 указанная оценка на мощность диссипативных сил справедлива лишь при больших $\dot{q}$ (при $\|\dot{q}\| > \bar{R}$, где $\bar{R} > 0$ – некоторая постоянная), то предельный шар уже нельзя будет сделать как угодно малым, т. к. $B(h)$ будет ограничено снизу числом $\bar{R}$.

Следует также отметить, что полученная верхняя оценка (9) на Δ неограниченно возрастает при $h \rightarrow +\infty$. Поскольку переменные времени в системах (1) и (2) связаны по формуле $\tau = \mu t$, то для системы (1) оценка (9) примет вид

$$\bar{\Delta} \leq \frac{T(q_0, \dot{q}_0) - \lambda_{\min} B^2}{c_0 \sup_{q \in E^n} \left(\frac{M + \bar{\varphi} + r(q)}{d(q) - c_0} \right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.
3. Зубов В. И. Каноническая структура векторного силового поля // Проблемы механики твердого деформированного тела. – Л., 1970. – С. 187–215.
4. Йосидзава Т. Функции Ляпунова и ограниченность решений // Математика: сб. переводов. – М.: Мир. 1955. – С. 95–127.
5. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

КЯШКИН А. А., ЛОГИНОВ Б. В., ШАМАНАЕВ П. А.
К ЗАДАЧЕ О ВОЗМУЩЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация. Методами теории ветвления исследована задача о возмущении n -кратной пары чисто мнимых собственных значений при наличии обобщенных жордановых цепочек. Получена разрешающая система в виде однородной системы линейных алгебраических уравнений. Проведена редукция исследуемой задачи к возмущенной операторной матричной задаче на собственные значения.

Ключевые слова: ветвление периодических решений, обобщенные жордановы цепочки, возмущение критической пары собственных значений.

KYASHKIN A. A., LOGINOV B. V., SHAMANAEV P. A.
ON THE PROBLEM OF PERTURBATION OF PERIODICAL SOLUTIONS
TO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATE OPERATOR
BEFORE THE DERIVATIVE

Abstract. By the methods of bifurcation theory, the authors investigate the perturbation problem for n -multiple pair of pure imaginary eigenvalues at the presence of generalized Jordan chains. The resolving system in the form of a homogeneous system of linear algebraic equations is obtained. A reduction of the problem to the perturbed operator matrix problem is carried out.

Keywords: bifurcation of periodical solutions, generalized Jordan chains, perturbation of critical eigenvalues pair.

1. Введение

В банаховых пространствах E_1, E_2 в обозначениях и терминологии [1; 2] задача о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа с необратимым оператором при производной описывается дифференциальным уравнением

$$A \frac{dx}{dt} = B(\lambda)x - R(x, \lambda), \quad R(0, \lambda) \equiv 0, \quad B(\lambda) = B_0 + B(\lambda - \lambda_0), \quad B(\varepsilon) = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots, \quad \varepsilon = \lambda - \lambda_0, \quad (1.1)$$

где A и B_0 – плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, $N(A) = \text{span}\{\phi_j\}_1^m$, $N^*(A) = \text{span}\{\psi_j\}_1^m$; $N(B_0) = \text{span}\{\hat{\phi}_k\}_1^n$, $N^*(B_0) = \text{span}\{\hat{\psi}_k\}_1^n$ – их подпространства нулей и дефектных функционалов, $\{\sigma_l\}_1^m$, $\langle \phi_j, \sigma_l \rangle = \delta_{jl}$, $\{\zeta_l\}_1^m$, $\langle \zeta_l, \psi_j \rangle = \delta_{lj}$; $\{\hat{\sigma}_s\}_1^n$, $\langle \hat{\phi}_k, \hat{\sigma}_s \rangle = \delta_{ks}$, $\{\hat{\zeta}_s\}_1^n$, $\langle \hat{\zeta}_s, \hat{\psi}_k \rangle = \delta_{sk}$ – соответствующие биортогональные системы, $\|R(x, \lambda_0 + \varepsilon)\| = o(\|x\|)$. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: 1°

$D_B \subset D_A$ и A подчинен B_0 , т. е. $\|Ax\| \leq \|B_0x\| + \|x\|$ на D_{B_0} или $D_A \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A , т. е. $\|B_0x\| \leq \|Ax\| + \|x\|$ на D_A , что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам.

В статье [3] дано применение уравнения разветвления в корневых подпространствах к рассматриваемым в [1] стационарным задачам о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристиках линейного оператора, и соответственно в статье [4] – к рассмотренной в [2] задаче о ветвлении периодических решений.

Здесь исследуется ветвление чисто мнимых A -собственных значений оператора B_0 и отвечающих им периодических собственных элементов (периодических решений) линеаризованного уравнения при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0

$$A \frac{dx}{dt} = (B_0 + B(\varepsilon))x \quad (1.2)$$

в следующих предположениях [1], [5-7]:

1°. Число α является $\mathcal{A}$ -собственным значением матричного оператора $\mathcal{B}(\alpha)$, т. е. $\mathcal{B}(\alpha)U_k = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $\mathcal{B}^*(\alpha)V_k = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A_0^* \\ \alpha A_0^* & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $k = \overline{1, n}$, с $2n$ -мерным подпространством нуль-элементов

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}(\alpha)) = \text{span} \left\{ \Phi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix}, \Phi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{2k} \\ -u_{1k} \end{pmatrix}, k = \overline{1, n} \right\}, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}^*(\alpha)) = \text{span} \left\{ \Psi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} -v_{2k} \\ v_{1k} \end{pmatrix}, \Psi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix}, k = \overline{1, n} \right\}. \quad (1.4)$$

При этом числа $\pm k\alpha$, $k = 0, 1, 2, \dots$ не являются $\mathcal{A}$ -собственными значениями матричного оператора $\mathcal{B}(\alpha) \neq 0$.

2°. $\mathcal{A}$ -жордановы цепочки элементов $\Phi_{ik}^{(1)}, \Psi_{ik}^{(1)}$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$, оператор-функций $\mathcal{B}(\alpha + \mu) \equiv \mathcal{B}(\alpha) - \mu \mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{B}^*(\alpha + \mu) \equiv \mathcal{B}^*(\alpha) - \mu \mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A^* \\ \alpha A^* & B_0^* \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ -A^* & 0 \end{pmatrix}$, определенные равенствами $\mathcal{B}(\alpha)\Phi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}\Phi_{jk}^{(s-1)}$, $\mathcal{B}^*(\alpha)\Psi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}^*\Psi_{jk}^{(s-1)}$, имеют конечные длины p_k , т. е. образуют полный канонический обобщенный жорданов ($\mathcal{A}$ -жорданов) набор (ОЖН) [1]. Без ограничения общности в силу разрешимости определяющих ОЖН уравнений это означает, что

$$\langle \mathcal{A}\Phi_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(1)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_k}, \quad \langle \Phi_{ik}^{(1)}, \mathcal{A}^*\Psi_{jl}^{(s)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_l}, \quad s = \overline{1, p_k(p_l)}, \quad i, j = 1, 2, \quad k, l = \overline{1, n}, \quad (1.5)$$

или, эквивалентно, в координатной форме

$$\begin{aligned} \langle Au_{1k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)} \rangle &= \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)} \rangle, \quad s = \overline{1, p_k}, \quad \langle Au_{1k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)} \rangle + \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)} \rangle = \delta_{kl} \delta_{sp_k}, \\ \langle u_{1k}^{(1)}, A^* v_{2l}^{(s)} \rangle &= \langle u_{2k}^{(1)}, A^* v_{1l}^{(s)} \rangle, \quad s = \overline{1, p_l}, \quad \langle u_{1k}^{(1)}, A^* v_{1l}^{(s)} \rangle + \langle u_{2k}^{(1)}, A^* v_{2l}^{(s)} \rangle = \delta_{kl} \delta_{sp_l}, \quad k, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В силу леммы о биортогональности обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) [5-15] и линейности оператор-функций $\mathcal{B}(\alpha) - \mu A$ и $\mathcal{B}^*(\alpha) - \mu A^*$ этот набор всегда может быть выбран триканоническим, т. е.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{ik}^{(s)}, \Gamma_{jl}^{(\sigma)} \rangle &= \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{s\sigma}, \quad \Gamma_{jl}^{(\sigma)} = A^* \Psi_{jl}^{(p_l+1-\sigma)}; \quad \langle Z_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{s\sigma}, \\ Z_{ik}^{(s)} &= A \Phi_{ik}^{(p_k+1-s)}, \quad j = 1, 2, \quad s(\sigma) = \overline{1, p_k(p_l)}, \quad k, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} \langle u_{1k}^{(s)}, A^* v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle + \langle u_{2k}^{(s)}, A^* v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle &= \delta_{kl} \delta_{s\sigma} \sim \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)} \rangle + \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{kl} \delta_{s\sigma}; \\ \langle u_{1k}^{(s)}, A^* v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle &= \langle u_{2k}^{(s)}, A^* v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle \sim \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)} \rangle = \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)} \rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Следуя [3], в этой работе далее исследуется уравнение (1.2) на основе кратко представленного аппарата обобщенных жордановых цепочек.

2. Ветвление пары чисто мнимых A -собственных значений оператора B_0

Выполним комплексификацию уравнения (1.2), рассматривая его в пространствах $\mathcal{E}_k = E_k + iE_k$, $k = 1, 2$, и учитывая, что оператор $B(\varepsilon)$ в силу его линейности также допускает достаточно гладкое расширение на эти пространства. Тогда элементы $u_k = u_{1k} + i u_{2k}$, $\bar{u}_k$ и $v_k = v_{1k} + i v_{2k}$, $\bar{v}_k$ являются A -собственными элементами оператора B_0 , т. е. собственными элементами следующих задач на собственные значения

$$B_0 u_k = i\alpha A u_k, \quad B_0 \bar{u}_k = -i\alpha A \bar{u}_k, \quad B_0^* v_k = -i\alpha A^* v_k, \quad B_0^* \bar{v}_k = i\alpha A^* \bar{v}_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.1)$$

Им отвечают A - и A^* -жордановы наборы (A - и A^* -ЖН $\equiv$ ОЖН), $\{u_k^{(j)}\}$, $\{\bar{u}_k^{(j)}\}$ и $\{v_k^{(j)}\}$, $\{\bar{v}_k^{(j)}\}$, в которых обобщенные жордановы цепочки определяются уравнениями $(B_0 - i\alpha A)u_k^{(j)} = Au_k^{(j-1)}$, $(B_0 + i\alpha A)\bar{u}_k^{(j)} = -A\bar{u}_k^{(j-1)}$; $(B_0^* + i\alpha A^*)v_k^{(j)} = -A^*v_k^{(j-1)}$, $(B_0^* - i\alpha A^*)\bar{v}_k^{(j)} = A^*\bar{v}_k^{(j-1)}$, $j = \overline{2, p_k}$, $k = \overline{1, n}$, и соответственно (1.7) и (1.8) могут быть выбраны удовлетворяющими условиям биортогональности

$$\langle u_k^{(j)}, v_s^{(l)} \rangle = \delta_{jl} \delta_{ks}, \quad \langle z_k^{(j)}, v_s^{(l)} \rangle = \delta_{ks} \delta_{jl}, \quad z_j^{(k)} = Au_k^{(p_k+1-j)}, \quad v_s^{(l)} = A^* v_s^{(p_s+1-l)}. \quad (2.2)$$

Выполнением подстановки А. Пуанкаре $t = \frac{\tau}{\alpha + \mu}$, $x(t) = y(\tau)$, где $\mu = \mu(\varepsilon)$ — подлежащая определению малая добавка к частоте колебаний, задача (1.2) сводится к определению 2π -периодических решений уравнения

$$B_0 y = \mu \mathcal{C} y + B(\varepsilon) y, \quad B_0 y = (B_0 y)(\tau) \equiv B_0 y(\tau) - \alpha A \frac{dy}{d\tau}, \quad \mathcal{C} y = (\mathcal{C} y)(\tau) \equiv A \frac{dy}{d\tau}. \quad (2.3)$$

Здесь предполагаемый фредгольмовым оператор $(B_0 y)(\tau)$ и остальные операторы

отображают пространство $\mathcal{Y}$ 2π -периодических непрерывно-дифференцируемых функций τ со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 \dot{+} i E_1$ в пространство $\mathcal{Z}$ 2π -периодических функций τ со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 \dot{+} i E_2$. Дуальность между $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^*$ ($\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}^*$) определяется специального вида функционалами

$$\langle\langle y, f \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle y(\tau), f(\tau) \rangle d\tau, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad f \in \mathcal{Y}^* \quad (y \in \mathcal{Z}, \quad f \in \mathcal{Z}^*).$$

Подпространства $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ нулей операторов $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_0^*$ $2n$ -мерны

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}_0) = \text{span}\{\varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(1)}(\tau) = u_k e^{i\tau}, \bar{\varphi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n, \quad \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) = \text{span}\{\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(1)}(\tau) = v_k e^{i\tau}, \bar{\psi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n,$$

биортогональные им элементы выбираются как A^* - и A -образы последних элементов ОЖЦ $A^* \psi_k^{(p_k)} = A^* v_k^{(p_k)} e^{i\tau} = \gamma_k^{(1)}$ и $A^* \varphi_j^{(p_j)} = A^* u_j^{(p_j)} e^{i\tau} = z_k^{(1)}$. Отвечающие базисным элементам подпространств $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ ОЖЦ имеют вид $\varphi_k^{(j)} = u_k^{(j)} e^{i\tau}$, $\psi_k^{(j)} = v_k^{(j)} e^{i\tau}$ с соответствующими условиями биортогональности

$$\begin{aligned} \langle\langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \rangle\rangle &= \delta_{ks} \delta_{jl}, & \langle\langle z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)} \rangle\rangle &= \delta_{ks} \delta_{jl}, \\ \gamma_s^{(l)} &= \vartheta_s^{(l)} e^{i\tau} = A^* v_s^{(p_s+1-l)} e^{i\tau}, & z_k^{(j)} &= z_k^{(j)} e^{i\tau} = A \varphi_k^{(p_k+1-j)} e^{i\tau}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Лемма 2.1. [6; 8–10] Соотношения биортогональности (2.4) определяют проекторы

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \langle\langle \cdot, \gamma_k^{(j)} \rangle\rangle \varphi_k^{(j)} = \langle\langle \cdot, \gamma \rangle\rangle \phi, & \bar{\mathbf{P}} &= \langle\langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle\rangle \bar{\psi}, & \mathbb{P} &= \mathbf{P} + \bar{\mathbf{P}} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1^{2K} = K(\mathcal{B}, A) = \text{span}\{\varphi, \bar{\varphi}\}, \\ \mathbf{Q} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \langle\langle \cdot, \psi_k^{(j)} \rangle\rangle z_k^{(j)} = \langle\langle \cdot, \psi \rangle\rangle z, & \bar{\mathbf{Q}} &= \langle\langle \cdot, \bar{\psi} \rangle\rangle \bar{z}, & \mathbf{Q} &= \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{Q}} : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_{2,2K} = \text{span}\{z_k^{(j)}, \bar{z}_k^{(j)}\}, \end{aligned}$$

где $\varphi = (\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(p_1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(p_n)})$, векторы γ , ψ и z определяются аналогично, порождающие разложения пространств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ в прямые суммы $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^{2K} \dot{+} \mathcal{E}_1^{\infty-2K}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{2,2K} \dot{+} \mathcal{E}_{2,\infty-2K}$, $K = \sum_{s=1}^n p_s$ – корневое число.

При этом справедливы соотношения сплетения

$$\mathcal{B}_0 \mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathcal{B}_0, \quad \mathcal{B}_0 \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}} \mathcal{B}_0 \quad \text{на } D(\mathcal{B}), \quad A \mathbf{P} = \mathbf{Q} A, \quad A \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}} A \quad \text{на } D(A),$$

$$\mathcal{B}_0 \varphi = \mathcal{A}_B z, \quad \mathcal{B}_0 \bar{\varphi} = \mathcal{A}_B \bar{z}, \quad A \varphi = \mathcal{A}_A z, \quad A^* \psi = \mathcal{A}_A \gamma, \quad A \bar{\varphi} = \mathcal{A}_A \bar{z}, \quad A^* \bar{\psi} = \mathcal{A}_A \bar{\gamma},$$

где $\mathcal{A}_B$ и $\mathcal{A}_A$ – клеточно-диагональные матрицы $\mathcal{A}_B = (B_1, \dots, B_n)$ и $\mathcal{A}_A = (A_1, \dots, A_n)$

$$\text{с } p_k \times p_k\text{-клетками } B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы A и $\mathcal{B}_0$, действуют в инвариантных парах подпространств $\mathcal{E}_1^{2K}$, $\mathcal{E}_{2,2K}$ и $\mathcal{E}_1^{\infty-2K}$, $\mathcal{E}_{2,\infty-2K}$; $\mathcal{B}_0 : D_{\mathcal{B}_0} \cap \mathcal{E}_1^{\infty-2K} \rightarrow \mathcal{E}_{2,\infty-2K}$, $A : \mathcal{E}_1^{2K} \rightarrow \mathcal{E}_{2,2K}$ являются изоморфизмами.

Вводя регуляризатор Шмидта $\tilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum_{k=1}^n \langle \langle \cdot, \gamma_k^{(1)} \rangle \rangle z_k^{(1)} + \sum_{k=1}^n \langle \langle \cdot, \bar{\gamma}_k^{(1)} \rangle \rangle \bar{z}_k^{(1)}$, запишем

уравнение (2.3) в виде системы

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 y = \mu \mathcal{C} y + B(\varepsilon) y + \sum_{k=1}^n (\xi_{k1} z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{z}_k^{(1)}), \quad \xi_{s\sigma} = \langle \langle y, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle \rangle, \quad \bar{\xi}_{s\sigma} = \langle \langle y, \bar{\gamma}_s^{(\sigma)} \rangle \rangle, \quad \sigma = \overline{1, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Полагая $y = w + v$, $v = \xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi} \in E_1^{2k}$, находим

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{B}}_0 w + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \tilde{\mathcal{B}}_0 \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \tilde{\mathcal{B}}_0 \bar{\varphi}_k^{(j)}) - \mu \mathcal{C} w - B(\varepsilon) w = \\ & = \mu \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \mathcal{C} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \mathcal{C} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} [\xi_{kj} B(\varepsilon) \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} B(\varepsilon) \bar{\varphi}_k^{(j)}]. \end{aligned}$$

Обращая оператор $\tilde{\mathcal{B}}_0$, $\tilde{\mathcal{B}}_0^{-1} = \Gamma_0 [1]$, получим

$$\begin{aligned} w - \mu \Gamma_0 \mathcal{C} w - \Gamma_0 B(\varepsilon) w = & - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathcal{C} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \\ & + \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} w = \left[I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon) \right]^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathcal{C} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \right. \\ \left. + \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \right\}. \end{aligned}$$

Далее $[I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} = [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1}$,
 $[I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) = [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) =$
 $= (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) [I - \Gamma_0 B(\varepsilon) (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}$ и

$$\begin{aligned} & (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathcal{C} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathcal{C} (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1} \varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(1)}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & + \mu \Gamma_0 \mathcal{C} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \Big] + [I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) = \\ & = [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \left[- \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \right. \\ & \quad \left. + (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \mu \Gamma_0 \mathcal{C} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1} \varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(1)}) \right] + \\ & + (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} [I - \Gamma_0 B(\varepsilon) (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1}]^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) = \\ & = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \\
& + [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\mu\Gamma_0\mathcal{C} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\
& w = [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} \left[- \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \right. \\
& + [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) = \\
& = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \\
& + [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\mu\Gamma_0\mathcal{C} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\
& + [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) = \\
& = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathcal{C}(I - \mu\Gamma_0)^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\
& + (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)[I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\mu\Gamma_0\mathcal{C} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\
& + (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)[I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) = \\
& = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathcal{C}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\
& + (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)[I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Формулы

$$\begin{aligned}
\Gamma_0\mathcal{C}\varphi_k^{(1)} &= i\Gamma_0\tilde{\mathcal{B}}_0\varphi_k^{(2)} = i\varphi_k^{(2)}, \quad (\Gamma_0\mathcal{C})^2\varphi_k^{(1)} = i(\Gamma_0\mathcal{C})\varphi_k^{(2)} = i^2\varphi_k^{(3)}, \quad \dots \\
(\Gamma_0\mathcal{C})^s\varphi_k^{(1)} &= i^s\varphi_k^{(s+1)} \text{ при } s < p_k, \quad (\Gamma_0\mathcal{C})^{p_k}\varphi_k^{(1)} = i^{p_k}\varphi_k^{(1)}, \\
(\Gamma_0\mathcal{C})^s\varphi_k^{(1)} &= i^s\varphi_k^{(s - \lceil \frac{s}{p_k} \rceil p_k + 1)} \text{ при } s > p_k, \quad \psi_k^{(1)} = \Gamma_0^*\gamma_k^{(1)}, \quad \psi_k^{(s)} = \Gamma_0^*\gamma_k^{(p_k+1-s)},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

определяют выражение

$$\begin{aligned}
& \mu\Gamma_0\mathcal{C}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) = \\
& = \frac{\xi_{k1}}{1 - (i\mu)^{p_k}} [(i\mu)^{p_k}\varphi_k^{(1)} + (i\mu)\varphi_k^{(2)} + \dots + (i\mu)^{p_k-1}\varphi_k^{(p_k)}] + \\
& + \frac{\bar{\xi}_{k1}}{1 - (-i\mu)^{p_k}} [(-i\mu)^{p_k}\bar{\varphi}_k^{(1)} + (-i\mu)\bar{\varphi}_k^{(2)} + \dots + (-i\mu)^{p_k-1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)}].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Теперь подстановка $y = w + \xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi}$ во вторые равенства системы (2.5) в силу соотношений (2.4) при условии принадлежности присоединенных (корневых) элементов прямому дополнению $\mathcal{E}_1^{\infty-2n}$ к подпространству собственных элементов $\mathcal{E}_1^{2n}$ и учете формул

(2.7), (2.8) дает линейную однородную разрешающую систему (аналог уравнения разветвления в корневом подпространстве), состоящую из уравнений

$$\begin{aligned}
t_{k1}(\mu, \varepsilon) &\equiv -\xi_{k1} \frac{(i\mu)^{p_k}}{1-(i\mu)^{p_k}} - \langle \langle (I - \mu \mathcal{C} \Gamma_0)^{-1} B(\varepsilon) [I - (I - \mu \mathcal{C} \Gamma_0)^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\xi_{k1}}{1-(i\mu)^{p_k}} [\varphi_k^{(1)} + (i\mu) \varphi_k^{(2)} + \dots + (i\mu)^{p_k-1} \varphi_k^{(p_k)}] + \\
&\quad + \frac{\bar{\xi}_{k1}}{1-(-i\mu)^{p_k}} [\bar{\varphi}_k^{(1)} + (-i\mu) \bar{\varphi}_k^{(2)} + \dots + (-i\mu)^{p_k-1} \bar{\varphi}_k^{(p_k)}], \psi_k^{(1)} \rangle \rangle = 0, \\
t_{k\sigma}(\mu, \varepsilon) &\equiv \xi_{k\sigma} - \frac{(i\mu)^{\sigma-1}}{1-(i\mu)^{p_k}} \xi_{k1} - \langle \langle (I - \mu \mathcal{C} \Gamma_0)^{-1} B(\varepsilon) [I - (I - \mu \mathcal{C} \Gamma_0)^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\xi_{k\sigma}}{1-(i\mu)^{p_k}} [\varphi_k^{(1)} + (i\mu) \varphi_k^{(2)} + \dots + (i\mu)^{p_k-1} \varphi_k^{(p_k)}] + \\
&\quad + \frac{\bar{\xi}_{k\sigma}}{1-(-i\mu)^{p_k}} [\bar{\varphi}_k^{(1)} + (-i\mu) \bar{\varphi}_k^{(2)} + \dots + (-i\mu)^{p_k-1} \bar{\varphi}_k^{(p_k)}], \psi_k^{(p_k+2-\sigma)} \rangle \rangle = 0, \\
&\quad k = \overline{1, n}, \quad \sigma = \overline{1, p_k}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

и соответствующих им комплексно-сопряженных, равенство нулю определителя которой является уравнением разветвления в корневых подпространствах для определения периода колебаний $\frac{2\pi}{\alpha+\mu}$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, возмущенной задачи (1.2).

Замечание 2.1. В линейной однородной разрешающей системе слагаемые в уравнениях и их сопряженных, содержащие двойственность, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\langle \langle (I - \mu \mathcal{C} \Gamma_0)^{-1} [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \{ \dots \}, \psi_s^{(p_s+2-s)} \rangle \rangle = \\
&= \langle \langle [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \{ \dots \}, (I - \mu \Gamma_0^* \mathcal{C}^*)^{-1} \bar{\psi}_s^{(p_s+2-s)} \rangle \rangle,
\end{aligned}$$

и учитывая, что $C^* = -\frac{d}{dt} A^*$, выразить компоненты

$$(I - \mu \Gamma_0^* \mathcal{C}^*)^{-1} \bar{\psi}_s^{(p_s+2-s)}, \quad (I - \mu \Gamma_0^* \mathcal{C}^*)^{-1} \bar{\psi}_s^{(p_s+2-s)}$$

через линейную комбинацию ОЖЦ $\psi_s^{(1)}, \psi_s^{(2)}, \dots, \psi_s^{(p_s)}$, соответственно $\bar{\psi}_s^{(1)}, \bar{\psi}_s^{(2)}, \dots, \bar{\psi}_s^{(p_s)}$.

3. Редукция к возмущенной матричной задаче

Более компактным вариантом исследования задачи является ее редукция к возмущенной матричной задаче на собственные значения

$$\begin{pmatrix} B_0 + B(\varepsilon) & (\alpha + \mu)A \\ -(\alpha + \mu)A & B_0 + B(\varepsilon) \end{pmatrix} U = \left[\begin{pmatrix} B_0 + B(\varepsilon) & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 + B(\varepsilon) \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix} \right] U = 0, \quad \mu = \mu(\varepsilon). \tag{3.1}$$

Следует выяснить как изменится $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ -собственное значение α оператора

$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix}$ при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0 . Таким образом, рассматривается

задача на собственные значения

$$\left[\mathcal{B}(\alpha) + \begin{pmatrix} B(\varepsilon) & 0 \\ 0 & B(\varepsilon) \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix} \right] U = 0, \quad \mathbf{B} = \mathcal{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix} - \alpha \mathcal{A},$$

$$\mathbf{B}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \varepsilon + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \varepsilon^2 + \dots,$$

т. е.

$$\mathcal{B}(\alpha)U = [-\mathbf{B}(\varepsilon)U + \mu \mathcal{A}]U = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{B}U = -\mathbf{B}(\varepsilon)U + \mu \mathcal{A}U, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Согласно [5-7] обобщенный жорданов набор линейной по малому параметру μ оператор-функции $\mathbf{B} - \mu \mathcal{A}$ всегда может быть выбран триканоническим, т. е. для него справедливы формулы (1.7) или в координатной форме (1.8). Вводя регуляризатор Шмидта

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \Gamma_{jk}^{(1)} \rangle Z_{jk}^{(1)}, \quad \mathbf{\Gamma} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}, \quad \text{и, полагая}$$

$$U = W + V, \quad V = \xi_1 \Phi_1 + \xi_2 \Phi_2, \quad \xi_1 = (\xi_{i1}^1, \xi_{i1}^2, \dots, \xi_{i1}^{p_1}, \dots, \xi_{in}^1, \xi_{in}^2, \dots, \xi_{in}^{p_n});$$

$$\Phi_1 = (\Phi_{i1}^1, \Phi_{i1}^2, \dots, \Phi_{i1}^{p_1}, \dots, \Phi_{in}^1, \Phi_{in}^2, \dots, \Phi_{in}^{p_n}), \quad i = 1, 2,$$

(векторы $\Gamma_i, \Psi_i, Z_i, i = 1, 2$, определяются аналогично), запишем (3.2) в виде системы

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}W + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) - \mu \mathcal{A}W - \mu \mathcal{A} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) + \\ + \mathbf{B}(\varepsilon) \left(W + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) \right) = \sum_{k=1}^n (\xi_{1k}^j Z_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j Z_{2k}^{(j)}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\xi_{1k}^j = \langle U, \Gamma_{1k}^{(j)} \rangle = \langle W, \Gamma_{1k}^{(j)} \rangle + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \langle (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}), \Gamma_{ik}^{(j)} \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Обращая в первом уравнении оператор $\tilde{\mathbf{B}}$, получаем

$$W = [I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) - \right.$$

$$\left. - \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) \right\}.$$

Так как $[I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} = [I - (I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} (I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1}$ и

$$(I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) \right\} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A} (I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{1k}^1 \Phi_{1k}^{(1)} + \xi_{2k}^1 \Phi_{2k}^{(1)}), \quad \text{следовательно}$$

$$W = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A} (I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{1k}^1 \Phi_{1k}^{(1)} + \xi_{2k}^1 \Phi_{2k}^{(1)}) -$$

$$- (I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}(\varepsilon) [I - (I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} (I - \mu \mathbf{\Gamma} \mathcal{A})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{1k}^1 \Phi_{1k}^{(1)} + \xi_{2k}^1 \Phi_{2k}^{(1)}). \quad (3.4)$$

Подстановка определенного по формуле (3.4) W во вторые уравнения системы (3.3) при учете формул

$$\begin{aligned} \Gamma \mathcal{A} \Phi_{1k}^{(1)} &= \Gamma \tilde{B} \Phi_{1k}^{(2)} = \Phi_{1k}^{(2)}, \quad (\Gamma \mathcal{A})^2 \Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(3)}, \quad \dots, \quad (\Gamma \mathcal{A})^s \Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k, \\ &(\Gamma \mathcal{A})^{p_k} \Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(p_k+1)} = \Phi_{1k}^{(1)}, \\ \Gamma \mathcal{A} \Phi_{2k}^{(1)} &= \Gamma \tilde{B} \Phi_{2k}^{(2)} = \Phi_{2k}^{(2)}, \quad (\Gamma \mathcal{A})^2 \Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(3)}, \quad \dots, \quad (\Gamma \mathcal{A})^s \Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k, \\ &(\Gamma \mathcal{A})^{p_k} \Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(p_k+1)} = \Phi_{2k}^{(1)}, \\ &(\Gamma \mathcal{A})^s \Phi_{ik}^{(1)} = \Phi_{ik}^{(s - [\frac{s}{p_k}] p_k + 1)} \quad s > p_k, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

как и ранее, дает однородную систему $2K$ -порядка линейных алгебраических уравнений, равенство нулю определителя которой является уравнением разветвления в корневом подпространстве относительно $\mu = \mu(\varepsilon)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 524 с.
2. Треногин В. А. Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука. СО АН СССР, 1988. – С. 133–140.
3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задачам о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 3. – С. 100–107.
4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 33–40.
5. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными: сб. науч. работ / ред. М. С. Салахитдинов. – Ташкент: Изд-во «Фан» АН Узб.ССР, 1978. – С. 133–148.
6. Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления: дис. ... канд. мат. наук. – Ташкент, 1979. – 126 с.
7. Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и

- сопряженной к ней // Известия Акад. Наук Узб.ССР. Физ-мат. – 1978. – № 2. – С. 15–19.
8. Loginov B. V., Rousak Yu. B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions // Nonlinear Analysis: TMA. – 1991. – V. 17, N. 3. – pp. 219–232.
9. Loginov B. V. Determination of the branching equation by its group symmetry – Andronov-Hopf bifurcation // Nonlinear Analysis: TMA. – 1997. – V. 28, N. 12. – pp. 2033–2047.
10. Loginov B. V. Branching equation in the root subspace // Nonlinear Analysis: TMA. – 1998. – V. 32, N. 3. – pp. 439–448.
11. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu. B. On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative // Nonlinear Analysis. – 2007. – V. 67, N. 5. – pp. 1570–1585.
12. Коноплева И. В., Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2009. – С. 115–124.
13. Loginov B. V. On the determination of branching equation by its group symmetry // Doklady Mathematics. – 1993. – V. 331, N. 6. – P. 667.
14. Loginov B. V., Trenogin V. A. Branching equation of Andronov-Hopf bifurcation under group symmetry conditions // CHAOS, Amer. Inst. Phys. – 1997. – V. 7, N. 2. – pp. 229–238.
15. Логинов Б. В., Коноплева И. В., Русак Ю. Б. Теоремы о неявных операторах в условиях групповой симметрии // Доклады РАН. Математика. – 2011. – Т. 440, № 1. – С. 15–20.

КЯШКИН А. А., ШАМАНАЕВ П. А.

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Аннотация. В статье с использованием метода Ляпунова-Шмидта найдено семейство периодических решений для уравнения колебаний математического маятника. Получено асимптотическое разложение периода решений по малому параметру.

Ключевые слова: уравнение колебаний математического маятника, периодические решения, метод Ляпунова-Шмидта.

KYASHKIN A. A., SHAMANAEV P. A.

FINDING PERIODIC SOLUTIONS FOR THE EQUATION
OF MATHEMATICAL PENDULUM OSCILLATIONS

Abstract. The article presents a family of periodic solutions for the equation of mathematical pendulum oscillations found by the method of Lyapunov-Schmidt. An asymptotic expansion of the period of solutions in the small parameter is obtained.

Keywords: equation of mathematical pendulum oscillations, periodic solution, Lyapunov-Schmidt method.

Рассмотрим модельный пример – уравнение колебаний математического маятника [2]

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \sin z = \varepsilon \cdot f\left(z, \frac{dz}{dt}\right). \quad (1)$$

Отвечающие от $z \equiv 0$ $\frac{2\pi}{1+\mu}$ – периодические решения уравнения (1)

рассматриваются как решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \frac{x_1^3}{3!} - \frac{x_1^5}{5!} + \dots + \varepsilon \cdot \sum_{j_1+j_2 \geq 1} a_{j_1 j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2}, \end{cases} \quad (2)$$

где $x_1 = z$.

$$\text{С учетом обозначений } R(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_1^5}{5!} - \dots - \varepsilon \cdot \sum_{j_1+j_2 \geq 1} a_{j_1 j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, система (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = Bx - R(x, \varepsilon), \quad (3)$$

где $B: E_1 \mapsto E_2$.

После применения подстановки А. Пуанкаре $t = \frac{\tau}{1+\mu}$, где $\mu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$,

получаем $x(t)|_{t=\frac{\tau}{1+\mu}} = x\left(\frac{\tau}{1+\mu}\right) \stackrel{\text{def}}{=} y(\tau)$. Тогда система (3) перепишется в виде

$$By = \mu Cy + R(y, \varepsilon), \quad (4)$$

где $By \equiv (B-C)y$, $Cy \equiv y'(\tau)$, $B: \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_k = E_k + iE_k$, $k = \overline{1,2}$. Множество нулей оператора

$$B \text{ имеет вид } N(B) = \{\varphi(\tau), \bar{\varphi}(\tau)\}, \text{ где } \varphi(\tau) = \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\tau}, \bar{\varphi}(\tau) = \bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\tau}.$$

Рассмотрим также сопряженные операторы $B^*: E_2^* \mapsto E_1^*$ и $B^*: \mathcal{E}_2^* \mapsto \mathcal{E}_1^*$, $\mathcal{E}_k^* = E_k^* + iE_k^*$, $k = \overline{1,2}$. Множество нулей сопряженного оператора имеет вид $N(B^*) = \{\psi(\tau), \bar{\psi}(\tau)\}$, где $\psi(\tau) = \psi = \varphi$, $\bar{\psi}(\tau) = \bar{\psi} = \bar{\varphi}$.

Согласно следствию из теоремы Хана-Банаха в $\mathcal{E}_1^*$ существуют функционалы γ_1, γ_2 такие, что [1, с. 337]

$$\langle\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle\rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1,2}.$$

По тому же следствию из теоремы Хана-Банаха в $\mathcal{E}_2$ существуют элементы z_1, z_2 такие, что

$$\langle\langle z_k, \psi_s \rangle\rangle = \delta_{k,s}, \quad k, s = \overline{1,2}.$$

Здесь $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \bar{\varphi}$; $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \bar{\psi}$; а $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f(\tau), g(\tau) \rangle d\tau$ – значение функционала $g(\tau)$ на элементе $f(\tau)$. Используя лемму о биортогональности, получим $\gamma_i = \psi_i = z_i = \varphi_i$, $i = \overline{1,2}$.

Решение системы (4) будем искать по обобщенной лемме Шмидта. Введем оператор

$$\tilde{B}y \equiv By + \sum_{i=1}^2 \xi_i z_i,$$

где

$$\xi_j = \langle\langle y, \gamma_j \rangle\rangle, \quad j = \overline{1,2}, \quad (5)$$

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \bar{\xi}, \quad (6)$$

и запишем (4) в эквивалентной форме

$$\tilde{B}y = \mu Cy + R(y, \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 \xi_i z_i. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) представим в виде

$$y = w + \sum_{i=1}^2 \xi_i \varphi_i, \quad (8)$$

где

$$w = w(\xi_1, \xi_2, \mu, \varepsilon) = y_{0010}\mu + y_{0001}\varepsilon + \sum_{k_1+k_2+k+l \geq 2} y_{k_1 k_2 k l} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \mu^k \varepsilon^l. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\tilde{B}w = \mu w' + \mu \xi_1 \varphi_1'(\tau) + \mu \xi_2 \varphi_2'(\tau) + R\left(w + \sum_{i=1}^2 \xi_i \varphi_i, \varepsilon\right). \quad (10)$$

Подставив ряд (9) в систему (10), методом неопределенных коэффициентов найдем коэффициенты для w , а значит и для y .

Для нахождения системы разветвления подставим полученный ряд (9) в уравнения (5):

$$\sum_{i+j \geq 2} L_{ij00}^{(m)} \xi_1^i \xi_2^j + \sum_{i+j \geq 0} \xi_1^i \xi_2^j \sum_{k+l \geq 1} L_{ijkl}^{(m)} \mu^k \varepsilon^l = 0, \quad m = 1, 2,$$

где коэффициенты уравнения разветвления задаются так:

$$L_{ijkl}^{(m)} = \langle \langle y_{ijkl}, \gamma_s \rangle \rangle, \quad m = 1, 2. \quad (11)$$

Для реализации метода неопределенных коэффициентов используется математический пакет *Mathematica*. Для построения системы разветвления ограничимся третьим порядком коэффициентов.

Приведем значения ненулевых коэффициентов:

$$\begin{aligned} y_{1010} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\tau}, \quad y_{0110} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{1001} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10}) + i(2a_{01} - a_{10}) \\ -(2a_{01} + a_{10}) + i(-a_{01} + 2a_{10}) \end{pmatrix} e^{i\tau}, \\ y_{0101} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10}) - i(2a_{01} - a_{10}) \\ -(2a_{01} + a_{10}) - i(-a_{01} + 2a_{10}) \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{3000} = \frac{1}{32\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i/3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3i\tau}, \\ y_{2100} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2-i \\ -1+2i \end{pmatrix} e^{i\tau}, \quad y_{1200} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+i \\ -1-2i \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{0300} = \frac{1}{32\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i/3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3i\tau}, \\ y_{1020} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\tau}, \quad y_{0120} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{2001} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02}) + ia_{11} \\ -2a_{11} + i(2a_{20} - 2a_{02}) \end{pmatrix} e^{2i\tau}, \quad y_{1101} = \begin{pmatrix} a_{20} + a_{02} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y_{0201} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02}) - ia_{11} \\ -2a_{11} - i(2a_{20} - 2a_{02}) \end{pmatrix} e^{-2i\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{1011} &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\frac{(-9a_{01} + 2a_{10}) + i(2a_{01} + 9a_{10})}{(2a_{01} - 7a_{10}) - i(7a_{01} + 2a_{10})} \right) e^{ir}, \\
y_{0111} &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\frac{(-9a_{01} + 2a_{10}) - i(2a_{01} + 9a_{10})}{(2a_{01} - 7a_{10}) + i(7a_{01} + 2a_{10})} \right) e^{-ir}, \\
y_{1002} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \left(\frac{(4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) + i(3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2)}{(-5a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} + 3a_{01}^2) - i(8a_{10}a_{01} - 4a_{01}^2)} \right) e^{ir}, \\
y_{0102} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \left(\frac{(4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) - i(3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2)}{(-5a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} + 3a_{01}^2) + i(8a_{10}a_{01} - 4a_{01}^2)} \right) e^{-ir}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты уравнения разветвления найдем по формуле (11). Приведем ненулевые коэффициенты:

$$\begin{aligned}
L_{1001}^{(1)} &= \langle \langle y_{1001}, \gamma_1 \rangle \rangle = -\frac{1}{2}(a_{01} - a_{10}i), & L_{0101}^{(2)} &= \langle \langle y_{0101}, \gamma_2 \rangle \rangle = -\frac{1}{2}(a_{01} + a_{10}i), \\
L_{1010}^{(1)} &= \langle \langle y_{1010}, \gamma_1 \rangle \rangle = i, & L_{0110}^{(2)} &= \langle \langle y_{0110}, \gamma_2 \rangle \rangle = -i, \\
L_{1002}^{(1)} &= \langle \langle y_{1002}, \gamma_1 \rangle \rangle = & L_{0102}^{(2)} &= \langle \langle y_{0102}, \gamma_2 \rangle \rangle = \\
&= \frac{1}{4}(a_{01}^2 - a_{10}^2) - \frac{1}{8}i(4a_{01}a_{10} - a_{10}^2 - a_{01}^2), & &= \frac{1}{4}(a_{01}^2 - a_{10}^2) + \frac{1}{8}i(4a_{01}a_{10} - a_{10}^2 - a_{01}^2), \\
L_{1020}^{(1)} &= \langle \langle y_{1020}, \gamma_1 \rangle \rangle = -1, & L_{0120}^{(2)} &= \langle \langle y_{0120}, \gamma_2 \rangle \rangle = -1, \\
L_{2100}^{(1)} &= \langle \langle y_{2100}, \gamma_1 \rangle \rangle = \frac{i}{8}, & L_{1200}^{(2)} &= \langle \langle y_{1200}, \gamma_2 \rangle \rangle = -\frac{i}{8}, \\
L_{1011}^{(1)} &= \langle \langle y_{1011}, \gamma_1 \rangle \rangle = -a_{10} - ia_{01}, & L_{0111}^{(2)} &= \langle \langle y_{0111}, \gamma_2 \rangle \rangle = -a_{10} + ia_{01}.
\end{aligned}$$

С учетом (6) и $\xi\bar{\xi} = |\xi|^2$ записываем систему разветвления:

$$\begin{aligned}
&\xi \left(-\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon \right) + \\
&\quad + \xi i \left(-a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\xi|^2 \right) = 0, \\
&\bar{\xi} \left(-\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon \right) - \\
&\quad - \bar{\xi} i \left(-a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\xi|^2 \right) = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

Рассматриваем первое уравнение системы (12). Решение $\xi = 0$ отвечает тривиальному решению уравнения (1).

Пусть $\xi \neq 0$. После сокращения первого уравнения на ξ и отделения вещественной и мнимой части [2, 3] получим:

$$\begin{aligned}
Re: \quad & -\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon = 0, \\
Im: \quad & -a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\zeta|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Из второго уравнения выразим μ :

$$\mu = \mu(|\zeta|, \varepsilon) = \frac{1}{1 - a_{01}\varepsilon} \left(-\frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon - \frac{1}{8}|\zeta|^2 \right), \quad \varepsilon \neq \frac{1}{a_{01}}. \quad (13)$$

Подставив (13) в первое уравнение, получаем приближенное редуцированное уравнение разветвления:

$$|\zeta|^4 + 2\varepsilon^2(a_{01}^2 + a_{10}^2)|\zeta|^2 + (a_{10}^4\varepsilon^4 - 15a_{01}^4\varepsilon^4 + 2a_{01}^2a_{10}^2\varepsilon^4 + 64a_{01}^3\varepsilon^3 - 80a_{01}^2\varepsilon^2 + 32a_{01}\varepsilon) = 0. \quad (14)$$

Пусть ζ и $\bar{\zeta}$ имеют вид [3]: $\zeta = r(\varepsilon)e^{i\theta}$, $\bar{\zeta} = r(\varepsilon)e^{-i\theta}$, где $\theta \in \mathbf{R}$. Следовательно, $r \equiv r(\varepsilon) = |\zeta|$.

Найдем решения биквадратного относительно $|\zeta|$ уравнения (14). Очевидно, имеет смысл только корень уравнения:

$$|\zeta| = \sqrt{-\varepsilon^2(a_{01}^2 + a_{10}^2) + 4\sqrt{a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2)}} \quad (15)$$

при условиях

$$\begin{cases} -\varepsilon^2(a_{01}^2 + a_{10}^2) + 4\sqrt{a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2)} > 0, \\ a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2) > 0. \end{cases}$$

Подставив (15) в (13), получаем

$$\mu \equiv \mu(r(\varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - a_{01}\varepsilon} \left(a_{01}a_{10}\varepsilon^2 - a_{10}\varepsilon - \sqrt{a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2)} \right).$$

Подстановка найденных ζ и μ в (9) и (8) дает приближенное однопараметрическое семейство периодических решений системы (4):

$$\begin{aligned}
y(\tau, \varepsilon, \theta) = & \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} r + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10})\cos \alpha - (2a_{01} - a_{10})\sin \alpha \\ -(2a_{01} + a_{10})\cos \alpha - (-a_{01} + 2a_{10})\sin \alpha \end{pmatrix} r\varepsilon + \\
& + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} r\mu + \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/3 \cdot \sin 3\alpha \\ \cos 3\alpha \end{pmatrix} r^3 + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} r\mu^2 + \\
& + \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\cos \alpha + \sin \alpha \\ -\cos \alpha - 2\sin \alpha \end{pmatrix} r^3 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02})\cos 2\alpha - a_{11}\sin 2\alpha \\ -2a_{11}\cos 2\alpha - (2a_{20} - 2a_{02})\sin 2\alpha \end{pmatrix} r^2\varepsilon + \\
& + \begin{pmatrix} a_{20} + a_{02} \\ 0 \end{pmatrix} r^2\varepsilon + \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-9a_{01} + 2a_{10})\cos \alpha - (2a_{01} + 9a_{10})\sin \alpha \\ (2a_{01} - 7a_{10})\cos \alpha + (7a_{01} + 2a_{10})\sin \alpha \end{pmatrix} r\mu\varepsilon +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{8\sqrt{2}} \left((4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01})\cos\alpha - (3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2)\sin\alpha \right) r\varepsilon^2,$$

где $\alpha \equiv \alpha(\tau, \Theta) = \tau + \Theta$.

С учетом обратной замены $y(\tau)|_{\tau=t(1+\mu)} = y(\tau(1+\mu)) \stackrel{\text{def}}{=} x(t)$ получаем

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon, \Theta) = & \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} r + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10})\cos\beta - (2a_{01} - a_{10})\sin\beta \\ -(2a_{01} + a_{10})\cos\beta - (-a_{01} + 2a_{10})\sin\beta \end{pmatrix} r\varepsilon + \\ & + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} r\mu + \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/3 \cdot \sin 3\beta \\ \cos 3\beta \end{pmatrix} r^3 + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} r\mu^2 + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\cos\beta + \sin\beta \\ -\cos\beta - 2\sin\beta \end{pmatrix} r^3 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02})\cos 2\beta - a_{11}\sin 2\beta \\ -2a_{11}\cos 2\beta - (2a_{20} - 2a_{02})\sin 2\beta \end{pmatrix} r^2\varepsilon + \\ & + \begin{pmatrix} a_{20} + a_{02} \\ 0 \end{pmatrix} r^2\varepsilon + \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-9a_{01} + 2a_{10})\cos\beta - (2a_{01} + 9a_{10})\sin\beta \\ (2a_{01} - 7a_{10})\cos\beta + (7a_{01} + 2a_{10})\sin\beta \end{pmatrix} r\mu\varepsilon + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} \left((4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01})\cos\beta - (3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2)\sin\beta \right) r\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\beta \equiv \beta(t, \mu, \Theta) = (1+\mu)t + \Theta$.

С учетом 1-го уравнения системы (2) и $x_1 = z$, запишем полученные приближенные решения уравнения (1):

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon, \Theta) = & \sqrt{2} \sin(\beta) \cdot r + \frac{1}{2\sqrt{2}} [(a_{01} + 2a_{10})\cos\beta - (2a_{01} - a_{10})\sin\beta] r\varepsilon + \\ & + \sqrt{2} \cos(\beta) \cdot r\mu + \frac{1}{48\sqrt{2}} \sin(3\beta) \cdot r^3 - \sqrt{2} \sin(\beta) \cdot r\mu^2 + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} (2\cos\beta + \sin\beta) r^3 + \frac{1}{3} [(a_{20} - a_{02})\cos 2\beta - a_{11}\sin 2\beta] r^2\varepsilon + \\ & + (a_{20} + a_{02}) r^2\varepsilon + \frac{1}{4\sqrt{2}} [(-9a_{01} + 2a_{10})\cos\beta - (2a_{01} + 9a_{10})\sin\beta] r\mu\varepsilon + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} [(4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01})\cos\beta - (3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2)\sin\beta] r\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что уравнение (1) автономное, $z(t, \varepsilon, \Theta)$ в (16) – приближенное решение этого уравнения, то приближенным решением уравнения (1) также будет

$$z(t + C, \varepsilon, \Theta), \text{ где } C \in \mathbf{R}, \beta \equiv \beta(t + C, \mu, \Theta) = (1+\mu)(t + C) + \Theta. \quad (17)$$

Таким образом, мы получили двухпараметрическое семейство приближенных решений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Кочуров В. В. Модельный пример бифуркации Андронова-Хопфа // Механика и процессы управления: сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 37–40.
3. Треногин В. А. Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. – С. 134–140.

ЖАЛНИН Р. В., ЛАДОНКИНА М. Е., МАСЯГИН В. Ф., ТИШКИН В. Ф.
О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ¹

Аннотация. В статье описана численная методика для решения однофазной задачи нестационарной фильтрации жидкости в анизотропной среде на основе метода Галёркина с разрывными базисными функциями на неструктурированной сетке. Численная схема рассматривается на примере начально-краевой задачи для двумерной задачи однофазной фильтрации. Результаты расчетов тестовых задач показывают хорошую точность предлагаемого метода.

Ключевые слова: нестационарная фильтрация, уравнения параболического типа, треугольные сетки, разрывный метод Галёркина.

ZHALNIN R. V., LADONKINA M. E., MASYAGIN V. F., TISHKIN V. F.
APPLICATION OF DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SOLVING
ONE-PHASE FILTRATION PROBLEM IN ANISOTROPIC MEDIA

Abstract. The article considers the application of discontinuous Galerkin method for one-phase filtration problem in anisotropic media. For the numerical experiment the initial-boundary problem for two-dimensional one-phase filtration is chosen. Calculations of the modeling problems demonstrate a high degree accuracy of the offered method.

Keywords: unsteady filtration, parabolic equations, triangle grid, discontinuous Galerkin method.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в общем случае фильтрацию жидкости в анизотропной среде. В работе [4] было показано, что абсолютную проницаемость можно представить как тензор второго ранга, его свертка с градиентом давления – есть скорость фильтрации, с точностью до множителя (вязкость жидкости):

$$v_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где k_{ij} – тензор проницаемости.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол_а).

Учитывая уравнение неразрывности для жидкости в пористой среде [2; 5] и (1) получим:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = w, \quad (2)$$

где p – давление, $m = m(p)$ – пористость, $\rho = \rho(p)$ – плотность жидкости, w – распределенный источник массы. Пусть плотность жидкости и пористость связаны с давлением следующими соотношениями: $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \text{const} = C_f$, $\frac{\partial m}{\partial p} = \text{const} = C_m$, где C_f, C_m – коэффициенты изотермической фильтрации. Тогда уравнение (1) можно переписать относительно давлений [6]:

$$\mu(C_m + mC_f) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = w. \quad (3)$$

Уравнение (3) является в общем случае нелинейным в связи с зависимостью пористости от давления, однако в [6] показано, что если в качестве пористости рассматривать пористость при начальном пластовом давлении m_0 , которая не зависит от давления, то это не внесет больших погрешностей, а уравнение (3) становится линейным.

$$\mu(C_m + m_0 C_f) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = w. \quad (4)$$

Данное уравнение принято называть уравнением пьезопроводности. Оно описывает изотермическую фильтрацию однофазной жидкости на упругом режиме. Уравнение, впервые полученное для однородного случая в [6] по виду совпадает с уравнением, описывающим распространение тепла. Классические модели интерпретации гидродинамических исследований скважины [7] связаны с решением именно этого уравнения.

2. Описание численного алгоритма на основе разрывного метода Галёркина

Зададим множество точек $\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ в области расчета, которое содержит внутренние и граничные точки области. Для ω_p произведем триангуляцию Делоне: $T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1, T_k^2, T_k^3), T_k^1, T_k^2, T_k^3 \in \omega_p, k = 1, 2, \dots, M\}$. В треугольнике T_k с вершинами в точках $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$, $T_k^2 : \{x_2, y_2\}$, $T_k^3 : \{x_3, y_3\}$ определим центр (x_c, y_c) : $x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Производные второго порядка не могут быть согласованы напрямую в слабой вариационной формулировке, используя пространство разрывных функций. Следовательно, для решения уравнения (4) с помощью разрывного метода Галёркина [3] введем вспомогательные переменные [9]:

$$\omega_x = -\left(k_{xx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

$$\omega_y = -\left(k_{yx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

Тогда уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \mu(C_m + m_0 C_f) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial}{\partial y} \omega_y = w, \\ \omega_x = -\left(k_{xx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial p}{\partial y}\right), \\ \omega_y = -\left(k_{yx} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial p}{\partial y}\right). \end{cases} \quad (5)$$

В каждом треугольнике $T_k \in T(\omega_p)$ приближенное решение (5) будем искать в виде проекции p и вспомогательных переменных на пространство полиномов $P^1(x, y)$ первой степени в базисе $\{\varphi_i\} \in P^1$, $i = \overline{0, 2}$, $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \frac{x - x_c}{\Delta x}$, $\varphi_2 = \frac{y - y_c}{\Delta y}$, где (x_c, y_c) – центр треугольника T_k , $\Delta x, \Delta y$ – проекции треугольника на оси координат.

В каждой ячейке линейная комбинация базисных функций будет определять решение:

$$p_k = p_{0k} + p_{1k} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} + p_{2k} \frac{(y - y_c)}{\Delta y}, \quad p_{ik} = p_{ik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

$$\omega_{xk} = \omega_{x0k} + \omega_{x1k} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} + \omega_{x2k} \frac{(y - y_c)}{\Delta y}, \quad \omega_{xik} = \omega_{xik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

$$\omega_{yk} = \omega_{y0k} + \omega_{y1k} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} + \omega_{y2k} \frac{(y - y_c)}{\Delta y}, \quad \omega_{yik} = \omega_{yik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2},$$

Определим коэффициенты разложения $p_k, \omega_{xk}, \omega_{yk}$ из условия ортогональности невязки пробным функциям φ_i на каждом треугольнике T_k [10]:

$$\begin{aligned} & \left[\mu(C_m + m_0 C_f) \right]_k \sum_{i=0}^2 \frac{\partial p_{ik}}{\partial t} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m dS + \oint_{\partial T_k} n_x \hat{\omega}_x \varphi_m dl + \oint_{\partial T_k} n_y \hat{\omega}_y \varphi_m dl - \int_{T_k} \omega_{xk} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dS - \\ & - \int_{T_k} \omega_{yk} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dS = \int_{T_k} W_k \varphi_m dS, \quad m = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^2 \omega_{xik} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m dS = - \oint_{\partial T_k} n_x k_{xx} p \varphi_m dl - \oint_{\partial T_k} n_y k_{xy} p \varphi_m dl + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{xx} \varphi_m)}{\partial x} dS + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{xy} \varphi_m)}{\partial y} dS, \\ m = \overline{0,2}, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^2 \omega_{yik} \int_{T_k} \varphi_i \varphi_m dS = - \oint_{\partial T_k} n_x k_{yx} p \varphi_m dl - \oint_{\partial T_k} n_y k_{yy} p \varphi_m dl + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{yx} \varphi_m)}{\partial x} dS + \int_{T_k} p_k \frac{\partial(k_{yy} \varphi_m)}{\partial y} dS, \\ m = \overline{0,2}, \quad (8)$$

Потоковые значения величин на границе ячейки предлагается вычислять аналогично тому, как это сделано для уравнения теплопроводности [8], используя стабилизирующие добавки. Для вычисления потоковых значений внутри расчетной области имеем:

$$\hat{\omega}_x(p^+, \omega_x^+, p^-, \omega_x^-, n) = \frac{\omega_x^+ + \omega_x^-}{2} - C_1(p^+ - p^-)n_x, \\ \hat{\omega}_y(p^+, \omega_y^+, p^-, \omega_y^-, n) = \frac{\omega_y^+ + \omega_y^-}{2} - C_1(p^+ - p^-)n_y, \\ \hat{p} = \frac{p^+ - p^-}{2},$$

на границе расчетной области брались следующие значения:

$$\hat{\omega}_x(p^+, \omega_x^+, n) = \omega_x^+ - C_1(p^+ - g)n_x, \\ \hat{\omega}_y(p^+, \omega_y^+, n) = \omega_y^+ - C_1(p^+ - g)n_y, \\ \hat{p} = g,$$

где $p^-, \omega_x^-, \omega_y^-$ – значения величин из ячейки, для которой нормаль n является внутренней, $p^+, \omega_x^+, \omega_y^+$ – значения величин из ячейки, для которой нормаль n является внешней, g – граничное условие Дирихле, C_1 брали порядка $O(1/h)$, где h – диаметр ячейки.

3. Примеры расчетов

Была рассмотрена первая краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} W = 0, \quad r \in D,$$

$$W = -\hat{K} \nabla u,$$

$$u|_{t=0} = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad u|_{\partial D} = 0,$$

где область D представляет собой единичный квадрат на плоскости OXY с координатами вершин $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$. Матрица тензора проницаемости симметричная

положительно-определенная. Тензор проницаемости имеет диагональный вид $\hat{K} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,

где a и b постоянны на всей области D . Методом разделения переменных можно найти точное решение задачи: $U = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\exp[-(a+b)\pi^2 t]$. В первом случае коэффициент проницаемости брали $\hat{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, во втором равным $\hat{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На рисунках показан модуль разности между численным и точным решением в центре ячеек расчетной области.

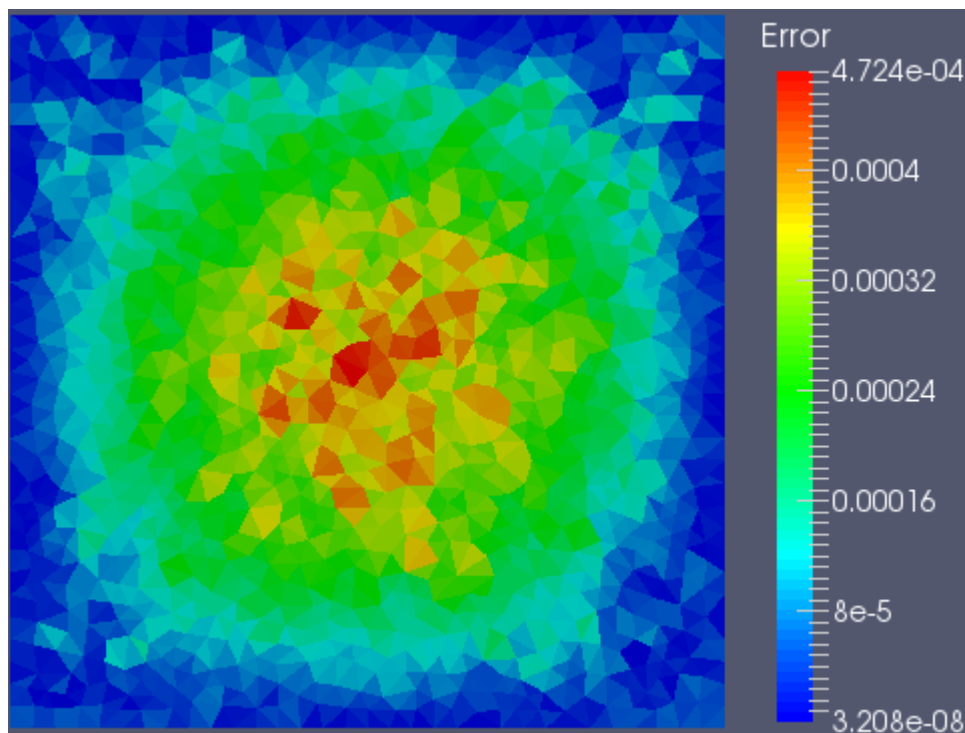


Рис. 1. Случай 1, $t = 0.1$

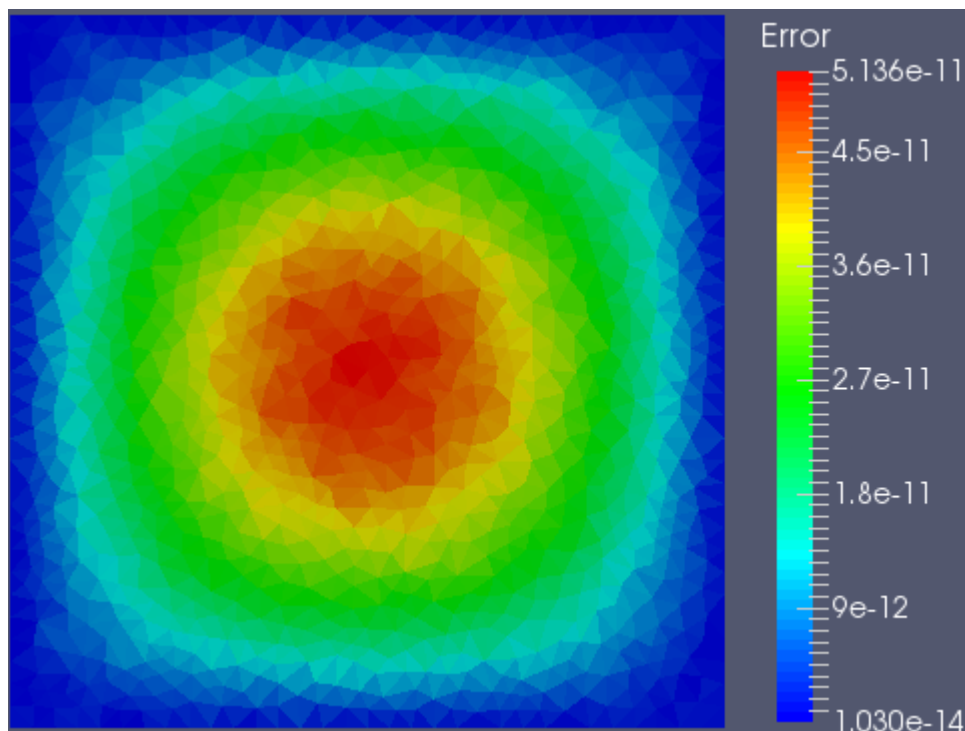


Рис. 2. Случай 1, $t = 1.0$

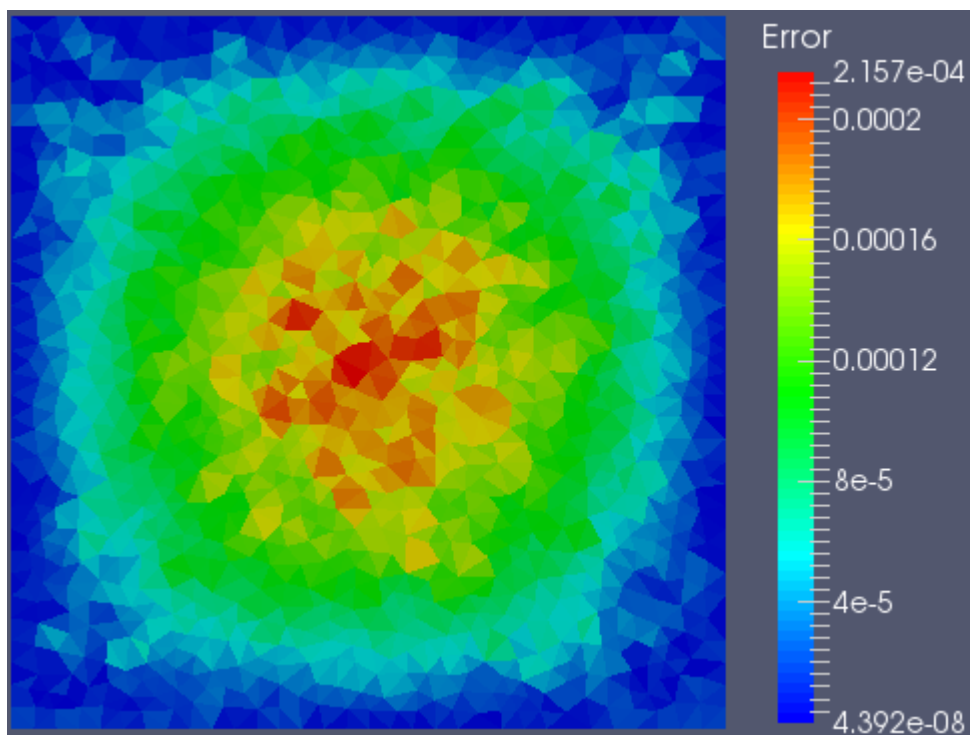


Рис. 3. Случай 2, $t = 0.1$

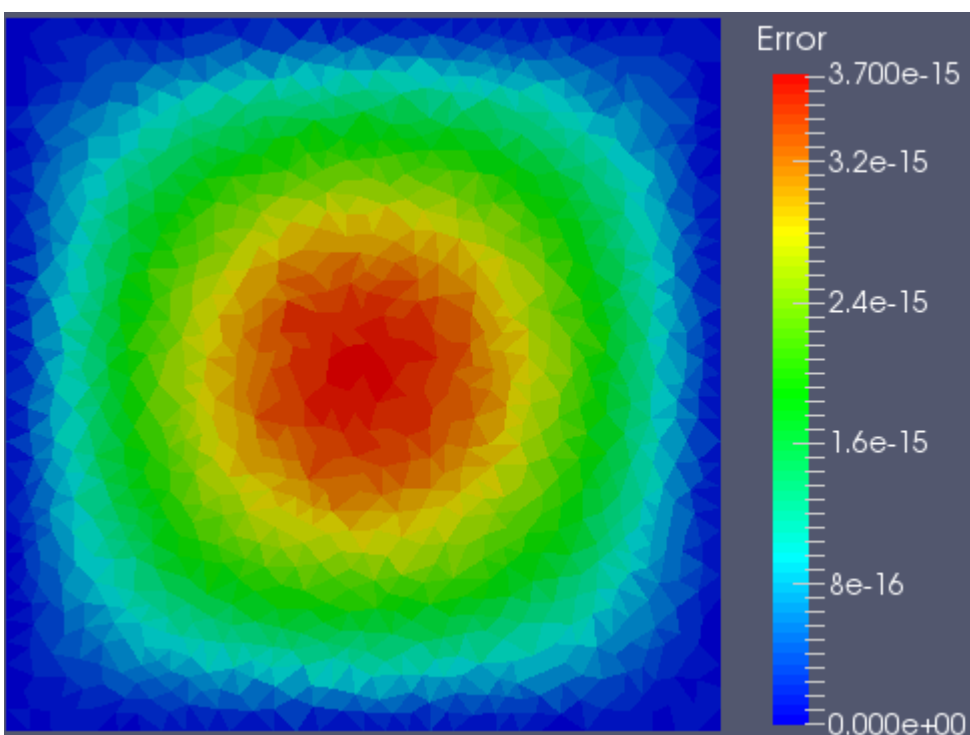


Рис. 4. Случай 2, $t = 1.0$

Выводы

Результаты расчетов показали возможность применения описанного в данной работе численного алгоритма для решения задач однофазной фильтрации в анизотропных средах разрывным методом Галёркина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Масягин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 59–65.
2. Кондауров В. И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 310 с.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / Пер. с английского. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
4. Хасанов М. М., Мукминов И. Р., Бачин С. И. К расчету притока жидкости к скважинам, работающим в условиях локального разгазирования // Нефтепромысловое дело. – 2000. – № 8-9. – С. 2–9.
5. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
6. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации: Монография: В 2 ч. – Ч. 1. – М.: Нефть и газ, 1995. – 586 с.
7. Эрлагер Р. Гидродинамические исследования скважин. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 512 с.
8. Arnold D. N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L. D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol. 29. – pp. 1749–1779.
9. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations // J. Comput. Phys. – 1997. – Vol. 131. – pp. 267–279.
10. Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // J. Sci. Comp. – 2001. – Vol. 3. – pp. 173–261.

ЖАЛНИН Р. В., МАСЯГИН В. Ф., САЛЬНИКОВ В. Д.

НЕЯВНАЯ СХЕМА, ОСНОВАННАЯ НА РАЗРЫВНОМ МЕТОДЕ ГАЛЁРКИНА, ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ¹

Аннотация. В статье описана неявная противопоточная схема, основанная на разрывном методе Галёркина для моделирования течений идеального сжимаемого газа в трехмерном случае. Сеточные уравнения записаны относительно приращения для удобства их решения с помощью подпрограмм библиотеки HYPRE.

Ключевые слова: газовая динамика, численное моделирование, уравнение Эйлера.

ZHALNIN R. V., MASYAGIN V. F., SALNIKOV V. D.

IMPLICIT SCHEME BASED ON DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR COMPRESSIBLE GAS FLOWS 3D SIMULATION

Abstract. The article describes the implicit upwind scheme based on discontinuous Galerkin method for compressible gas flows 3D simulation. The scheme is written relative increment to simplify the solution by using of the HYPRE modules.

Keywords: gas dynamics, numerical simulation, Euler equation.

В настоящее время для решения задач моделирования течений сжимаемого газа используются или конечно-объемные вычислительные алгоритмы высокого порядка точности [4], или конечно-элементные методы, основанные на методе Галеркина с разрывными базисными функциями [1], который также характеризуется высоким порядком точности получаемого решения и обладает меньшими требованиями к качеству сетки. В статье [5] описывается неявная схема, основанная на разрывном методе Галеркина для решения задач газовой динамики в общем виде. В этой статье подробно расписана разностная схема для трехмерного случая.

1. Основные уравнения

В основе математической модели теории движения газа и жидкости лежат законы сохранения массы, импульса и энергии. В трехмерной декартовой системе координат течение сжимаемого идеального невязкого газа описывает уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

уравнение состояния представлено в форме:

$$p = \varepsilon \rho (\gamma - 1), \quad (1.2)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол_а).

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, F_x(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, F_y(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, F_z(U) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь t – время; ρ – плотность; p – давление; (u, v, w) – составляющие скорости в координатных направлениях (x, y, z) ; ε – внутренняя энергия единицы массы;

$E = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$ – полная энергия единицы массы; $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – показатель адиабаты; C_p – теплоемкость при постоянном давлении; C_v – теплоемкость при постоянном объеме.

2. Численный метод

В основу численного алгоритма положен разрывный метод Галеркина. Для применения разрывного метода Галеркина покроем область Ω , на которой ищется решение, тетраэдральной сеткой T_h . На каждом элементе T_m приближенное решение системы уравнений (1.1-2) будем искать в виде полиномов $P(x)$ степени p с зависящими от времени коэффициентами:

$$U_{h|m}^n(\bar{x}, t) = \sum_{i=0}^{st} U_{i|m}(t) \varphi_{i|m}(\bar{x}), \bar{x} = (x, y, z), \quad (2.1)$$

где st – размерность пространства полиномов, а $\varphi_{i|m}(\bar{x})$ – соответствующая базисная функция на m -ой ячейки.

Приближенное решение системы (1.1-2) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\int_{T_m} \frac{\partial U_{h|m}}{\partial t} \varphi_{k|m} dx dy dz + \int_{T_m} \left(\frac{F_x(U_{h|m})}{\partial x} + \frac{F_y(U_{h|m})}{\partial y} + \frac{F_z(U_{h|m})}{\partial z} \right) \varphi_{k|m} dx dy dz = 0, k = \overline{0, st} \quad (2.2)$$

Преобразовав (2.2) получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{st} \left(\frac{\partial U_{i|m}}{\partial t} \int_{T_m} \varphi_{i|m} \varphi_{k|m} dx dy dz \right) + \oint_{\partial T_m} (F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z) \varphi_{k|m} dS \\ - \int_{T_m} \left(F_x \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dx dy dz = 0, k = \overline{0, st} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Теперь можно записать неявную схему по времени t в полу дискретном виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{st} \left(\int_{T_m} \varphi_{i|m} \varphi_{k|m} dx dy dz \frac{\Delta U_{i|m}^{n+1}}{\tau} \right) + \oint_{\partial T_m} (F_x^{n+1} n_x + F_y^{n+1} n_y + F_z^{n+1} n_z) \varphi_{k|m} dS \\ - \int_{T_m} \left(F_x^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dx dy dz = 0, k = \overline{0, st} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\frac{\partial U_{i|m}}{\partial t} \approx \frac{U_{i|m}^{n+1} - U_{i|m}^n}{\tau} = \frac{\Delta U_{i|m}^{n+1}}{\tau}, \quad (2.5)$$

$n = (n_x, n_y, n_z)$ – вектор единичной нормали по границе ∂T_m .

Потоки через грань контрольного объема вычисляются на основе приближенного решения задачи Римана [3].

Рассмотрим линеаризацию потоковой функции:

$$F_{x|mp}^{n+1} = F_x(U_{h|mp}^{n+1}) = F_{x|mp}^n + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{h|mp}^n (U_{h|mp}^{n+1} - U_{h|mp}^n), \quad (2.6)$$

где $U_{h|mp}^n$ – осредненное по Роу [2] значение между $U_{h|m}^n$ и $\widetilde{U_{h|mp}^n}$; $\widetilde{U_{h|mp}^n} = U_{h|k}^n$ – такое переобозначение, когда k -ая ячейка является соседней с m -ой ячейкой, и для них обеих p -ая граница m -ой ячейки является общей.

Матрица Якоби $\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)$ обладает набором действительных собственных значений и векторов, и поэтому может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} A &= R\Lambda L = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)L = A^+ + A^-, \\ A^+ &= R\Lambda^+L, \\ A^- &= R\Lambda^-L, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$, $\Lambda^+ = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|)$, $\Lambda^- = \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|)$, $|\Lambda| = \text{diag}\{|\lambda_i|\}$.

Опираясь на этот факт, для того чтобы сконструировать противопоточную разностную схему в дельта-форме, представим разложение (2.6) в виде:

$$F_{x|mp}^{n+1} = F_{x|mp}^n + \left\langle \frac{\partial F_x}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n \Delta U_{h|m}^{n+1} + \left\langle \frac{\partial F_x}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n \Delta \widetilde{U_{h|mp}^{n+1}}. \quad (2.8)$$

Таким образом, поверхностный интеграл из (2.4) может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} &\oint_{\partial T_m} (F_x^{n+1} n_x + F_y^{n+1} n_y + F_z^{n+1} n_z) \varphi_{k|m} dS = \\ &\sum_{p=1}^4 S_{mp} * \left[\left\langle n_{xmp} \left(F_{x|mp}^n + \left\langle \frac{\partial F_x}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n \Delta U_{h|m}^{n+1} + \left\langle \frac{\partial F_x}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n \Delta \widetilde{U_{h|mp}^{n+1}} \right) + n_{ymp}(\cdot) + n_{zmp}(\cdot) \right\rangle \varphi_{k|m} \right] = \\ &\sum_{p=1}^4 S_{mp} * \left[\left(\left\langle \frac{\partial F_x}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n n_{xmp} + \left\langle \frac{\partial F_y}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n n_{ymp} + \left\langle \frac{\partial F_z}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n n_{zmp} \right) \varphi_{k|m} \right] \Delta U_{h|m}^{n+1} + \\ &\sum_{p=1}^4 S_{mp} * \left[\left(\left\langle \frac{\partial F_x}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n n_{xmp} + \left\langle \frac{\partial F_y}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n n_{ymp} + \left\langle \frac{\partial F_z}{\partial U} \right\rangle_{h|mp}^n n_{zmp} \right) \varphi_{k|m} \right] \Delta \widetilde{U_{h|mp}^{n+1}} + \\ &\sum_{p=1}^4 S_{mp} * \left[\left(F_{x|mp}^n + F_{y|mp}^n + F_{z|mp}^n \right) \varphi_{k|m} \right], k = \overline{0, st} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где знак $*$ означает операцию численного интегрирования.

Объемный интеграл, так может быть расписан следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \int_{T_m} \left(F_x^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
 & \int_{T_m} \left(F_x^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dx dy dz + \\
 & \int_{T_m} \left(\left(\frac{\partial F_x}{\partial U} \right)^n \Delta U_{h|m}^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U} \right)^n \Delta U_{h|m}^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial U} \right)^n \Delta U_{h|m}^{n+1} \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
 & \int_{T_m} \left(F_x^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + F_y^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + F_z^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dx dy dz + \\
 & \sum_{i=0}^{st} \left[\int_{T_m} \varphi_{i|m} \left(\left(\frac{\partial F_x}{\partial U} \right)^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U} \right)^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_z}{\partial U} \right)^n \frac{\partial \varphi_{k|m}}{\partial z} \right) dx dy dz \Delta U_{i|m}^{n+1} \right], k = \overline{0, st}
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Для решения линейной системы уравнений применяется один из методов решения СЛАУ библиотеки HYPRE [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection // Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics). – 1998. – Vol. 1697. – pp. 151–268.
2. Roe P. L. Approximate Rieman Solvers, Parameters Vectors and Difference Schemes // Journal of Computations Physics. – 1981. – Vol. 43. – pp. 357–378.
3. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. – Verlag: Springer, 1999. – 624 p.
4. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма для прямого численного моделирования сложных газодинамических течений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2008. – № 10. – С. 137–146.
5. Жалнин Р. В., Масыгин В. Ф., Сальников В. Д., Пескова Е. Е. Решение задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 28-31 октября 2014 г.) / под ред. И. В. Бойкова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. – С. 100–104.

6. Chow E., Cleary A. J., Falgout R. D. Design of the HYPRE Preconditioner Library // Proc. of the SIAM Workshop on Object Oriented Methods for Inter-operable Scientific and Engineering Computing (Workshop held at the IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, October 21-23, 1998). – SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

ВАСИЛЬКИН Н. В., МАМЕДОВА Т.Ф.
О ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННОГО РЯДА
С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Аннотация. В статье решается задача о прогнозировании временного ряда. Рассматривается пример энергопотребления. Для примера проводится анализ модели экстраполяции временных рядов по выборке максимального подобия с помощью применения нейронных сетей.

Ключевые слова: нейронная сеть, временной ряд, математическая модель.

VASILKIN N. V., MAMEDOVA T. F.
ON TIME SERIES PREDICTION WITH NEURAL NETWORKS

Abstract. The article solves the problem of time series forecasting. The case of energy consumption is considered. The article presents an analysis of the model of time series extrapolation on a maximum similarity sampling by using of neural networks.

Keywords: neural networks, time series, mathematical model.

В настоящее время задача анализа временных является актуальной темой для большого количества практических исследователей. От выбора метода анализа временных данных существенно зависит скорость расчётов и точность полученных прогнозов. На текущий момент разработано множество моделей прогнозирования временных рядов [1- 9]. С целью повышения точности результатов прогнозирования и увеличение скорости обработки данных временного ряда, наиболее перспективным является создание комбинированных моделей, в которых первоначально выполняется кластеризация, а затем производится прогнозирование временного ряда для нужного кластера.

Рассмотрим временной ряд вида: $Z(t) = Z(1), Z(2), \dots, Z(t)$.

Предположим, что последовательность значений, $Z_t^M = Z(t), Z(t+1), \dots, Z(t+M+1)$, представляет собой выборку длины M с момента начала отсчета t ; $M \in \{1, 2, \dots, T\}$, $t \in \{1, 2, \dots, T-M+1\}$. Тогда выборкой будет является фрагмент временного ряда, имеющий точку начала отсчета и длину. Обозначим через временную задержку k $Z_t^M = Z(t), \dots, Z(t+M-1)$ и $Z_{t-k}^M = Z(t-k), \dots, Z(t-k+M-1)$, где $k \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ - две выборки одинаковой длины, принадлежащие одному временному ряду.

Тогда справедлива формула

$$Z_t^M = \alpha_1 Z_{t-k}^M + \alpha_0 I^M + E^M. \quad (1)$$

или

$$\hat{Z}_t^M = \alpha_1 Z_{t-k}^M + \alpha_0 I^M. \quad (2)$$

где α_1 и α_0 – некоторые коэффициенты.

Для зависимости (1) функция ошибки аппроксимации S_k^M для выборок Z_t^M и Z_{t-k}^M с задержкой k будет иметь вид

$$S_k^M(\alpha_1, \alpha_0) = \sum_{t=0}^{M-1} (Z(t+i) - \alpha_1 Z(t-k+i) - \alpha_0)^2. \quad (3)$$

Необходимо подобрать такие значения α_1 и α_0 , чтобы при подстановке в (3) было получено минимально возможное значение $S_k^M(\alpha_1, \alpha_0)$. Решение находится методом наименьших квадратов.

Рассмотрим временной ряд $Z(t)$ и некоторую выборку Z_t^M , принадлежащую данному временному ряду. Определим все значения $S_k^M(\alpha_1, \alpha_0)$ для $k \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, $M = \text{const}$. Затем найдем минимальное

$$S_{k_{\min}}^M = \min(S_1^M, S_2^M, \dots, S_{t-1}^M). \quad (4)$$

Определим множество значений модуля линейной корреляции при $k \in \{1, 2, \dots, t-1\}$, $M = \text{const}$ по формуле:

$$\rho_k^M = \left| \rho(\hat{Z}_t^M, Z_t^M) \right| = \frac{\left| \sum_{t=1}^M (\hat{Z}(t+i) - \bar{Z})(Z(t+i) - \bar{Z}) \right|}{\sqrt{\sum_{t=1}^M (\hat{Z}(t+i) - \bar{Z})^2 \sum_{t=1}^M (Z(t+i) - \bar{Z})^2}} \in [0, 1] \quad (5)$$

Тогда справедливо:

$$\rho_{k_{\max}}^M = \max(\rho_1^M, \rho_2^M, \dots, \rho_{t-1}^M). \quad (6)$$

Очевидно, что задержка $k_{\min}$ из (4) и задержка $k_{\max}$ из (6) будут совпадать между собой, т.е. $k_{\min} = k_{\max}$. Полученную задержку, соответствующую минимуму ошибки регрессии $S_{k_{\min}}^M$ и максимуму модуля корреляции $\rho_{k_{\max}}^M$ обозначим $k_{\max}$. Назовем выборку $Z_{t-k_{\max}}^M$ выборкой максимального подобия. Выборка максимального подобия $Z_{t-k_{\max}}^M$ является

выборкой, которая при подстановке в уравнение (2) дает в результате значения выборки $\hat{Z}_t^M$, которая максимально точно описывает исходную выборку Z_t^M .

Чтобы определить значения прогнозной выборки $\hat{Z}_{T+1}^P$, учитывая влияние внешних факторов, представленных в виде временных рядов $X_1(t), \dots, X_S(t)$, был разработан алгоритм, аналогичный предыдущему случаю. Выразим прогнозируемую выборку исходного временного ряда Z_t^T , и выборки $X_{(1)T+1}^P, \dots, X_{(S)T+1}^P$ следующим образом

$$\hat{Z}_{T+1}^P = \alpha_{S+1} Z_T^P + \alpha_S X_{(S)T+1}^P + \dots + \alpha_1 X_{(1)T+1}^P + \alpha_0 I^P. \quad (7)$$

Алгоритм.

1. Определяется выборка максимального подобия для выборки новой истории.
- 2.. Вычисляется выборка Z_T^P .
3. Вычислим выборку $\hat{Z}_{T+1}^P$. Экстраполяция значения выборки $\hat{Z}_{T+1}^P$ определяем по формуле

$$\hat{Z}_{T+1}^P = \alpha_{S+1} Z_{k_{\max}^* + M}^P + \alpha_S X_{(S)T+1}^P + \dots + \alpha_1 X_{(1)T+1}^P + \alpha_0 I^P. = \text{EMMSPX}(M) \quad (8)$$

Средняя абсолютная ошибка дает точность аппроксимации и экстраполяции временных рядов

$$MAPE = \frac{1}{M} \sum_{i=t}^{t+M-1} \frac{|Z(i) - \hat{Z}(i)|}{Z(i)} 100\%. \quad (9)$$

На текущий момент явно определена проблема быстрого и точного нахождения коэффициентов линейной корреляции, близкого единице. Данную проблему можно решать, основываясь на комбинированной модели с помощью многослойной нейронной сети с алгоритмом обучения, основанным на принципе обратного распространения ошибки

Найдем коэффициенты линейной корреляции при помощи модели нейронной сети. Пусть каждый нейрон сети имеет нелинейную функцию активации:

$$y_i = \frac{1}{1 + \exp(-v_j)}, \quad (10)$$

где v_j – индуцированное локальное поле; y_i – выход нейрона.

Пусть сеть содержит несколько слоев скрытых нейронов, не являющихся частью входа или выхода сети, которые позволяют сети обучаться решению сложных задач.

Алгоритм обратного распространения ошибки заключается в следующем:

1. Сигнал ошибки выходного нейрона j на итерации n (соответствующей n -му примеру обучения) определяется выражением

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n). \quad (11)$$

2. Энергия среднеквадратичной ошибки вычисляется как нормализованная по N сумма всех значений энергии ошибки $E(n)$

$$E(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E(n). \quad (12)$$

3. Индуцированное локальное поле $v_j(n)$, равно

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^m w_{ij}(n) y_i(n), \quad (13)$$

где m -общее число входов.

4. Функциональный сигнал $y_j(n)$ на выходе нейрона j на итерации n :

$$y_j(n) = \varphi_j(v_j(n)). \quad (14)$$

Алгоритм обратного распространения состоит в применении к синаптическому весу $w_{ji}(n)$ коррекции $\Delta w_{ij}(n)$, пропорциональной частной производной $\partial E(n) / \partial w_{ij}(n)$.

Градиент можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = \frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)}. \quad (15)$$

Построив по описанному методу модель нейронной сети, появляется возможность быстрого нахождения выборки максимального подобия и нахождения значения линейной корреляции Пирсона.

**Прогнозные значения энергопотребления на территории населенного пункта
по состоянию на 24 апреля 2013 года**

№	Дата (24.03.2014), ч.	Значения ряда, МВт/ч.	Прогнозные значения ряда МВт/ч.	MAE (MAPE) МВт·ч., (%)
1	1:00	1,013	1,023	(0,94)
2	2:00	1,075	1,086	(1,03)
3	3:00	1,192	1,203	(0,98)
4	4:00	1,308	1,325	(1,32)
5	5:00	1,416	1,436	(1,45)
6	6:00	1,478	1,494	(1,14)
7	7:00	1,489	1,512	(1,57)
8	8:00	1,512	1,539	(1,83)
9	9:00	1,460	1,484	(1,67)
10	10:00	1,473	1,486	(0,95)
11	11:00	1,436	1,459	(1,66)
12	12:00	1,437	1,456	(1,37)
13	13:00	1,417	1,429	(0,91)
14	14:00	1,389	1,410	(1,55)
15	15:00	1,382	1,398	(1,22)
16	16:00	1,307	1,324	(1,34)
17	17:00	1,338	1,358	(1,56)
18	18:00	1,472	1,498	(1,77)
19	19:00	1,391	1,405	(1,05)
20	20:00	1,241	1,258	(1,43)
21	21:00	1,093	1,108	(1,45)
22	22:00	1,024	1,036	(1,22)
23	23:00	1,000	1,012	(1,27)
24	0:00	1,013	1,031	(1,83)

С помощью созданного СПО на основе заданной комбинированной модели получены результаты прогноза для временного ряда энергопотребления. Полученные результаты внесены в таблицу 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Draper N. Applied regression analysis. – New York: Wiley, In press, 1981. – 693 p.
2. Gheyas I. A. A Neural Network Approach to Time Series Forecasting // Proceedings of the World Congress on Engineering. – London, 2009. – pp. 1292–1296.
3. Mazengia D. H. Forecasting Spot Electricity Market Prices Using Time Series Models: Thesis for the Degree of Master of Science in Electric Power Engineering. – Gothenburg: Chalmers University of Technology, 2008. – 89 p.

4. Morariu N., Iancu E., Vlad S. A. A neural network model for time series forecasting // Romanian Journal of Economic Forecasting. – 2009. – No. 4. – pp. 213–223.
5. Norizan M. Short Term Load Forecasting Using Double Seasonal ARIMA Model // Regional Conference on Statistical Sciences. – Malaysia, Kelantan, 2010. – pp. 57–73.
6. Prajakta S. K. Time series Forecasting using Holt-Winters Exponential Smoothing // Kanwal Rekhi School of Information Technology Journal. – Boston, 2004. – pp. 1–13.
7. Бокс Дж., Дженкинс Г. М. Анализ временных рядов, прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
8. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. – М.: Вильямс, 2006. – 1104 с.
9. Чучуева И. А. Модель прогнозирования временных рядов по выборке максимального подобия: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Москва, 2012. – 16 с.

МАКЕЕВ С. Ю., КЯШКИН В. М., НИЩЕВ К. Н., НОВОПОЛЬЦЕВ М. И.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

ПРИ СПЕКАНИИ СЕРЕБРОСОДЕРЖАЩИХ ПАСТ¹

Аннотация. Исследованы изменения средних размеров областей когерентного рассеяния (ОКР), величины микродеформаций и удельной электропроводности слоев серебрясодержащих паст двух марок, спеченных при давлении 10 кПа и температуре 250°C (0,42 T_{пл}). Показано, что электропроводность спеченных слоев возрастает с увеличением размеров ОКР. В качестве возможных причин данных изменений называются уменьшение концентрации дефектов и увеличение площади межчастичных контактных площадок, происходящие при возврате и первичной рекристаллизации.

Ключевые слова: серебрясодержащая паста, размеры ОКР, микродеформация, удельная электропроводность, дефект структуры, перколяционные эффекты.

MAKEEV S. YU., KYASHKIN V. M., NISHCHEV K. N., NOVOPOLTSEV M. I.

A STUDY OF STRUCTURAL CHANGES

OF SILVER-CONTAINING PASTE DURING SINTERING

Abstract. The authors study the changes of the mean size of coherent scattering regions (CSR) and the values of microdeformations conductivity layers of silver pastes of two brands sintered at the pressure of 10 psi and the temperature of 250°C (0.42 T_m). It is demonstrated that the electrical conductivity of the sintered layers increases with the size CSR. The possible reasons for these changes are the decrease in concentration of defects and the increase of interparticle contact areas, occurring at return and primary recrystallization.

Keywords: silver-containing paste, CSR size, microdeformation, conductivity, structural defect, percolation effects.

При изготовлении силовых полупроводниковых приборов большое значение имеет качество соединения полупроводникового элемента с термокомпенсатором, которое должно обеспечивать надежный электрический и тепловой контакт указанных элементов конструкции прибора, иметь достаточно большие значения собственной электропроводности

¹ Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н.П. Огарева» при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по договору № 02. G25.31.0051 в рамках реализации Постановления Правительства РФ от 09.04.2010 г. № 218 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства».

и теплопроводности и, в то же время сохранять указанные свойства в условиях переменных термических и механических нагрузок. Одна из перспективных технологий соединения элементов СПП основана на применении в качестве материала соединительного элемента специальных серебрясодержащих паст. Обычно в состав таких паст входят органическое связующее и металлический мелкодисперсный наполнитель (частицы серебра). Технология соединения при этом предполагает обеспечение прижимного давления до 20 МПа при температуре до 300°C, обеспечивающей спекание частиц наполнителя. Таким образом, процесс соединения элементов СПП является относительно низкотемпературным, что снижает вероятность возникновения напряжений концентрационного и термического происхождения в полупроводнике. В то же время, в зависимости от марки используемого наполнителя оптимальные значения давления и температуры спекания могут изменяться. Поскольку электропроводность является структурно-чувствительным свойством материалов, возникает необходимость исследования изменений структуры в процессе спекания.

В настоящей работе методом рентгеноструктурного анализа проведено сравнительное исследование структурных изменений в образцах спеченных слоев серебрясодержащих паст №43 и №16 производства компании Hereus, полученных при одинаковых условиях спекания (давление – 10 кПа, температура – 250°C). Рентгеноструктурные исследования проводились с использованием рентгеновского дифрактометра Empyrean PANalytical в излучении медного анода с никелевым фильтром. Обработка данных производилась с использованием прикладной программы HighScore Plus, входящей в состав программного обеспечения прибора, и базы дифракционных данных PDF-2.

Качественный фазовый анализ показал соответствие структур паст и образца серебра из базы данных. Процедура полнопрофильного анализа позволила определить удовлетворительное соответствие полученных значений параметра ГЦК – ячейки (а), определенных для серебра, входящего в состав пасты и эталона (0.40852 ± 0.00002 и 0.40862 нм, соответственно). Значения параметра ячейки исходных порошков серебра, входящих в состав указанных паст, были равны $0,4085$ нм, т.е. идентичными параметру ячейки для пасты.

На рис.1 приведено изображение дифракционной линии 111 рентгенограмм порошка серебра, полученного путем удаления связующего из серебрясодержащей пасты № 43 (а), и изображения той же линии для слоев, полученных спеканием паст марки № 43 (б) и марки № 16 (в). Из рисунка отчетливо видно, что ширина линии 111 уменьшается в последовательности «порошок – паста 43 – паста 16».

По уширению дифракционных линий по стандартным методикам были определены средние размеры областей когерентного рассеяния (D) и значения микродеформаций (ϵ) (табл.1).

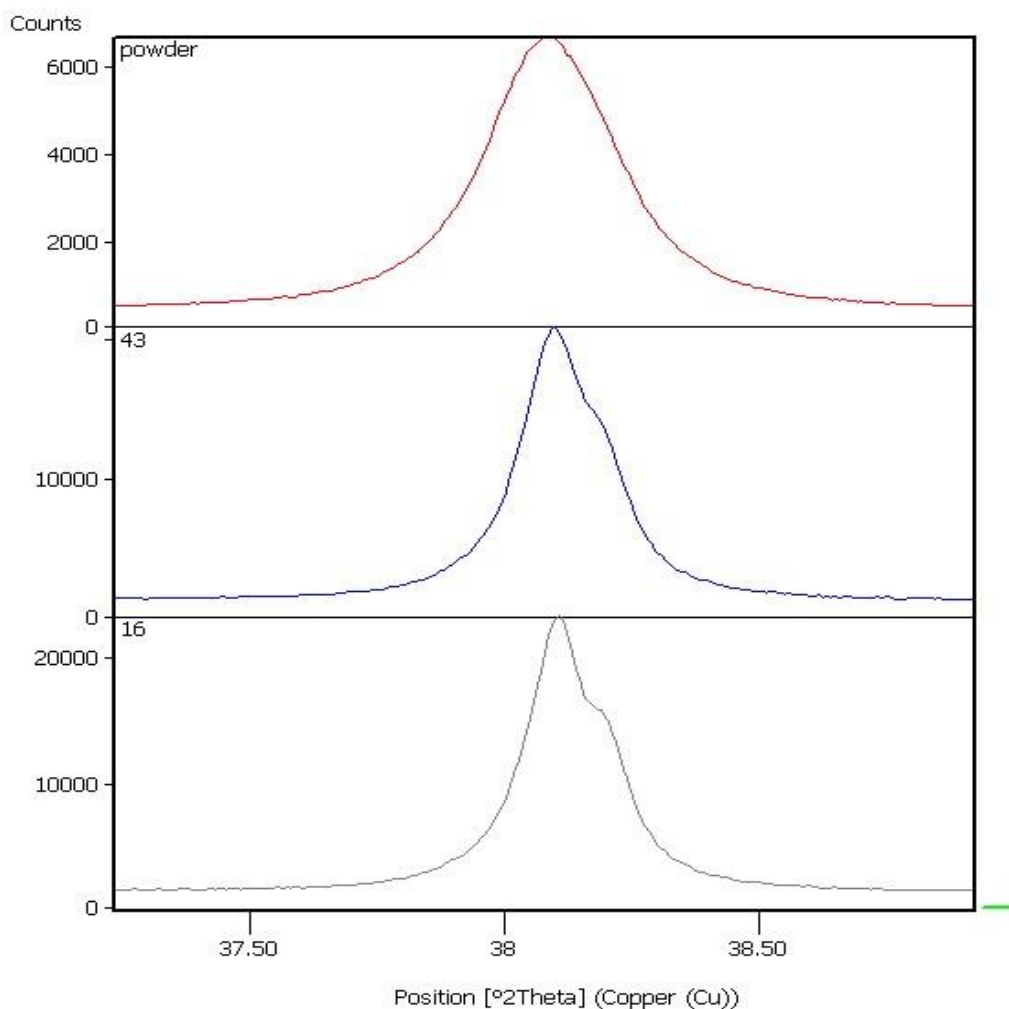


Рис. 1. Дифракционные линии 111 рентгенограмм исходного порошка серебра и спеченных паст.

Таблица 1

Наполнитель пасты (порошок Ag)		Паста № 43		Паста № 16	
D, нм	ϵ , %	D, нм	ϵ , %	D, нм	ϵ , %
32,0±3,1	0,3±0,01	57,5±3,1	0,06±0,01	75,7±3,1	0,06±0,01

Оценки погрешности определения измеряемых величин были сделаны на основе 8 измерений одного из образцов с его переустановкой и, таким образом включали в себя инструментальные погрешности прибора, погрешности, обусловленные изменением положения образца, и погрешности обработки рентгенограмм.

Из полученных результатов следует, что при спекании серебрясодержащих паст наблюдаются увеличение размеров ОКР и уменьшение относительной деформации кристаллической решетки серебра по сравнению со значениями этих параметров в исходных порошках. Причем, если величина остаточных микродеформаций в пастах разных марок уменьшается до одинакового значения, то размеры ОКР увеличиваются в разной степени.

Следует отметить, что при анализе профилей дифракционных линий не было обнаружено признаков, характерных для наличия деформационных (111) и двойниковых дефектов упаковки и кристаллографически ориентированных искажений решетки, приводящих к закономерным смещениям и изменению асимметрии дифракционных линий. Следовательно, наблюдаемые изменения структуры обусловлены перераспределением дефектов структуры типа вакансий, примесных атомов и дислокаций.

Учитывая, что температура плавления серебра составляет $961,8^{\circ}\text{C}$, увеличение размеров ОКР могут быть обусловлены явлениями отдыха и рекристаллизации [1]. Процессы отдыха требуют малой энергии активации, начинаются при температурах порядка $0,01\text{ Тпл}$ (в нашем случае $0,42\text{ Тпл}$) и связаны с уменьшением концентрации точечных дефектов, обусловленным в частности аннигиляцией на дислокациях и аннигиляцией дислокационных диполей. При этом существенного изменения размеров зерен, как областей, разделенных большеугловыми границами, не происходит, но может формироваться ячеистая структура с малоугловыми границами (разориентация до $1\text{--}2^{\circ}\text{C}$). Следующие стадии совершенствования структуры – полигонизация (увеличение разориентации субзерен) и рекристаллизация (зарождение и рост зерен) связаны, соответственно, с переползанием дислокаций и образованием большеугловых границ.

Уменьшение ширины рентгеновских дифракционных линий при низкотемпературном отжиге нанокристаллического кобальта наблюдали авторы [2]. Авторы указывают, что средний размер зерен в диапазоне температур $0\text{--}290^{\circ}\text{C}$ изменялся незначительно, хотя из приведенного ими же графика зависимости ширины дифракционной линии (002) от температуры следует, что ширина в этом температурном диапазоне изменяется примерно в 2 раза. При 290°C скорость процесса резко увеличивалась, что авторы связывают с началом рекристаллизации и подтверждают результатами просвечивающей электронной микроскопии. Аномальный рост зерен при низкотемпературной ($0\text{--}100^{\circ}\text{C}$) рекристаллизации сильнодеформированных никеля и меди наблюдали авторы [3; 4].

Уменьшение искажений структуры, обусловленных ее дефектами должно влиять в частности на такую характеристику, как электропроводность. Причем изменение величины зерен влияет на электропроводность, но не резко. Увеличение размеров зерен технического железа от 50 до 150 мкм увеличивает электропроводность только на 1% [1]. А в меди, алюминии и серебре после низкотемпературной деформации и отжига при 20°C деформационный прирост сопротивления уменьшается в 3 раза. Диапазон энергий активации составляет 0,2–0,4 эВ. Процесс связан с уменьшением концентрации точечных дефектов, обусловленным, в частности, аннигиляцией на дислокациях и аннигиляцией дислокационных диполей. Следовательно, определяющим является влияние субструктуры зерен и концентрации дефектов в них. Проведенные нами съемки образцов с использованием двухкоординатного детектора и сканирования поверхности образца показали отсутствие отдельных рефлексов на большеугловых дифракционных линиях (рис.2., К-дублет 224).



Рис 2. Фрагмент дифракционного кольца 224 (дублет $K_{a1} a_2$), полученного от образца спеченного слоя СП 16.

Следовательно, крупные зерна с совершенной структурой в образцах спеченной пасты не были сформированы.

Результаты измерения удельной электропроводности спеченных слоев, выполненных четырехзондовым методом на сериях серебрясодержащих паст № 43 и № 16, приведены в таблице 2.

Таблица 2

	Паста № 43	Паста № 16	Литое серебро
$\sigma, 10^6 \text{ См/м}$	$22,4 \pm 0,8$	$37,8 \pm 1,4$	62,5

Из сравнения полученных результатов видно, что электропроводность спеченных слоев паст возрастает с увеличением размеров ОКР.

Причиной этих изменений размеров ОКР, могли быть явления возврата и первичной рекристаллизации. В то же время, различие значений удельной электропроводности паст

после спекания может быть обусловлено не только различием концентрации дефектов в них, но и перколяционными эффектами, обусловленными объемной конфигурацией и площадью межчастичных контактных площадок, т.е. качеством спекания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелик С. С. Рекристаллизация металлов и сплавов. – М.: Металлургия, 1978. – 508 с.
2. Альмухаметов Р. Ф., Габдрахманова Л. А., Шарипов И. З. и др. Исследование релаксационных процессов в нанокристаллическом кобальте, полученном методом интенсивной пластической деформации // ФТТ. – 2014. – Т. 56. – Вып. 2. – С. 224–229.
3. Смирнова Н. А., Левит В. И., Пилюгин В. П. и др. Особенности низкотемпературной рекристаллизации никеля и меди // ФММ. – 1986. – Т. 62. – № 3. – С. 562–570.
4. Конькова Т. Н., Миронов С. Ю., Корзников А. В. Аномальный рост зерен в криогенно-деформированной меди // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14. – № 3. – С. 29–37.

ГАЛКИН Д. В., ГОРБЕНКО О. Ю., ЛЕЩАНКИНА Т. М., ПОЗДЯЕВА Н. С.,
СИДОРЕНКОВА Т.О., ХАЛИКОВА К. К.

О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА ОРТОГОНАЛЬНОЙ
СТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ

Аннотация. В работе рассмотрена методика решения двумерного уравнения переноса на структурированной ортогональной сетке методом Галёркина с разрывными базисными функциями. Показано, что разработанная методика обладает порядком сходимости выше первого.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, структурированная сетка, РМГ, RKDG.

GALKIN D. V., GORBENKO O. YU., LESCHANKINA T. M.,
POZDYAEVA N. S., SIDORENKOVA T. O., KHALIKOVA K. K.

APPLYING DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SOLVING TWO-
DIMENSIONAL ADVECTION EQUATION ON ORTHOGONAL STRUCTURED GRIDS

Abstract. The paper considers RKDG method for solving the advection equation in two-dimensional space using the structured orthogonal grids. The authors demonstrate that the developed method has the convergence order higher than the first.

Keywords: discontinuous Galerkin method, structured grid, DG, RKDG.

Традиционно конечно элементные методы на основе метода Галёркина для решения гиперболических и параболических уравнений строятся на неструктурированных сетках [1; 2]. Но немаловажный интерес представляет использование структурированной ортогональной сетки, в частности, при решении задач на локально-адаптируемых сетках. Рассмотрим двумерное уравнение переноса:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

в области $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ с соответствующими начальными и периодическими граничными условиями.

Введем в области Ω структурированную прямоугольную сетку T_h , и в каждой ячейке T_i зададим базис $\{\varphi_k\}_{k=0}^P$ из пространства полиномов степени не выше K . Приближенное решение системы (1) в ячейке T_i будем искать в виде [1]:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^P u_k(t) \varphi_k(x). \quad (2)$$

Коэффициенты $u_k(t)$ в (2) найдем из условия ортогональности всем базисным функциям невязки, получаемой после подстановки (2) в (1):

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dx dy + \iint_{T_i} \operatorname{div} U_h \varphi_k dx dy = 0, k = 0, \dots, p. \quad (3)$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dx dy &= \iint_{T_i} \left(U_h \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + U_h \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{\partial T_i} (\bar{U}_h \varphi_k n_x + \bar{U}_h \varphi_k n_y) dl \\ k &= 0, \dots, p. \end{aligned}$$

Обозначив за M матрицу масс, составленную из значений скалярных произведений базисных функций, за $L(U_h)$ – правую часть, получим систему:

$$M \frac{\partial U_h}{\partial t} = L(U_h), \quad (4)$$

Выпишем расчетные формулы для ячейки T_i . Пусть $K = 1$, рассмотрим следующий базис:

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = (x - x_c), \varphi_2 = (y - y_c), \quad (5)$$

где (x_c, y_c) – координаты центра ячейки.

Тогда приближенное решение принимает вид:

$$U_h = u_0 + u_1(x - x_c) + u_2(y - y_c) \quad (6)$$

Подставляя (6) в формулы (3) - (4), получим следующие системы уравнений:

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \cdot 1 dx dy + \iint_{T_i} \operatorname{div} U_h \cdot 1 dx dy = 0 \quad (7.1)$$

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \cdot (x - x_c) dx dy + \iint_{T_i} \operatorname{div} U_h \cdot (x - x_c) dx dy = 0 \quad (7.2)$$

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \cdot (y - y_c) dx dy + \iint_{T_i} \operatorname{div} U_h \cdot (y - y_c) dx dy = 0 \quad (7.3)$$

Далее получим

$$\begin{aligned}
& \frac{du_0}{dt} \iint_{\tau_i} dx dy + \frac{du_1}{dt} \iint_{\tau_i} (x - x_c) \cdot 1 dx dy + \frac{du_2}{dt} \iint_{\tau_i} (y - y_c) \cdot 1 dx dy \\
& + \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h \cdot 1 \cdot n_x + \bar{U}_h \cdot 1 \cdot n_y) dl = 0 \\
\\
& \frac{du_0}{dt} \iint_{\tau_i} (x - x_c) dx dy + \frac{du_1}{dt} \iint_{\tau_i} (x - x_c)^2 dx dy + \frac{du_2}{dt} \iint_{\tau_i} (x - x_c)(y - y_c) dx dy \\
& + \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h (x - x_c) n_x + \bar{U}_h (x - x_c) n_y) dl - \iint_{\tau_i} U_h \frac{\partial (x - x_c)}{\partial x} dx dy = 0 \\
\\
& \frac{du_0}{dt} \iint_{\tau_i} (y - y_c) dx dy + \frac{du_1}{dt} \iint_{\tau_i} (x - x_c)(y - y_c) dx dy + \frac{du_2}{dt} \iint_{\tau_i} (y - y_c)^2 dx dy \\
& + \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h (y - y_c) n_x + \bar{U}_h (y - y_c) n_y) dl - \iint_{\tau_i} U_h \frac{\partial (y - y_c)}{\partial y} dx dy = 0
\end{aligned}$$

Тогда система (4) принимает вид:

$$M \frac{dU_h}{dt} = - \begin{pmatrix} \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h \cdot 1 \cdot n_x + \bar{U}_h \cdot 1 \cdot n_y) dl \\ \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h (x - x_c) n_x + \bar{U}_h (x - x_c) n_y) dl - \iint_{\tau_i} U_h \frac{\partial (x - x_c)}{\partial x} dx dy \\ \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h (y - y_c) n_x + \bar{U}_h (y - y_c) n_y) dl - \iint_{\tau_i} U_h \frac{\partial (y - y_c)}{\partial y} dx dy \end{pmatrix}$$

Дискретизация по времени осуществляется методом Эйлера, что приводит к явной схеме:

$$M \frac{U_h^{n_{\text{new}}} - U_h}{\Delta t} = - \begin{pmatrix} \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h \cdot 1 \cdot n_x + \bar{U}_h \cdot 1 \cdot n_y) dl \\ \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h (x - x_c) n_x + \bar{U}_h (x - x_c) n_y) dl - \iint_{\tau_i} U_h \frac{\partial (x - x_c)}{\partial x} dx dy \\ \oint_{\partial \tau_i} (\bar{U}_h (y - y_c) n_x + \bar{U}_h (y - y_c) n_y) dl - \iint_{\tau_i} U_h \frac{\partial (y - y_c)}{\partial y} dx dy \end{pmatrix} \quad (8)$$

Была выполнена серия расчетов для определения порядка сходимости. Решалось уравнение (1) с начальными условиями следующего вида:

$$U(x, y, 0) = \begin{cases} \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y), & (x, y) \in [0; 0,5] \times [0; 0,5], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

Решив систему (8) получим значение приближенного решения U_h . Зная точное решение U уравнения (1) найдем следующие нормы погрешности $r = U_h - U$:

$$\|r\|_1 = \iint_T |r| dx dy$$

$$\|r\|_2 = \left(\iint_T |r|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

Порядки сходимости исследуемого метода будем определять по правилу Рунге:

$$k_1 = \frac{\ln\left(\frac{\|U_h - U\|}{\|U_{h/2} - U\|}\right)}{\ln 2} \quad (10)$$

$$k_2 = \frac{\ln\left(\frac{\|U_h - U\|}{\|U_{h/2} - U\|}\right)}{\ln 2} \quad (11)$$

Таблица 1

Порядок сходимости

N	$\ r\ _1$	$\ r\ _2$	k_1	k_2
25	0,010233	0,029926	-	-
50	0,002775	0,009574	1,8826694842	1,6442057456
100	0,000762	0,003231	1,8646248686	1,5671410555
200	0,000223	0,001125	1,7727472876	1,5220557492

Представленные результаты показывают, что рассмотренная методика позволяет получать решения с порядком сходимости выше первого на структурированных прямоугольных сетках. Что позволяет сделать вывод о применимости разрывного метода Галеркина для решения задач на блочных структурированных локально-адаптируемых сетках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection // Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics). – 1998. – Vol. 1697. – pp. 151–268.
2. Масыгин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 59–65.

МАСЯГИН В. Ф., ПАНЮШКИНА Е. Н., ПЕСКОВА Е. Е.
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA

Аннотация. В работе описан численный алгоритм решения уравнений газовой динамики. Представлены этапы реализации алгоритма на языке CUDA C. Для численного эксперимента была выбрана задача Римана о распаде произвольного разрыва в двумерной постановке с начальными данными Сода. Приведенные численные результаты демонстрируют качество распараллеливания и возможности разработанной параллельной версии программы.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, параллельный алгоритм, технология CUDA.

MASYAGIN V. F., PANYUSHKINA E. N., PESKOVA E. E.
THE SOLUTION OF GAS DYNAMICS EQUATIONS
USING CUDA TECHNOLOGY

Abstract. The article presents a numerical algorithm for solving the equations of gas dynamics. The stages of implementation of the algorithm in the language of CUDA C are described. The two-dimensional Sod's Riemann problem was chosen for the numerical experiment. The results of the test problem solution demonstrate the parallelization quality and the capability of parallel version.

Keywords: gas dynamics equations, parallel algorithm, CUDA technology.

Введение.

Задачи вычислительной газовой динамики приобретают все большую важность и актуальность во многих областях современной науки и техники. Моделирование таких задач связано с требованием высокой точности результатов, которая при фиксированной расчетной области может наращиваться как путем измельчения используемых сеток, так и повышением точности численных алгоритмов. Оба пути ведут к увеличению расчетного времени. Решением проблем вычислительных ресурсов является использование и внедрение технологий параллельного программирования. В статье рассматривается численное решение двумерных уравнений газовой динамики с использованием технологии CUDA.

1. Математическая модель и дискретизация.

Система уравнений газовой динамики может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F^2(U)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}) \end{pmatrix}; F^1(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}) + pu \end{pmatrix}; F^2(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}) + pv \end{pmatrix}.$$

Система дополнена уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Здесь ρ, p, ε – плотность, давление и удельная внутренняя энергия соответственно, u, v – компоненты вектора скорости, γ – показатель адиабаты.

Алгоритм строим на неструктурированной треугольной сетке $\omega = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$, содержащей все внутренние и граничные точки расчетной области. На ω построим триангуляцию Делоне $\Delta(\omega) = \{\Delta_m = \Delta(P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m}), P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m} \in \omega, m = 1, 2, \dots, M\}$.

Схема для численного решения системы уравнений газовой динамики может быть представлена в виде:

$$\frac{d}{dt} U_i(t) + \frac{1}{|\Delta_i|} \int_{\partial\Delta_i} F \cdot n ds = 0. \quad (2)$$

Здесь $F = (F^{(1)}, F^{(2)})^T$, n – внешняя нормаль к ребру ячейки $\partial\Delta_i$. Интеграл $\int_{\partial\Delta_i} F \cdot n ds$ рассчитываем с помощью квадратурной формулы Гаусса [1]:

$$\int_{\partial\Delta_i} F \cdot n ds \approx \sum_{k=1}^3 |\partial\Delta_i| \sum_{j=1}^q \omega_j F(u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)) \cdot n_k, \quad (3)$$

где $F(u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)) \cdot n_k$ – дискретные потоки, которые рассчитываются по схеме распада разрыва [2], $u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)$ – «левые» и «правые» значения вектора U на границе ячейки.

Используем двухточечную квадратуру Гаусса $q=2$. Для ребра треугольника с координатами P_1 и P_2 , точки Гаусса определяем следующим образом [3]:

$$G_1 = cP_1 + (1-c)P_2, G_2 = cP_2 + (1-c)P_1, \text{ где } c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для нахождения газодинамических параметров в ячейке Δ_i на следующем шаге по времени используем формулу:

$$U_i^{n+1} = \Delta t \left(U_i^n - \frac{1}{S_{\Delta_i}} \sum_{k=1}^3 |\partial \Delta_i| \sum_{j=1}^2 \omega_j F(u^+(G_j^{(k)}, t), u^-(G_j^{(k)}, t)) \cdot n_k \right). \quad (4)$$

2. Реализация алгоритма на языке CUDA C.

Для проведения расчетов на GPU было сделано [4]:

- выделение памяти для данных и потоков на GPU;
- копирование данных на GPU;
- распределение ядер для вычисления;
- копирование полученных данных обратно в CPU;
- освобождение памяти GPU.

3. Исследовательские расчеты и оценка быстродействия.

Была проведена серия тестовых расчетов для задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Расчеты были выполнены в двумерной постановке для начальных данных Сода [5]:

$$(\rho_1, u_1, v_1, p_1) = (1, 0, 0, 1), (\rho_2, u_2, v_2, p_2) = (0.125, 0, 0, 0.1).$$

Здесь ρ_1, u_1, v_1, p_1 и ρ_2, u_2, v_2, p_2 – плотность, компоненты вектора скорости и давление в канале слева и справа соответственно.

Задача рассматривалась в области $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Разрыв располагался вдоль прямой $x = 0$. Расчет производился до времени $t = 0.2$ с шагом $\Delta t = 10^{-4}$.

На рисунках представлены значения плотности (рис. 1), скорости (рис. 2) и давления (рис. 3), которые хорошо согласуются с полученными ранее решениями этой задачи [6].

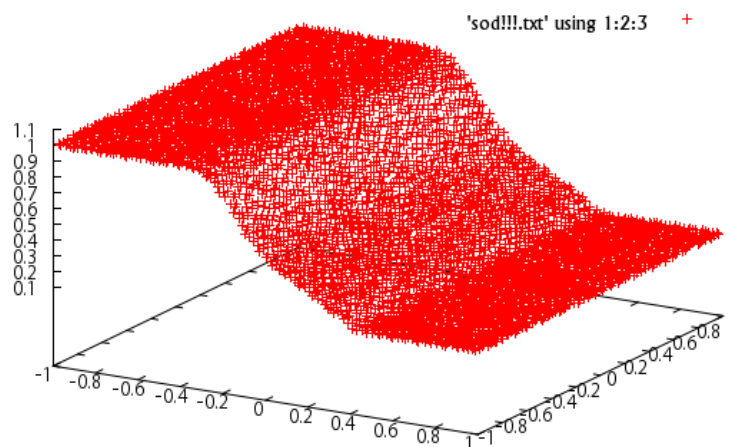


Рис 1. Плотность.

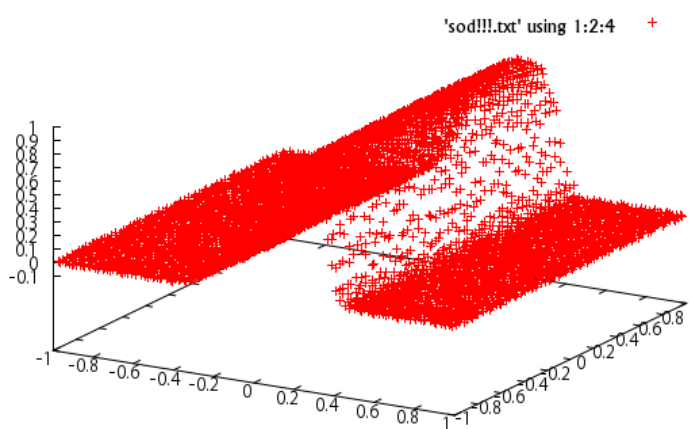


Рис. 2. Скорость.

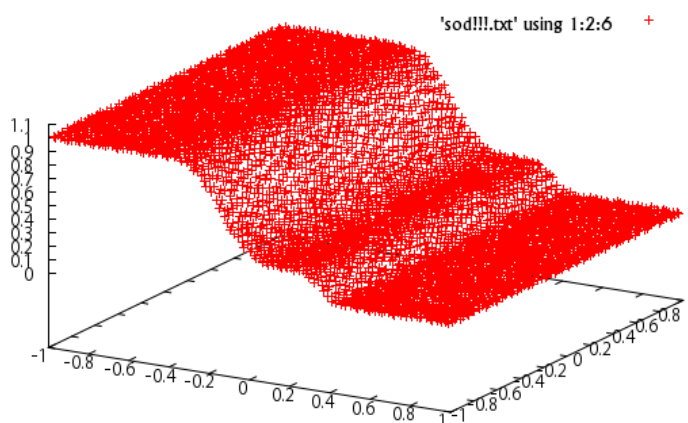


Рис. 3. Давление.

Была проведена серия расчетов на последовательности сгущающихся сеток. В таблице 1 представлено время работы последовательной и параллельной программ и ускорение, получаемое за счет использования GPU. Как видно из расчетов, с ростом количества ячеек расчетной области становится более выгодно использовать GPU.

Таблица 1

Количество ячеек	CPU (Intel Core i7-4500U 1.80GHz), с.	GPU (NVidia GeForce GT740M), с.	Ускорение, раз
4291	22.8	5.0	4.56
8582	45.0	7.7	5.84
17031	89.1	12.7	7.02
33948	179.5	22.6	7.94

Заключение

В работе построен параллельный алгоритм численного решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках с использованием технологии CUDA. С помощью разработанных программ были проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток.

Как видно из результатов расчетов, с ростом количества ячеек в расчетной области становится более выгодно использовать параллельную версию программы на основе технологии CUDA.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li B. Q. Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer. – Berlin: Springer, 2006. – 578 p.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
3. Hu C., Shu C.-W. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes on Triangular Meshes // Journal of Computational Physics. – 1999. – Vol. 150, № 1. – pp. 97–127.
4. Сандерс Дж., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 232 с.
5. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 1978. – Vol. 27. – pp. 1–31.
6. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – № 10. – С. 61–66.

ГОРБУНОВ Д.С., НИЩЕВ К.Н., НОВОПОЛЬЦЕВ М.И., МИШКИН В.П.
ПРИМЕНЕНИЕ РЭМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ И АДГЕЗИОННЫХ
СВОЙСТВ СПЕЧЕННЫХ СЛОЕВ СЕРЕБРОСОДЕРЖАЩИХ ПАСТ¹

Аннотация. В статье представлены результаты исследования микроструктуры и адгезионных свойств спеченных слоев серебрясодержащих паст (СП), применяемых в технологиях производства силовых полупроводниковых приборов для низкотемпературного соединения электрически активной кремниевой структуры (КС), содержащей *p-n*-переходы, с молибденовым термокомпенсатором (МТ). Микроструктура границ между спеченным слоем СП и металлизированными поверхностями КС и МТ, а также границы между спеченным слоем СП и поверхностью механически отслаиваемой тестовой полосы исследовалась путем анализа РЭМ-изображений, полученных с помощью РЭМ Quanta 200i 3D FEI.

Ключевые слова: силовые полупроводниковые приборы, серебрясодержащая паста, спекание, растровая электронная микроскопия, адгезия, *L*-отслаивание.

GORBUNOV D. S., NISHCHEV K. N., NOVOPOLTSEV M. I., MISHKIN V. P.,
THE USE OF SEM TO STUDY THE STRUCTURE AND ADHESIVE PROPERTIES
OF SILVER-CONTAINING PASTE SINTERED LAYERS

Abstract. The article presents the results of a study of the microstructure and adhesive properties of silver paste sintered layers (SP) used in power semiconductor devices for low-temperature electrically active silicon structure (CS) containing *pn*-junctions with molybdenum temperature compensator (MT). The microstructure of the boundaries between the sintered layer and the metallized surfaces of the COP and the MT as well as the border between the sintered layer and the surface of mechanically peel test strip was investigated by analyzing the SEM images obtained by SEM Quanta 200i 3D FEI.

Keywords: power semiconductor devices, silver-containing paste, sintering, scanning electron microscopy, adhesion, *L*-peel.

Разработка новых технологий, обеспечивающих повышение надежности силовых полупроводниковых приборов (СПП), является актуальной задачей силовой электроники.

¹ Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н.П. Огарева» при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по договору № 02.G25.31.0051 в рамках реализации Постановления Правительства РФ от 9.04.2010 г. № 218 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства».

Надежность СПП, работающих в условиях циклических нагрузок, в значительной степени определяется технологией межэлементных соединений в приборах. Эффективной технологией получения межэлементных соединений в СПП является низкотемпературное спекание серебросодержащих паст (Low-Temperature Joint Technique – *LTJT*) [1–4]. Процесс *LTJT* представляет собой технологический способ соединения кремниевой структуры (КС), содержащей *p-n*-переходы, с молибденовым термокомпенсатором (МТ). Процесс осуществляется посредством спекания (sintering) специальных серебросодержащих паст (СП) при воздействии температуры и давления. Получаемая в результате спекания структура КНМ (кремний на молибдене) является основным активным элементом, определяющим выходные электрические и тепловые параметры СПП. Термокомпенсатор служит для передачи тепловых потерь от кремниевой структуры к охладителю. Коэффициент теплового расширения материала, из которого он изготовлен, должен быть близким к соответствующему коэффициенту кремния во всем диапазоне рабочих температур.

Надежность силовых полупроводниковых приборов на основе структур КНМ в значительной степени зависит от сплошности границ раздела спеченного слоя СП и слоев металлизации КС и МТ. В связи с этим в данной работе были проведены исследования микроструктуры поверхности поперечных шлифов структур КНМ. С целью отработки методики РЭМ изображения поверхностей шлифов были получены с использованием стандартного детектора вторичных электронов (ETD) (рис.1а) и детектора обратно отраженных электронов (BSED) (рис.1б).

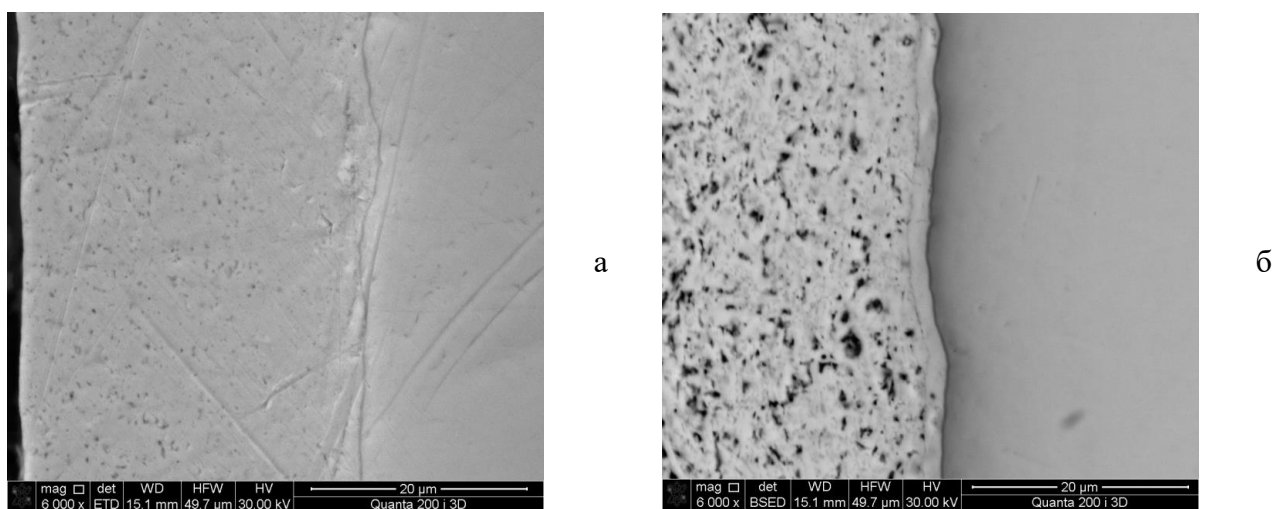


Рис. 1. РЭМ-изображения границы раздела между спеченным слоем серебросодержащей пасты и металлическими слоями структуры КНМ: (а) – детектор вторичных электронов (ETD); (б) – детектор обратно отраженных электронов (BSED). Ускоряющее напряжение $U_{\text{уск}} = 30$ кВ, увеличение – 6000.

Из сравнения полученных изображений следует, что для исследования сплошности границ раздела в структурах КНМ, наиболее оптимальным является режим регистрации обратно отраженных электронов с использованием детектора BSED, чувствительному к Z-номеру исследуемых материалов (Z-контраст). В отличие от детектора BSED детектор вторичных электронов (ETD) позволяет хорошо выявить топографические особенности исследуемой поверхности. С помощью BSED-детектора отчетливо выявляются границы всех металлических слоев, составляющие данную структуру (рис. 2).

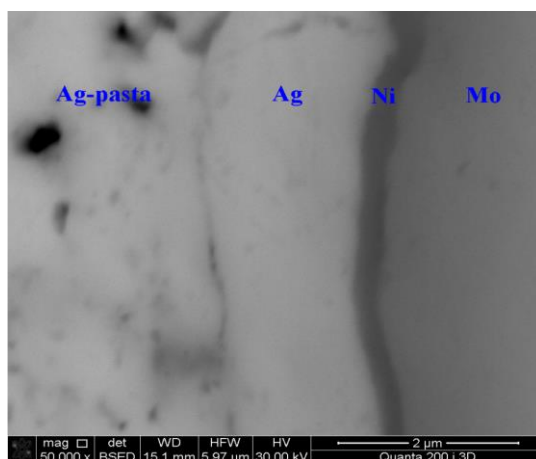


Рис. 2. РЭМ-изображение металлических слоев в структуре КНМ, полученное с помощью детектора BSED.

Ускоряющее напряжение $U_{\text{уск}} = 30$ кВ, увеличение – 50000.

В результате анализа РЭМ-изображений границы между слоем никеля и молибдена выявлено, что на всей длине границы отсутствуют какие-либо значительные дефекты (рис.3), слой никеля хорошо ложится на поверхность молибдена, повторяя ее морфологию данной поверхности (рис.3а).

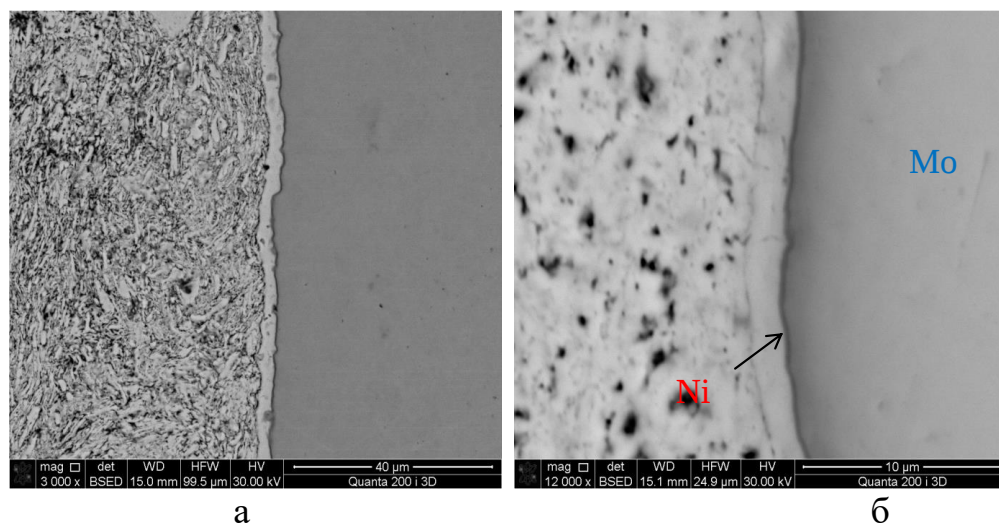


Рис. 3. РЭМ-изображения границы раздела «никель – молибден». Увеличение (а) – 3000; (б) – 12000.

При исследовании структур КНМ как на торцах, так и на изломах [9] визуализируется пористая структура спеченного слоя серебрясодержащей пасты (рис. 4).

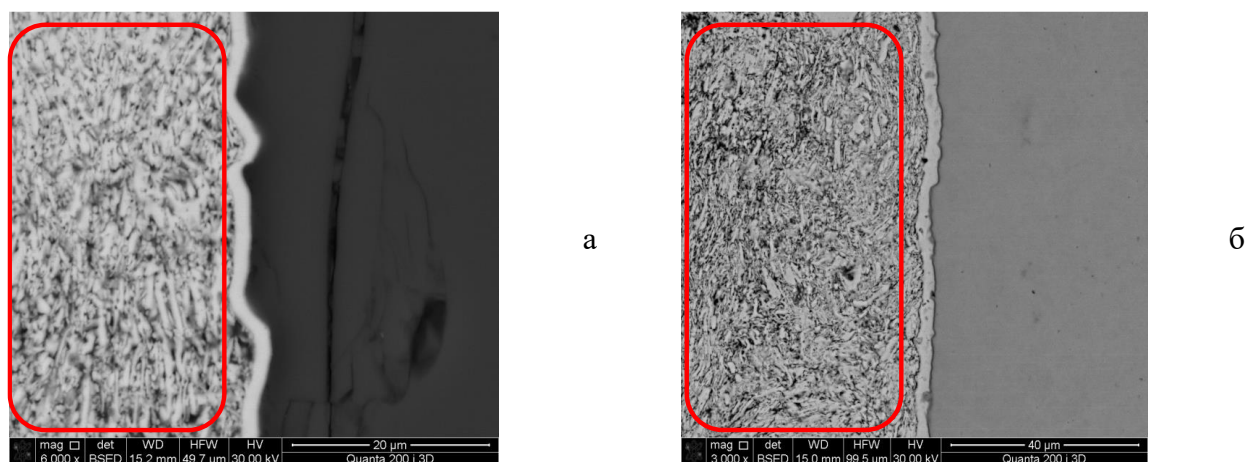


Рис. 4. Пористая структура спеченного слоя серебрясодержащей пасты, выявленная на торце: (а) – со стороны Si; (б) – со стороны Mo.

Механическая прочность структур КНМ в значительной степени определяется адгезионными свойствами спеченного слоя СП. Для повышения адгезии соединяемые путем низкотемпературного спекания поверхности КС и МТ металлизировались [5; 6].

Адгезионные характеристики спеченных слоев СП существенно зависят от технологических условий процесса спекания. Для измерения адгезионной прочности применяют методы, при которых отделение пленки от подложки производят при воздействии статической или динамической нагрузки. В зависимости от способа нарушения адгезионных связей различают равномерный отрыв, неравномерный отрыв и сдвиг. В случае неравномерного отрыва (отслаивания) нагрузка прилагается лишь к части образца и нарушение контакта между пленкой и подложкой распространяется последовательно по его поверхности. В этом случае адгезионная прочность определяется отношением силы отрыва к ширине отслаиваемой пленки и связана с работой изотермического отрыва единицы площади пленки. Методы отслаивания в большинстве случаев дают более реальную оценку адгезии, чем методы равномерного отрыва. В зарубежной литературе отслаивание пленки от жесткой подложки под прямым углом к ней называют методом *L*-отслаивания [5; 7], а расслаивание двух тонких соединенных между собой пленок – методом *T*-отслаивания [8].

В данной работе исследовались микроструктурные особенности поверхностей МТ и ТП после *L*-отслаивания спеченного слоя СП структуры КНМ при различных режимах спекания. Отслаивание спеченного слоя проводили на испытательной машине SHIMADZU AG 100 KNX. В испытаниях на металлизированную поверхность МТ через сетчатый

трафарет наносился слой СП, на который помещалась гибкая посеребренная медная тестовая полоса толщиной 100 мкм и шириной 5 мм, затем полученная конструкция подвергалась горячему прессованию. РЭМ-изображения области отрыва тестовой полосы были получены на РЭМ Quanta 200 I 3D в высоком вакууме при ускоряющем напряжении 30 кВ.

На рисунке 5 представлено РЭМ-изображение поверхности высушенного слоя СП нанесенной на поверхность МТ через сетчатый трафарет. На данном изображении четко выявляется периодический рельеф характеристики которого соответствуют геометрическим параметрам трафарета.

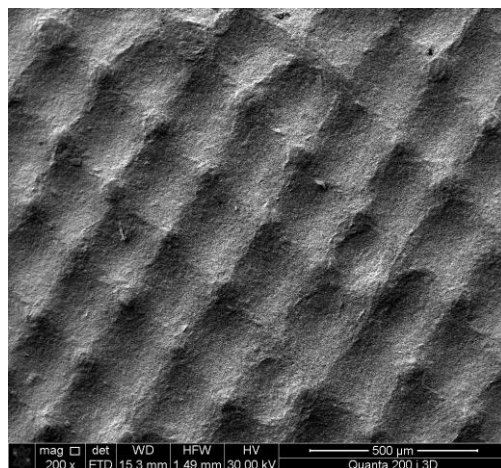


Рис. 5. РЭМ-изображение поверхности слоя СП, высушенного перед спеканием.

После процедуры L-отслаивания на большей части поверхности МТ спеченный слой СП отсутствовал (рис.6), что указывает на более высокую адгезию слоя с посеребренной поверхностью тестовой полосы по сравнению с адгезией с металлическим покрытием МТ.

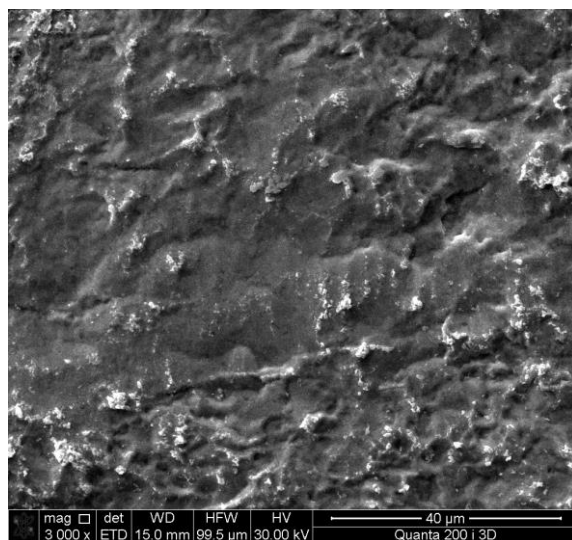


Рис. 6. РЭМ-изображение фрагмента поверхности МТ после испытания путем L-отслаивания. Увеличение – 3000.

На рисунке 7 приведены изображения поверхности молибденового компенсатора (МТ) (рис.7а) и сопряженной поверхности тестовой полосы (ТП), используемой в испытаниях на отслаивание (рис.7б). На данных изображениях выявлены элементы периодической структуры, расположение которых соответствует профилю поверхности слоя СП до спекания. Вместе с тем на поверхности МТ после L-отслаивания были выявлены отдельные остаточные фрагменты спеченного слоя СП размерами менее 100 мкм (рис.7–9).

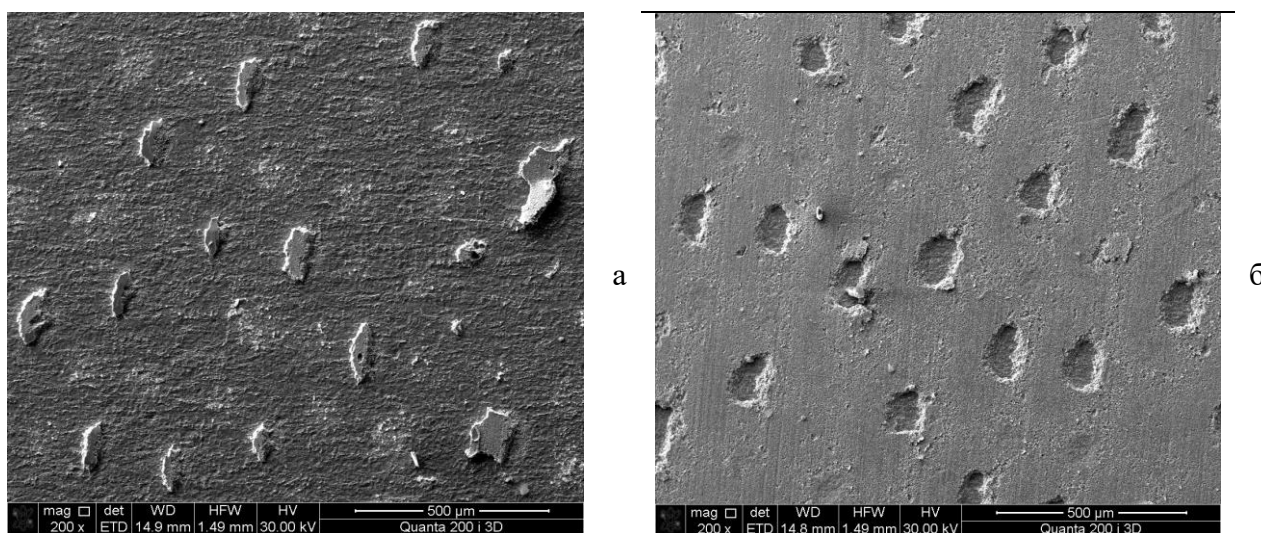


Рис. 7. РЭМ-изображения участка поверхности МТ (а) и сопряженного участка поверхности ТП (б) после испытания путем L-отслаивания.

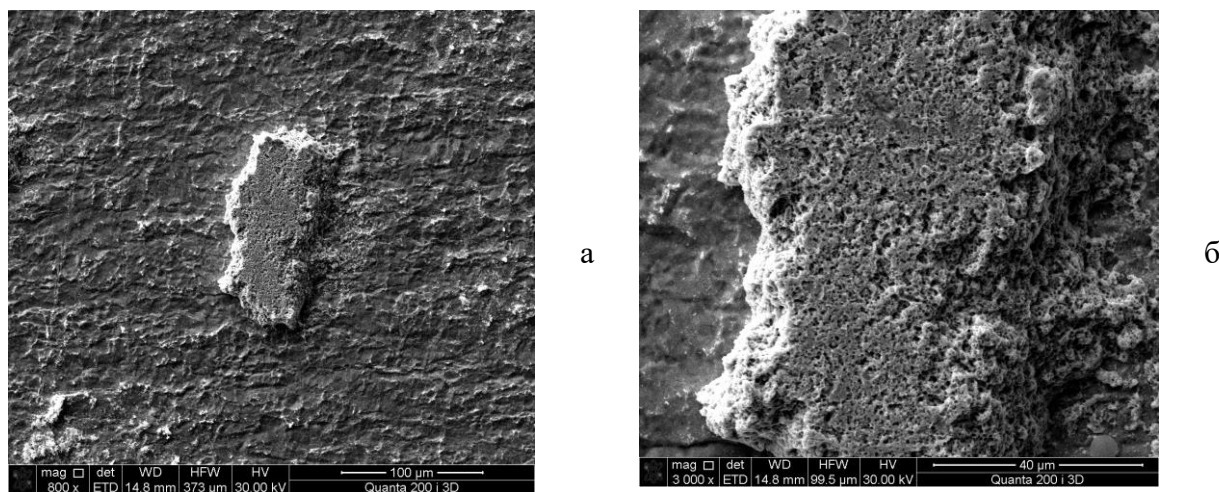


Рис. 8. РЭМ-изображение поверхности МТ после отслаивания: (а) – увеличение 800; (б) – увеличение 3000.

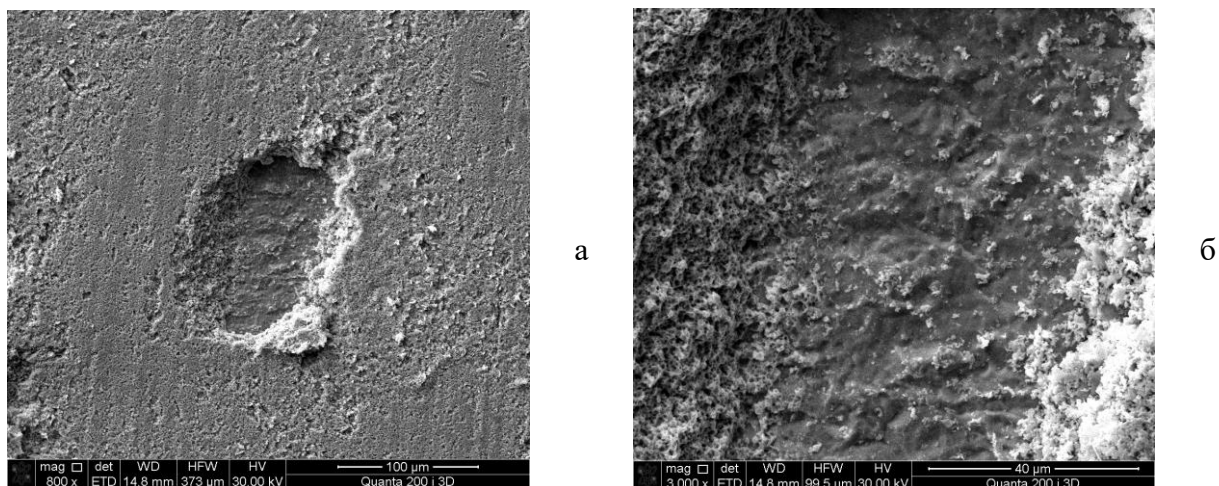


Рис. 9. РЭМ-изображение поверхности ТП после отслаивания: (а) – увеличение 800; (б) – увеличение 3000.

Происхождение данных фрагментов может быть обусловлено формой поверхности СП перед спеканием. При горячем прессовании образцов локальное давление внутри возвышающихся участков поверхности СП превышает локальное давление внутри впадин. Вследствие этого на возвышающихся участках адгезия СС СП с МТ превышает адгезию с ТП и на поверхности МТ при отслаивании остаются фрагменты СС. В результате низкого локального давления во впадинах поверхности СП адгезия СС СП с МТ оказывается ниже, чем с ТП и СС СП после отслаивания остается на поверхности ТП. В результате проведенных экспериментов установлено, что для достижения высокой адгезии СС СП с покрытием МТ при спекании структур КНМ необходимо использовать при спекании наиболее высокие значения давления и температуры в заданных интервалах изменения этих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fellenger J., Baumgartner W. Patentschrift DE 3414065 C2. – Deutsches Patentamt, 1989.
2. Schwarzbauer H. Europäische Patentschrift EP 0 242 626 B1. – Europäisches Patentamt, 1991.
3. Schwarzbauer H., Kuhnert R. Novel Large Area Joining Technique for Improved Power Device Performance // IEEE Trans. Ind. Appl. – 1991. – Vol. 27. – No. 1. – P. 93.
4. Scheuermann U., Wiedl P. Low Temperature Joining Technology – a High Reliability Alternative to Solder Contacts // Workshop on Metal Ceramic Composites for Functional Applications. – Wien, 1997. – pp.181–192.
5. Mertens C. Die Niedertemperatur-Verbindungstechnik der Leistungselektronik // Fortschrittberichte: VDI-Verlag, Düsseldorf, 2004. – 141 s.

6. Нищев К. Н. Исследования свойств многослойной металлизации структур «кремний на молибдене», полученной методом магнетронного распыления // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3. – С. 248–260.
7. DIN 53287-2006 Testing of adhesives for metals and adhesively bonded metal joints - Determination of the resistance to liquids.
8. DIN 53282-1979 Testing of adhesives for metals and adhesively bonded metal joints; T-peel test.
9. Нищев К. Н. Исследование низкотемпературного спекания серебрясодержащих паст методом растровой электронной микроскопии // Прикладная физика – 2015. – № 3. – С. 10–14.