



eISSN 2311-2468
Том 2, № 19. 2014
Vol. 2, no. 19. 2014

электронное периодическое издание
для студентов и аспирантов

Огарёв-онлайн Ogarev-online

<https://journal.mrsu.ru>



МАМЕДОВА Т. Ф., ПАНЯГИНА И. А., КУДАШКИНА Е. А.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Аннотация. В статье решается задача оптимального управления для математической модели экономического роста долгосрочного прогнозирования. На ее основе строится система дифференциальных уравнений, описывающих траектории сбалансированного роста.

Ключевые слова: экономический рост, оптимизационная задача, сбалансированный рост, человеческий капитал, физический капитал.

MAMEDOVA T. F., PANYAGINA I. A., KUDASHKINA E. A.

THE PROBLEM OF OPTIMALITY IN MATHEMATICAL MODEL OF
ECONOMIC GROWTH LONG-TERM FORECASTING

Abstract. The authors solve the problem of optimum control for mathematical model of economic growth of long-term forecasting. Considering the problem solution, the article presents a system of differential equations describing the trajectories of balanced growth.

Keywords: economic growth, optimizing task, balanced growth, human capital, physical capital.

Решение задачи оптимальности в моделях долгосрочного прогнозирования экономического роста обеспечивает равномерное, устойчивое развитие. В результате решения задачи оптимального управления, можно выявить оптимальную траекторию, находясь на которой экономика переходит в устойчивое состояние равновесия.

Устойчивый экономический рост может быть достигнут в рамках неоклассической модели с учетом научно-технического прогресса, технологических изменений и образовательного сектора, поэтому в математической модели необходимо также рассматривать эндогенный фактор изменения человеческого капитала.

Рассмотрим описание такой модели [1-5].

Пусть уравнение динамики объема физического капитала имеет вид:

$$\frac{dK(t)}{dt} = A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta} [u_a(t)h_a(t)^\gamma] - \mu_k K(t) - c(t)N(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ – функция, описывающая технологический прогресс, $K(t)$ – физический капитал, $N(t)$ – численность рабочей силы, $c(t)$ – удельное потребление, β – доля физического капитала, γ – положительный параметр, μ_k – норма амортизации физического капитала, $u(t)$ – доля времени индивида, посвященного производственной деятельности, $h(t)$

– уровень человеческого капитала, h_a – средний уровень человеческого капитала, u_a – средняя доля времени, затраченного на производство.

Уравнение динамики накопления человеческого капитала имеет вид:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta(1-u(t))^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t), \quad (2)$$

где δ – положительный технологический параметр, p, s, q, r – неотрицательные параметры.

Функция полезности имеет вид:

$$J = J(c, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} N(t) U(c(t)) dt, \quad (3)$$

где ρ – неотрицательный фактор дисконтирования.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в выборе таких управляющих параметров (уровня потребления c и доли активного времени, посвященного производственной деятельности u), которые бы максимизировали бы функционал (3) на допустимых траекториях $\{K(t), h(t)\}$.

Решения оптимизационной задачи необходимы для определения траекторий сбалансированного роста, т. е. траекторий, где темпы роста всех переменных постоянны, а также для сравнения планового и конкурентного вариантов развития экономики.

Решим задачу оптимального управления следующим образом: выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина, осуществим переход к сопряженной системе, выпишем необходимые условия экстремума, после чего запишем общую оптимизационную задачу.

Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид:

$$H = \psi_0 e^{-\rho t} N(t) \frac{c(t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \psi_K (A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta} [u_a(t)h_a(t)^\gamma] - \mu_K K(t) - c(t)N(t) + \psi_H [\delta(1-u(t))^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t)]). \quad (4)$$

Функции ψ можно интерпретировать как цены ресурсов.

Сделаем замену переменных:

$$\psi_i = e^{-\rho t} o_i(t).$$

Получаем:

$$H = N(t) \frac{c(t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + o_K [A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta} [u_a(t)h_a(t)^\gamma] - \mu_K K(t) - c(t)N(t)] + o_H [\delta(1-u(t))^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t)]. \quad (5)$$

Система сопряженных уравнений, определяющих цены ресурсов:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[o_K(t)] &= o_K(t)[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}(u(t)h(t)N(t))^{1-\beta}h_a(t)^\gamma u_a(t)^\gamma] \\ \frac{d}{dt}[o_H(t)] &= o_H(t)[\rho + \mu_H - q\delta(1-u(t))^\rho[1-u_a(t)]^s h(t)^{\rho-1}h_a(t)^r] - \\ &- o_K(t)[(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(u(t)N(t))^{1-\beta}h(t)^{-\beta}h_a(t)^\gamma u_a(t)^\gamma]\end{aligned}\quad (6)$$

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}H(K, h, o_K, o_H, c, u, t) &= 0, \\ \frac{d}{dc}H(K, h, o_K, o_H, c, u, t) &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

принимают вид

$$\begin{aligned}o_K(t)(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(h(t)N(t))^{1-\beta}u(t)^{-\beta}h_a(t)^\gamma u_a(t)^\gamma &= \\ = o_H(t)\rho\delta(1-u(t))^{\rho-1}[1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r, \\ c^{-\sigma} &= o_K\end{aligned}\quad (8)$$

Так как было сделано предположение о том, что экономическая система должна находиться в состоянии равновесия, то для нахождения решения необходимо учесть равенства:

$$\begin{aligned}h(t) &= h_a(t), \\ u(t) &= u_a(t).\end{aligned}\quad (9)$$

Получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[o_K(t)] &= o_K(t)[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}(N(t))^{1-\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma}] \\ \frac{d}{dt}[o_H(t)] &= o_H(t)(\rho + \mu_K - q\delta(1-u(t))) - o_K(t)[(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(N(t))^{1-\beta}h(t)^{-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma}] \\ c^{-\sigma} &= K, \\ o_K(t)(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(N(t))^{1-\beta}u(t)^{-\beta+\gamma}h(t)^{1-\beta+\gamma} &= o_H(t)\rho\delta h(t).\end{aligned}\quad (10)$$

Система (1) – (2) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K(t) &= A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \\ \frac{d}{dt}h(t) &= \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t).\end{aligned}\quad (11)$$

Таким образом, для определения оптимальной равновесной траектории экономический агент должен использовать уравнения движения (11), уравнения для сопряженных переменных (6), необходимые условия экстремума (8).

Будем рассматривать траектории сбалансированного роста – такие траектории $\{k(t), h(t), c(t)\}$, для которых темпы роста переменных k, h, c являются постоянными.

Из (10) имеем:

$$-\sigma w_c = w_{(o_K)}. \quad (12)$$

Из (12) и (6) имеем:

$$w_c = \frac{-w_{(o_K)}}{\sigma} = \frac{-o_K}{\sigma o_K} = \frac{[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma}]}{\sigma} \quad (13)$$

Получим дифференциальное уравнение для потребления:

$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{c(t) [\beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma} - (\rho + \mu_K)]}{\sigma}. \quad (14)$$

Из (13) также можно рассмотреть сбалансированную оптимальную траекторию, на которой темпы роста постоянны:

$$A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma} = \frac{\sigma w_c + (\rho + \mu_K)}{\beta} = const. \quad (15)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений для определения оптимальных траекторий:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(t) &= A(t)K(t)^{\beta} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \\ \frac{d}{dt} h(t) &= \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t), \\ \frac{d}{dt} c(t) &= \frac{c(t) [\beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} - (\rho + \mu_K)]}{\sigma}. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученная система дифференциальных уравнений позволяет установить существование траекторий сбалансированного роста, а также изучить вопрос их устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корицкий А. В. Введение в теорию человеческого капитала. – Новосибирск: СибУПК, 2000. – 112 с.
2. Королев А. В. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста. – Новосибирск: Автоматика и телемеханика, 2006. – 120 с.
3. Шараев Ю. В. Теория экономического роста. – М.: ГУ ВШЭ, 2006. – 254 с.
4. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К. Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15., № 2. – С. 55-58.
5. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 48-57.

КЯШКИН А. А., ШАМАНАЕВ П. А.

**НАХОЖДЕНИЕ МЕТОДОМ ДИАГРАММЫ НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ РАЗВЕТВЛЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНОГО АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА**

Аннотация. В статье методом диаграммы Ньютона получено разложение в ряд уравнения по обобщенным степеням λ для решения уравнения разветвления. Приведен пример нахождения приближенных решений уравнения разветвления, полученного при решении краевой задачи для консервативного автономного уравнения Дуффинга.

Ключевые слова: метод диаграммы Ньютона, уравнение разветвления, приближенное решение, краевая задача, уравнение Дуффинга.

KYASHKIN A. A., SHAMANAEV P. A.

**APPLICATION OF NEWTON DIAGRAM METHOD FOR BRANCHING
EQUATION SOLUTION OBTAINED BY SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR CONSERVATIVE AUTONOMOUS DUFFING EQUATION**

Abstract. The authors apply the Newton diagram method to obtain a series expansion of the equation in generalized powers of λ for the solution of the branching. The article includes an example of finding approximate solutions for the branching equation obtained by solving the boundary value problem for the conservative autonomous Duffing equation.

Keywords: Newton diagram method, branching equation, approximate solution, boundary value problem, Duffing equation.

В статье [4] исследовалась задача о нахождении приближенных решений дифференциального уравнения 2-го порядка (консервативное автономное уравнение Дуффинга) [1, с.19]

$$y'' + y = -\varepsilon y + y^3, \quad (1)$$

$$y(-\pi) = y(\pi) \quad (2)$$

в окрестности точки $x = 0$, $\varepsilon = 0$ с помощью нахождения решения в виде ряда до 4-го порядка коэффициентов и построения уравнения разветвления.

Для полученного уравнения разветвления

$$\begin{cases} -\zeta_1 \varepsilon^3 + \zeta_1 \varepsilon^2 - \frac{3}{\pi} \zeta_1 \zeta_2^2 \varepsilon - \frac{3}{\pi} \zeta_1^3 \varepsilon - \zeta_1 \varepsilon + \frac{3}{4\pi} \zeta_1 \zeta_2^2 + \frac{3}{4\pi} \zeta_1^3 = 0, \\ -\zeta_2 \varepsilon^3 + \zeta_2 \varepsilon^2 - \frac{3}{\pi} \zeta_2^3 \varepsilon - \frac{3}{\pi} \zeta_1^2 \zeta_2 \varepsilon - \zeta_2 \varepsilon + \frac{3}{4\pi} \zeta_2^3 + \frac{3}{4\pi} \zeta_1^2 \zeta_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

были найдены следующие семейства решений:

$$\begin{array}{lll}
1-2) & 3) & 4-5) \\
\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = C, \\ \zeta_2 = \pm \frac{\sqrt{-4\pi\varepsilon^3 + 4\pi\varepsilon^2 + (-12C^2 - 4\pi)\varepsilon + 3C^2}}{\sqrt{3}\sqrt{4\varepsilon - 1}}, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = 0, \\ \zeta_2 = 0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \mp \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-\varepsilon^2 + \varepsilon - 1}}{\sqrt{3}\sqrt{4\varepsilon - 1}}, \\ \zeta_2 = 0, \end{array} \right.
\end{array} \quad (4)$$

где $C \in \mathfrak{R}$ – некоторое фиксированное число.

Рассмотрим 1-2 семейства решений в (4) и найдем зависимость $C(\varepsilon)$, тем самым получив решение уравнения разветвления (3) в виде:

$$\zeta(\varepsilon) = \{\zeta_1(\varepsilon), \zeta_2(\varepsilon)\}. \quad (5)$$

Зафиксировав условия (2) следующим образом

$$y(-\pi) = y(\pi) = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

получаем первую краевую задачу для уравнения Дуффинга с параметром ε : (1),(6), где $-\pi < x < \pi$, $\varepsilon \in \mathfrak{R}$.

Из полученных в [4] решений $y_{1,2}(x, \varepsilon, C)$, y_3 , $y_{4,5}(x, \varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющих условию (2), рассмотрим следующие решения:

$$\begin{aligned}
y_1(x, \varepsilon, C) &= \sum_{i=1}^4 (-1)^i a_i \sin(3x) + \sum_{j=1}^{12} (-1)^j a_{j+4} \cos(3x) + \sum_{k=1}^8 (-1)^k a_{k+16} \sin(x) + \sum_{l=1}^{13} (-1)^{l+1} a_{l+24} \cos(x), \\
y_2(x, \varepsilon, C) &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} a_i \sin(3x) + \sum_{j=1}^{12} (-1)^j a_{j+4} \cos(3x) + \sum_{k=1}^8 (-1)^{k+1} a_{k+16} \sin(x) + \sum_{l=1}^{13} (-1)^{l+1} a_{l+24} \cos(x),
\end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{23\varepsilon p^3}{256 \cdot 3^{3/2} \pi^{3/2} q^3}, \quad a_2 = \frac{p^3}{32 \cdot 3^{3/2} \pi^{3/2} q^3}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{3}C^2 p}{32\pi^{3/2} q}, \quad a_4 = \frac{23\sqrt{3}C^2 \varepsilon p}{256\pi^{3/2} q}, \quad a_5 = \frac{69C^3 \varepsilon}{256\pi^{3/2} q^2}, \\
a_6 &= \frac{69C^3 \varepsilon^2}{64\pi^{3/2} q^2}, \quad a_7 = \frac{3C^3 \varepsilon}{8\pi^{3/2} q^2}, \quad a_8 = \frac{3C^3}{32\pi^{3/2} q^2}, \quad a_9 = \frac{23C\varepsilon^3}{64\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{10} = \frac{23C\varepsilon^4}{64\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{11} = \frac{C\varepsilon^3}{8\sqrt{\pi} q^2}, \\
a_{12} &= \frac{23C\varepsilon^2}{64\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{13} = \frac{C\varepsilon}{8\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{14} = \frac{C\varepsilon^2}{8\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{15} = \frac{C^3}{32\pi^{3/2}}, \quad a_{16} = \frac{23C^3 \varepsilon}{256\pi^{3/2}}, \quad a_{17} = \frac{\varepsilon p^3}{\sqrt{3}\pi^{3/2} q^3}, \\
a_{18} &= \frac{p^3}{4\sqrt{3}\pi^{3/2} q^3}, \quad a_{19} = \frac{\varepsilon^3 p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi} q}, \quad a_{20} = \frac{\varepsilon^2 p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi} q}, \quad a_{21} = \frac{\sqrt{3}C^2 \varepsilon p}{\pi^{3/2} q}, \quad a_{22} = \frac{\sqrt{3}C^2 p}{4\pi^{3/2} q}, \quad a_{23} = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi} q}, \\
a_{24} &= \frac{p}{\sqrt{3}\sqrt{\pi} q}, \quad a_{25} = \frac{3C^3}{4\pi^{3/2} q^2}, \quad a_{26} = \frac{6C^3 \varepsilon}{\pi^{3/2} q^2}, \quad a_{27} = \frac{12C^3 \varepsilon^2}{\pi^{3/2} q^2}, \quad a_{28} = \frac{5C\varepsilon^3}{\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{29} = \frac{4C\varepsilon^4}{\sqrt{\pi} q^2}, \\
a_{30} &= \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{31} = \frac{5C\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} q^2}, \quad a_{32} = \frac{C\varepsilon^3}{\sqrt{\pi}}, \quad a_{33} = \frac{C\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}}, \quad a_{34} = \frac{3C^3 \varepsilon}{\pi^{3/2}}, \quad a_{35} = \frac{3C^3}{4\pi^{3/2}}, \quad a_{36} = \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\pi}}, \quad a_{37} = \frac{C}{\sqrt{\pi}},
\end{aligned}$$

$$a_i = a_i(\varepsilon, C), \quad i = \overline{1, 37}, \quad p = p(\varepsilon, C) = \sqrt{-4\pi\varepsilon^3 + 4\pi\varepsilon^2 - 12C^3\varepsilon - 4\pi\varepsilon + 3C^2},$$

$$q = q(\varepsilon) = \sqrt{4\varepsilon - 1}, \quad C \in \mathfrak{R} \text{ – некоторое фиксированное число.}$$

В статье [3] с помощью подстановки каждого из решений $y_1(x, \varepsilon, C)$ и $y_2(x, \varepsilon, C)$ из (7) в (6) было получено уравнение:

$$\frac{23\varepsilon - 8}{64\pi^{3/2}} C^3 + \frac{23\varepsilon^4 - 31\varepsilon^3 + 31\varepsilon^2 + 248\varepsilon - 64}{64\sqrt{\pi}(4\varepsilon - 1)} C + \frac{1}{2} = 0. \quad (8)$$

Данное уравнение (8) при каждом фиксированном ε будет являться кубическим уравнением относительно C . Преобразовав уравнение (8) в каноническую форму и исследовав его, в статье [3] мы получили зависимость числа различных корней $C \in \mathfrak{R}$ от фиксированного $\varepsilon \in \mathfrak{R}$, отраженную в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость числа различных корней $C \in \mathfrak{R}$ от параметра $\varepsilon \in \mathfrak{R}$.

Здесь $\varepsilon_1^0 \approx -0,68177$, $\varepsilon_2^0 \approx 0,25285$.

ε	$(-\infty, \varepsilon_1^0) \cup \left(\frac{1}{4}, \varepsilon_2^0\right) \cup \left[\frac{8}{23}, \infty\right)$	$\{\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0\}$	$\left(\varepsilon_1^0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\varepsilon_2^0, \frac{8}{23}\right)$
Число различных корней $C \in \mathfrak{R}$	1	2	3

Произведем замену $C = \zeta$, $\varepsilon = \lambda$ и преобразуем левую часть (8), умножив обе части уравнения на $4\lambda - 1$. Получим уравнение

$$\frac{23\lambda^2 \zeta^3}{16\pi^{3/2}} - \frac{55\lambda \zeta^3}{64\pi^{3/2}} + \frac{\zeta^3}{8\pi^{3/2}} + \frac{23\lambda^4 \zeta}{64\sqrt{\pi}} - \frac{31\lambda^3 \zeta}{64\sqrt{\pi}} + \frac{31\lambda^2 \zeta}{64\sqrt{\pi}} + \frac{31\lambda \zeta}{8\sqrt{\pi}} - \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} + 2\lambda - \frac{1}{2} = 0, \quad (9)$$

где $\lambda \neq 1/4$. Решение данного уравнения (9) относительно ζ будем искать в виде ряда методом диаграммы Ньютона [2, с. 35].

Рассмотрим промежутки, указанные в таблице 1. На $(-\infty, \varepsilon_1^0)$ и $[8/23, \infty)$ решения уравнения (9) ищутся после ограничения этих промежутков. При $\varepsilon = \varepsilon_1^0$ и $\varepsilon = \varepsilon_2^0$ решения получить невозможно, поскольку ε_1^0 и ε_2^0 известны лишь приближенно.

Далее, ввиду громоздкости получающихся решений ограничимся только двумя промежутками, округленными до 10^{-3} : $(0,25, 0,252] \subset (1/4, \varepsilon_2^0)$ и $[0,253, 0,347] \subset (\varepsilon_2^0, 8/23)$. Решения будем искать с точностью $\tilde{\varepsilon} = 10^{-2}$. Для удобства коэффициенты $\gamma_{k,l}^{(d)}$ получающихся решений приведены в стандартном виде и мантииссы округлены до 10^{-3} . Вычисленные области сходимости округлены до 10^{-4} . Решение задачи производится с использованием математического пакета Maxima.

1. $(0,25, 0,252]$. Согласно таблице 1, в окрестности любой точки из данного промежутка методом диаграммы Ньютона будет найдено одно решение.

1) Рассмотрим окрестность точки $\lambda = 0,25$. В этой окрестности получаем 3 решения, однако вычисленная область сходимости с точностью $\tilde{\varepsilon} = 10^{-2}$ может быть найдена только для одного решения:

$$\zeta_1^{(0,25)}(\lambda) = \sum_{i=1}^7 \gamma_{1,i-1}^{(0,25)} \lambda^{i-1}, \quad (10)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,25)} = 6,458 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,1}^{(0,25)} = -1,552 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,2}^{(0,25)} = 1,554 \cdot 10^{15}$, $\gamma_{1,3}^{(0,25)} = -8,297 \cdot 10^{15}$,
 $\gamma_{1,4}^{(0,25)} = 2,492 \cdot 10^{16}$, $\gamma_{1,5}^{(0,25)} = -3,993 \cdot 10^{16}$, $\gamma_{1,6}^{(0,25)} = 2,665 \cdot 10^{16}$.

Тогда вычисленная область сходимости: $[a^{(0,25)}, b^{(0,25)}] = [0,2480, 0,2519]$.

2) Окрестность точки $\lambda = 0,252$:

$$\zeta_1^{(0,252)}(\lambda) = \sum_{i=1}^5 \gamma_{1,i-1}^{(0,252)} \lambda^{i-1}, \quad (11)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,252)} = -2,571 \cdot 10^8$, $\gamma_{1,1}^{(0,252)} = 4,026 \cdot 10^9$, $\gamma_{1,2}^{(0,252)} = -2,364 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,3}^{(0,252)} = 6,169 \cdot 10^{10}$,
 $\gamma_{1,4}^{(0,252)} = -6,036 \cdot 10^{10}$.

Тогда вычисленная область сходимости: $[a^{(0,252)}, b^{(0,252)}] = [0,2508, 0,2535]$.

Решение задачи в этом случае можно записать так:

$$\zeta(\lambda) = \begin{cases} \zeta_1^{(0,25)}(\lambda), & \text{а́ннè } \lambda \in (0,25, 0,2519], \\ \zeta_1^{(0,252)}(\lambda), & \text{а́ннè } \lambda \in (0,2519, 0,252]. \end{cases} \quad (12)$$

где $\zeta_1^{(0,25)}(\lambda)$, $\zeta_1^{(0,252)}(\lambda)$ имеют вид (10)-(11) соответственно.

2. $[0,253, 0,347]$. Согласно таблице 1, в окрестности любой точки из данного промежутка методом диаграммы Ньютона будет найдено три решения.

1) Окрестность точки $\lambda = 0,275$:

$$\zeta_1^{(0,275)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{1,i-1}^{(0,275)} \lambda^{i-1}, \quad (13)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,275)} = 1,290 \cdot 10^9$, $\gamma_{1,1}^{(0,275)} = -4,176 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,2}^{(0,275)} = 6,010 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,3}^{(0,275)} = -5,046 \cdot 10^{12}$,
 $\gamma_{1,4}^{(0,275)} = 2,724 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,5}^{(0,275)} = -9,805 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,6}^{(0,275)} = 2,353 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,7}^{(0,275)} = -3,631 \cdot 10^{14}$,
 $\gamma_{1,8}^{(0,275)} = 3,269 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,9}^{(0,275)} = -1,308 \cdot 10^{14}$;

$$\zeta_2^{(0,275)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,275)} \lambda^{i-1}, \quad (14)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,275)} = -1,156 \cdot 10^1$, $\gamma_{2,1}^{(0,275)} = 7,403 \cdot 10^1$, $\gamma_{2,2}^{(0,275)} = -1,289 \cdot 10^2$;

$$\zeta_3^{(0,275)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{3,i-1}^{(0,275)} \lambda^{i-1}, \quad (15)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,275)} = -9,300 \cdot 10^8$, $\gamma_{3,1}^{(0,275)} = 3,010 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{3,2}^{(0,275)} = -4,332 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,3}^{(0,275)} = 3,636 \cdot 10^{12}$,
 $\gamma_{3,4}^{(0,275)} = -1,963 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,5}^{(0,275)} = 7,063 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,6}^{(0,275)} = -1,695 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,7}^{(0,275)} = 2,615 \cdot 10^{14}$,
 $\gamma_{3,8}^{(0,275)} = -2,353 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,9}^{(0,275)} = 9,415 \cdot 10^{13}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:
 $[a^{(0,275)}, b^{(0,275)}] = [0,2529, 0,2962]$.

2) Окрестность точки $\lambda = 0,317$:

$$\xi_1^{(0,317)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{1,i-1}^{(0,317)} \lambda^{i-1}, \quad (16)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,317)} = 3,643 \cdot 10^9$, $\gamma_{1,1}^{(0,317)} = -1,045 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,2}^{(0,317)} = 1,333 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,3}^{(0,317)} = -9,913 \cdot 10^{12}$,
 $\gamma_{1,4}^{(0,317)} = 4,741 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,5}^{(0,317)} = -1,512 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,6}^{(0,317)} = 3,215 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,7}^{(0,317)} = -4,395 \cdot 10^{14}$,
 $\gamma_{1,8}^{(0,317)} = 3,506 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,9}^{(0,317)} = -1,243 \cdot 10^{14}$;

$$\xi_2^{(0,317)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,317)} \lambda^{i-1}, \quad (17)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,317)} = -1,643 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,1}^{(0,317)} = 4,197 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,2}^{(0,317)} = -5,825 \cdot 10^0$;

$$\xi_3^{(0,317)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_{3,i-1}^{(0,317)} \lambda^{i-1}, \quad (18)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,317)} = -3,643 \cdot 10^9$, $\gamma_{3,1}^{(0,317)} = 1,045 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,2}^{(0,317)} = -1,333 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,3}^{(0,317)} = 9,913 \cdot 10^{12}$,
 $\gamma_{3,4}^{(0,317)} = -4,741 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,5}^{(0,317)} = 1,512 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,6}^{(0,317)} = -3,215 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,7}^{(0,317)} = 4,395 \cdot 10^{14}$,
 $\gamma_{3,8}^{(0,317)} = -3,506 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,9}^{(0,317)} = 1,243 \cdot 10^{14}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:

$$[a^{(0,317)}, b^{(0,317)}] = [0,2957, 0,3346].$$

3) Окрестность точки $\lambda = 0,338$:

$$\xi_1^{(0,338)}(\lambda) = \sum_{i=1}^7 \gamma_{1,i-1}^{(0,338)} \lambda^{i-1}, \quad (19)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,338)} = -1,081 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,1}^{(0,338)} = 1,928 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,2}^{(0,338)} = -1,433 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,3}^{(0,338)} = 5,684 \cdot 10^{12}$,
 $\gamma_{1,4}^{(0,338)} = -1,268 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,5}^{(0,338)} = 1,508 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,6}^{(0,338)} = -7,477 \cdot 10^{12}$;

$$\xi_2^{(0,338)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,338)} \lambda^{i-1}, \quad (20)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,338)} = -1,295 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,1}^{(0,338)} = 2,060 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,2}^{(0,338)} = -2,542 \cdot 10^0$;

$$\xi_3^{(0,338)}(\lambda) = \sum_{i=1}^7 \gamma_{3,i-1}^{(0,338)} \lambda^{i-1}, \quad (21)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,338)} = 1,081 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{3,1}^{(0,338)} = -1,928 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,2}^{(0,338)} = 1,433 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,3}^{(0,338)} = -5,684 \cdot 10^{12}$,
 $\gamma_{3,4}^{(0,338)} = 1,268 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,5}^{(0,338)} = -1,508 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,6}^{(0,338)} = 7,476 \cdot 10^{12}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:

$$[a^{(0,338)}, b^{(0,338)}] = [0,3333, 0,3421].$$

4) Окрестность точки $\lambda = 0,343$:

$$\xi_1^{(0,343)}(\lambda) = \sum_{i=1}^7 \gamma_{1,i-1}^{(0,343)} \lambda^{i-1}, \quad (22)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,343)} = -1,219 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,1}^{(0,343)} = 2,137 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,2}^{(0,343)} = -1,562 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{1,3}^{(0,343)} = 6,086 \cdot 10^{14}$,

$$\gamma_{1,4}^{(0,343)} = -1,334 \cdot 10^{15}, \gamma_{1,5}^{(0,343)} = 1,560 \cdot 10^{15}, \gamma_{1,6}^{(0,343)} = -7,599 \cdot 10^{14};$$

$$\xi_2^{(0,343)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,343)} \lambda^{i-1}, \quad (23)$$

$$\text{где } \gamma_{2,0}^{(0,343)} = -1,250 \cdot 10^0, \gamma_{2,1}^{(0,343)} = 1,794 \cdot 10^0, \gamma_{2,2}^{(0,343)} = -2,152 \cdot 10^0;$$

$$\xi_3^{(0,343)}(\lambda) = \sum_{i=1}^7 \gamma_{3,i-1}^{(0,343)} \lambda^{i-1}, \quad (24)$$

$$\text{где } \gamma_{3,0}^{(0,343)} = 1,219 \cdot 10^{12}, \gamma_{3,1}^{(0,343)} = -2,137 \cdot 10^{13}, \gamma_{3,2}^{(0,343)} = 1,562 \cdot 10^{14}, \gamma_{3,3}^{(0,343)} = -6,086 \cdot 10^{14}, \\ \gamma_{3,4}^{(0,343)} = 1,334 \cdot 10^{15}, \gamma_{3,5}^{(0,343)} = -1,560 \cdot 10^{15}, \gamma_{3,6}^{(0,343)} = 7,599 \cdot 10^{14}.$$

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:
 $[a^{(0,343)}, b^{(0,343)}] = [0,3409, 0,3448].$

5) Окрестность точки $\lambda = 0,345$:

$$\xi_1^{(0,345)}(\lambda) = \sum_{i=1}^6 \gamma_{1,i-1}^{(0,345)} \lambda^{i-1}, \quad (25)$$

$$\text{где } \gamma_{1,0}^{(0,345)} = 3,678 \cdot 10^{11}, \gamma_{1,1}^{(0,345)} = -5,340 \cdot 10^{12}, \gamma_{1,2}^{(0,345)} = 3,101 \cdot 10^{13}, \gamma_{1,3}^{(0,345)} = -9,005 \cdot 10^{13}, \\ \gamma_{1,4}^{(0,345)} = 1,307 \cdot 10^{14}, \gamma_{1,5}^{(0,345)} = -7,593 \cdot 10^{13};$$

$$\xi_2^{(0,345)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,345)} \lambda^{i-1}, \quad (26)$$

$$\text{где } \gamma_{2,0}^{(0,345)} = -1,234 \cdot 10^0, \gamma_{2,1}^{(0,345)} = 1,702 \cdot 10^0, \gamma_{2,2}^{(0,345)} = -2,019 \cdot 10^0;$$

$$\xi_3^{(0,345)}(\lambda) = \sum_{i=1}^6 \gamma_{3,i-1}^{(0,345)} \lambda^{i-1}, \quad (27)$$

$$\text{где } \gamma_{3,0}^{(0,345)} = -3,678 \cdot 10^{11}, \gamma_{3,1}^{(0,345)} = 5,339 \cdot 10^{12}, \gamma_{3,2}^{(0,345)} = -3,101 \cdot 10^{13}, \gamma_{3,3}^{(0,345)} = 9,004 \cdot 10^{13}, \\ \gamma_{3,4}^{(0,345)} = -1,307 \cdot 10^{14}, \gamma_{3,5}^{(0,345)} = 7,593 \cdot 10^{13}.$$

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:
 $[a^{(0,345)}, b^{(0,345)}] = [0,3440, 0,3459].$

6) Окрестность точки $\lambda = 0,3457$:

$$\xi_1^{(0,3457)}(\lambda) = \sum_{i=1}^6 \gamma_{1,i-1}^{(0,3457)} \lambda^{i-1}, \quad (28)$$

$$\text{где } \gamma_{1,0}^{(0,3457)} = 1,781 \cdot 10^{12}, \gamma_{1,1}^{(0,3457)} = -2,580 \cdot 10^{13}, \gamma_{1,2}^{(0,3457)} = 1,495 \cdot 10^{14}, \gamma_{1,3}^{(0,3457)} = -4,330 \cdot 10^{14}, \\ \gamma_{1,4}^{(0,3457)} = 6,270 \cdot 10^{14}, \gamma_{1,5}^{(0,3457)} = -3,633 \cdot 10^{14};$$

$$\xi_2^{(0,3457)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,3457)} \lambda^{i-1}, \quad (29)$$

$$\text{где } \gamma_{2,0}^{(0,3457)} = -1,229 \cdot 10^0, \gamma_{2,1}^{(0,3457)} = 1,672 \cdot 10^0, \gamma_{2,2}^{(0,3457)} = -1,975 \cdot 10^0;$$

$$\xi_3^{(0,3457)}(\lambda) = \sum_{i=1}^6 \gamma_{3,i-1}^{(0,3457)} \lambda^{i-1}, \quad (30)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,3457)} = -1,781 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,1}^{(0,3457)} = 2,580 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,2}^{(0,3457)} = -1,495 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,3}^{(0,3457)} = 4,329 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,4}^{(0,3457)} = -6,270 \cdot 10^{14}$, $\gamma_{3,5}^{(0,3457)} = 3,633 \cdot 10^{14}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:
 $[a^{(0,3457)}, b^{(0,3457)}] = [0,3450, 0,3463]$.

7) Окрестность точки $\lambda = 0,3463$:

$$\xi_1^{(0,3463)}(\lambda) = \sum_{i=1}^5 \gamma_{1,i-1}^{(0,3463)} \lambda^{i-1}, \quad (31)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,3463)} = -5,460 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{1,1}^{(0,3463)} = 6,315 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,2}^{(0,3463)} = -2,739 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,3}^{(0,3463)} = 5,279 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,4}^{(0,3463)} = -3,816 \cdot 10^{12}$;

$$\xi_2^{(0,3463)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,3463)} \lambda^{i-1}, \quad (32)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,3463)} = -1,225 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,1}^{(0,3463)} = 1,647 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,2}^{(0,3463)} = -1,938 \cdot 10^0$;

$$\xi_3^{(0,3463)}(\lambda) = \sum_{i=1}^5 \gamma_{3,i-1}^{(0,3463)} \lambda^{i-1}, \quad (33)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,3463)} = 5,460 \cdot 10^{10}$, $\gamma_{3,1}^{(0,3463)} = -6,315 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,2}^{(0,3463)} = 2,739 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,3}^{(0,3463)} = -5,279 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,4}^{(0,3463)} = 3,816 \cdot 10^{12}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:
 $[a^{(0,3463)}, b^{(0,3463)}] = [0,3459, 0,3466]$.

8) Окрестность точки $\lambda = 0,3468$:

$$\xi_1^{(0,3468)}(\lambda) = \sum_{i=1}^5 \gamma_{1,i-1}^{(0,3468)} \lambda^{i-1}, \quad (34)$$

где $\gamma_{1,0}^{(0,3468)} = -3,282 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{1,1}^{(0,3468)} = 3,789 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{1,2}^{(0,3468)} = -1,640 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,3}^{(0,3468)} = 3,156 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{1,4}^{(0,3468)} = -2,277 \cdot 10^{13}$;

$$\xi_2^{(0,3468)}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{2,i-1}^{(0,3468)} \lambda^{i-1}, \quad (35)$$

где $\gamma_{2,0}^{(0,3468)} = -1,221 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,1}^{(0,3468)} = 1,626 \cdot 10^0$, $\gamma_{2,2}^{(0,3468)} = -1,908 \cdot 10^0$;

$$\xi_3^{(0,3468)}(\lambda) = \sum_{i=1}^5 \gamma_{3,i-1}^{(0,3468)} \lambda^{i-1}, \quad (36)$$

где $\gamma_{3,0}^{(0,3468)} = 3,282 \cdot 10^{11}$, $\gamma_{3,1}^{(0,3468)} = -3,789 \cdot 10^{12}$, $\gamma_{3,2}^{(0,3468)} = 1,640 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,3}^{(0,3468)} = -3,156 \cdot 10^{13}$, $\gamma_{3,4}^{(0,3468)} = 2,277 \cdot 10^{13}$.

Пересечение вычисленных областей сходимости решений имеет вид:
 $[a^{(0,3468)}, b^{(0,3468)}] = [0,3466, 0,3470]$.

Решение задачи в этом случае запишется так:

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} \xi_i^{(0,275)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in [0,253, 0,2962], \\ \xi_i^{(0,317)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in (0,2962, 0,3346], \\ \xi_i^{(0,338)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in (0,3346, 0,3421], \\ \xi_i^{(0,343)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in (0,3421, 0,3448], \\ \xi_i^{(0,345)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in (0,3448, 0,3459], \\ \xi_i^{(0,3457)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in (0,3459, 0,3463], \\ \xi_i^{(0,3463)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in (0,3463, 0,3466], \\ \xi_i^{(0,3468)}(\lambda), & \text{а именно} & \lambda \in (0,3466, 0,347]. \end{cases} \quad (37)$$

где $\xi_i^{(0,275)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,317)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,338)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,343)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,345)}(\lambda)$, $\xi_i^{(0,3457)}(\lambda)$, $i = \overline{1,3}$, имеют вид (13)-(36) соответственно.

Производя в (12) и (37) обратную замену $\xi = C$, $\lambda = \varepsilon$, и подставляя их в 1-2 семейства решений в (4), получаем решение уравнения разветвления (3) в виде (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Астахов В. В., Коблянский С. А., Шабунин А. В. Осциллятор Дуффинга: Учебное пособие для студентов вузов. – Саратов: СГУ, 2007. – 53 с.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
3. Кяшкин А. А., Шаманаев П. А. Исследование приближенных решений первой краевой задачи для консервативного автономного уравнения Дуффинга // Актуальные вопросы прикладной математики и информатики: сб. науч. тр. – Саранск: СВМО. – 2013. – Т. 2, № 2. – С.20-28.
4. Кяшкин А. А., Шаманаев П. А. Нахождение малых решений дифференциального уравнения 2-го порядка с помощью построения уравнения разветвления // Актуальные вопросы прикладной математики и информатики: сб. науч. тр. – Саранск: СВМО. – 2013. – Т. 2, № 1. – С.19-23.

САЛЬНИКОВ В. Д.
РАЗРАБОТКА НЕЯВНОЙ СХЕМЫ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Аннотация. В статье описана неявная противопоточная конечно объемная схема в дельта-форме для моделирования течений идеального сжимаемого газа. В код программы для моделирования задач гидродинамики cfd-2d, разрабатываемой на кафедре прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, добавлена возможность расчета течения газа неявным конечно объемным методом. Приведен анализ решения типовых задач.

Ключевые слова: газовая динамика, численное моделирование, уравнение Эйлера.

SALNIKOV V. D.
CREATING IMPLICIT SCHEME
FOR COMPRESSIBLE GAS FLOWS SIMULATION

Abstract. The article describes the implicit finite volume upwind scheme in delta-form for calculation of an ideal compressible gas flows. The ability to calculate an implicit finite volume upwind scheme in delta-form for calculation of an ideal compressible gas flows was added to the program for simulation of hydrodynamics cfd-2d, developed by the Chair of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics. The article includes an analysis of typical problems.

Keywords: gas dynamics, numerical simulation, Euler equation.

Задачи газовой динамики постоянно возникают в самых разных областях науки и техники, что обуславливает потребность исследований в области механики газа. Наряду с теоретическим и экспериментальным подходами, в настоящее время, с учетом постоянного роста производительности компьютеров, вычислительная газодинамика становится все более эффективным инструментом исследований. Уравнения газодинамики нелинейны и многомерны — эти обстоятельства также говорят в пользу вычислительного подхода, поскольку теоретические исследования очень сложны. Вычислительная газовая динамика дает возможность проведения экспериментов, когда невозможно провести прямые измерения, и позволяет экономить средства, когда такие измерения слишком дороги. Интенсивное развитие и применение к расчету невязких сжимаемых течений идеального газа получили неявные разностные схемы, которые в отличие от явных схем снимают жесткие ограничения на шаг интегрирования по времени. В код программы для моделирования задач

гидродинамики cfd-2d [6] добавлена возможность расчета течения газа неявным конечно-объемным методом. Приведен анализ решения типовых задач.

Основные уравнения. В основе математической модели теории движения газа и жидкости лежат законы сохранения массы, импульса и энергии. В декартовой системе координат (x, y) (в этой работе рассматривается только двумерные течения, при необходимости все рассуждения можно обобщить на трехмерный случай) течение сжимаемого идеального невязкого газа описывает уравнение Эйлера [3]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

уравнение состояния представлено в форме:

$$p = \varepsilon \rho (\gamma - 1), \quad (1.2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, F_x(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, F_y(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь t – время; ρ – плотность; p – давление; (u, v) – составляющие скорости в координатных направлениях (x, y) ; ε – внутренняя энергия единицы массы; $E = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}$ – полная энергия единицы массы; $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – показатель адиабаты; C_p – теплоемкость при постоянном давлении; C_v – теплоемкость при постоянном объеме.

Численный метод. В основу численного алгоритма положен метод конечных объемов. Рассматриваемый метод относится к семейству методов Годуновского типа и является консервативным. Методы Годуновского типа основаны на решении задачи Римана о распаде разрыва. Достаточно часто в области сложной геометрии не удастся приемлемо построить не только структурированную сетку, но и многоблочную. Преимущество неструктурированных сеток перед регулярными заключается в большей гибкости при дискретизации физической области сложной формы [1]. В данной работе выбрана неструктурная треугольная сетка, удовлетворяющая принципу триангуляции Делоне. В таких сетках треугольники построены так, что в круг, описанный около любого треугольника, не попадает ни одного узла, отличного от вершин указанного треугольника [2, 7]. Треугольные ячейки сетки, построенной таким образом, выступают в роли непересекающихся контрольных объемов.

Система (1.1) записывается в виде интегральных законов сохранения по контрольному объему Δ_i с границей $\partial\Delta_i$, ориентация которой задается внешней единичной нормалью $\vec{n}$:

$$\iint_{\Delta_i} \frac{\partial U}{\partial t} dS + \iint_{\partial\Delta_i} \text{div } \vec{F} dS = 0. \quad (2.1)$$

Затем, применив формулу Остроградского-Гаусса, связывающую интеграл по объему с поверхностным интегралом, получим:

$$\iint_{\Delta_i} \frac{\partial U}{\partial t} dS + \oint_{\partial \Delta_i} \vec{F} dl = 0, \quad (2.2)$$

отсюда,

$$S_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = - \oint_{\partial \Delta_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dl. \quad (2.3)$$

Запишем (2.3) в полудискретном виде:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau_i} = - \frac{1}{S_i} \oint_{\partial \Delta_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dl. \quad (2.4)$$

Обозначим через $F_{ij}^{n+1} = (F_{x_{ij}}^{n+1}, F_{y_{ij}}^{n+1})$ поток через грань с номером j , контрольного объема Δ_i на временном слое $(n+1)$; τ_i – шаг по времени в Δ_i контрольном объеме; S_i – площадь i -ого контрольного объема.

Контурный интеграл из соотношения (2.4) может быть аппроксимирован:

$$R_i^{n+1} = \sum_{j=1}^3 l_{ij} [F_{x_{ij}}^{n+1} \cdot n_{x_{ij}} + F_{y_{ij}}^{n+1} \cdot n_{y_{ij}}], \quad (2.5)$$

где l_{ij} – длина j -ой грани треугольника Δ_i ; $n_{ij} = (n_{x_{ij}}, n_{y_{ij}})$ – единичная нормаль к j -ой грани i -ой ячейки.

Потоки через грань контрольного объема вычисляются на основе приближенного решения задачи Римана [3] методом Лакса-Фридрихса [5].

Таким образом, из (2.4) и (2.5) получаем:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau_i} S_i = - \sum_{j=1}^3 l_{ij} [F_{x_{ij}}^{n+1} \cdot n_{x_{ij}} + F_{y_{ij}}^{n+1} \cdot n_{y_{ij}}]. \quad (2.6)$$

Рассмотрим разложение потоковой функции в ряд Тейлора:

$$F_{x_{ij}}^{n+1} = F_x(U_{ij}^{n+1}) = F_{x_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U} \right)_{U=U_{ij}}^n (U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n), \quad (2.7)$$

где U_{ij}^n – осредненное по Роу [4] значение между U_i^n и $\tilde{U}_{ij}^n$; $\tilde{U}_{ij}^n = U_k^n$ – такое переобозначение, когда k -ая ячейка является соседней с i -ой ячейкой, и для них обеих j -ая граница i -ой ячейки является общей.

Матрица Якоби $\left(\frac{\partial F}{\partial U} \right)$ обладает набором действительных собственных значений и векторов, и поэтому может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} A &= R \Lambda L = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)L = A^+ + A^-, \\ A^+ &= R \Lambda^+ L, \\ A^- &= R \Lambda^- L, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$, $\Lambda^+ = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|)$, $\Lambda^- = \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|)$, $|\Lambda| = \text{diag}\{|\lambda_i|\}$.

Опираясь на этот факт, для того чтобы сконструировать противопоточную разностную схему в дельта-форме, представим разложение (2.7) в виде:

$$F_{x_{ij}}^{n+1} = F_{x_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^+ (U_i^{n+1} - U_i^n) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^- (\tilde{U}_{ij}^{n+1} - \tilde{U}_{ij}^n). \quad (2.9)$$

Таким образом, получим неявную разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_i^{n+1}}{\tau_i} S_i + \sum_{j=1}^3 l_{ij} \left[n_{x_{ij}} \left[F_{x_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^+ \Delta U_i^{n+1} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^- \Delta \tilde{U}_{ij}^{n+1} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 l_{ij} \left[n_{y_{ij}} \left[F_{y_{ij}}^n + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^+ \Delta U_i^{n+1} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial U}\right)_{(n,ij)}^- \Delta \tilde{U}_{ij}^{n+1} \right] \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для стационарного случая вычисления могут проводиться с собственным шагом по времени для каждой ячейки, в качестве параметров используя условие Куранта-Фридрихса-Леви. Тогда,

$$\tau_i = CFL \cdot \frac{S_i}{\sum_{j=1}^3 [l_{ij} \cdot \rho(A_{ij})]}, \quad (2.11)$$

где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы Якоби $A = \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)$. Для нестационарного случая, τ_i для всех ячеек остаются постоянными.

Классическая реализация метода С. К. Годунова предполагает, что в каждой из ячеек значение газодинамических параметров U постоянно. Для двумерного случая с треугольной сеткой это можно представить как область, состоящую из треугольных ступенек, где высота ступеньки определяется значением U (понятно, что U это вектор, так что реально получается 4 области). Для повышения порядка точности по пространству применяются методы более интеллектуальной, чем кусочно-постоянная, реконструкции значений в ячейках.

В данной работе применяется, как кусочно-постоянная реконструкция, так и кусочно-линейная.

Кусочно-линейное распределение сеточной функции U ищется в виде:

$$U(x, y) = U_i + (x - x_i)\alpha_i + (y - y_i)\beta_i, \quad (2.12)$$

где α_i и β_i – некоторые коэффициенты; (x_i, y_i) – координаты центра масс ячейки с номером i .

Формула (2.12) определяет, как могут быть найдены значения газодинамических параметров на границе i -ого треугольника. На настоящий момент не получены достаточные условия, обеспечивающие ограниченность всех вариаций численного решения на произвольной сетке, т. е. применимость каждого конкретного метода реконструкции должна быть проверена [3].

Роль коэффициентов α_i и β_i играет значение $grad U(x, y)$ в точке (x_i, y_i) .

Градиент вычисляется в общем случае из теоремы о градиенте:

$$\iint_{\Delta_i} \nabla U dS = \oint_{\partial \Delta_i} U dl, \nabla U \approx \frac{1}{S} \oint_{\partial \Delta_i} U dl. \quad (2.13)$$

Для решения линейной системы уравнений, возникшей из-за (2.10), в данной работе применялся метод Гаусса-Зейделя.

Численный эксперимент. Возможности реализованной неявной схемы в рамках пакета программ cfd-2d демонстрируются на примере решения задач обтекания профиля NACA0012 невязким сжимаемым газом и задачи о сверхзвуковом обтекании клина.

Обтекание профиля NACA0012. Симметричный профиль NACA0012 обтекается потоком невязкого газа с числом Маха $M=0.7$ под углом атаки 1.489 градусов, при давлении 46066.16 Па и температуре 248 К. Используя эти данные, вычисляются остальные параметры исходя из термодинамических соотношений.

В качестве сравнительной характеристики между результатом численного метода и ранее проведенным экспериментом рассматривается коэффициент давления по поверхности профиля.

$$C_p = \frac{p}{(p_\infty u_\infty^2)/2}, \quad (3.1.1)$$

где p_∞, u_∞^2 – параметры набегающего потока.

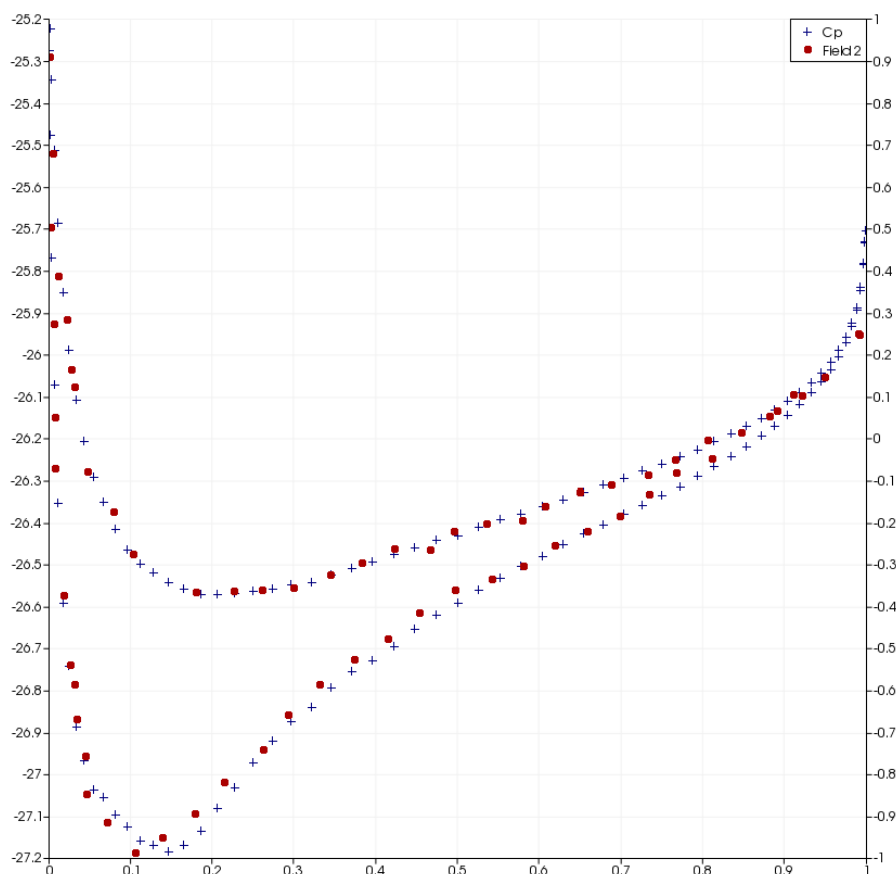


Рис. 1. Распределение коэффициентов давления

Распределение коэффициентов давления показано на (рис. 1) и демонстрирует хорошее совпадение с экспериментом (синий маркер – эксперимент; красный – результаты расчета).

Сверхзвуковое обтекание клина. Рассчитывается задача о сверхзвуковом обтекании клина с углом в 10 градусов в плоском канале (рис. 2), при числе Маха $M=2$, при давлении $P = 101325 \text{ Па}$ и температуре 300 К . Производится анализ системы скачков уплотнения возникающих при обтекании клина и многократного отражения начального скачка от стенок канала.

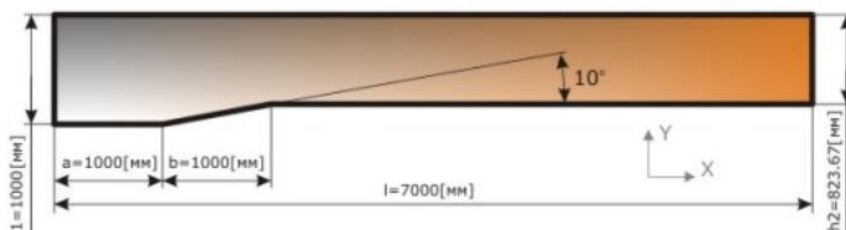


Рис. 2. Сверхзвуковое обтекание клина с углом в 10 градусов в плоском канале

На (рис. 3) и (рис. 4) представлено распределение полей числа Маха и давления.

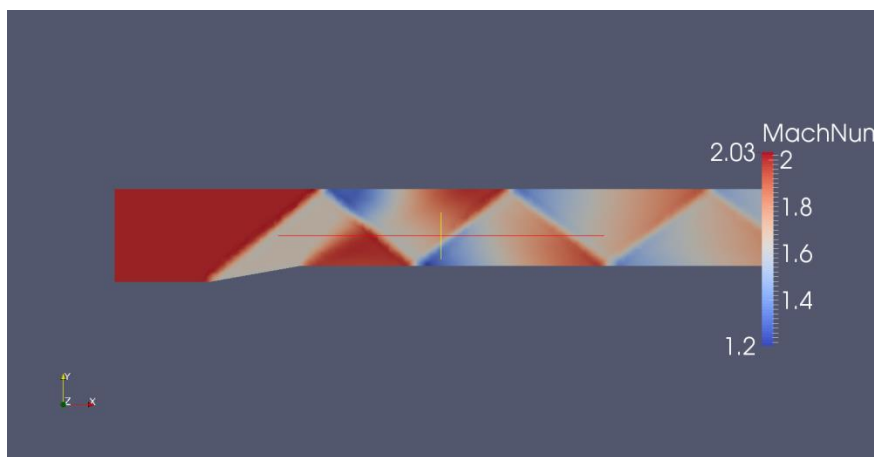


Рис. 3 Распределение полей числа Маха

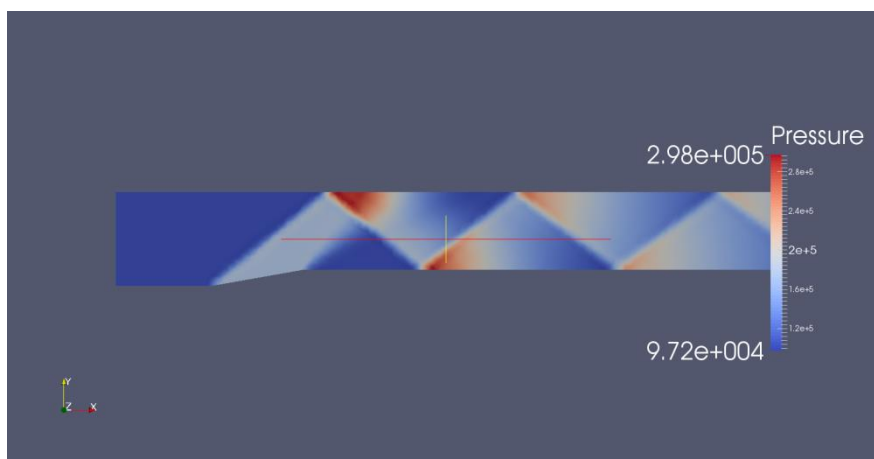


Рис.4 Распределение полей давления

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся плоскостях. – М.: Физматлит, 2010. – 486 с.
2. Елизарова Т. Г. Лекции. Математическая модель и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. – М.: Физ. факультет МГУ, 2005. – 224 с.
3. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семёнов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
4. Roe P. L. Approximate Rieman Solvers, Parameters Vectors and Difference Schemes // Journal of Computations Phys., 1981. – Vol. 43. – pp. 357-378.
5. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. – Verlag: Springer, 1999. – 624 p.
6. Пакетпрограмм для моделирования турбулентных течений сжимаемого газа. – [Электронныйресурс]. – Режим доступа: <http://code.google.com/p/cfd-2d/>
7. Программа генерации сетки. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>

АТРИХИН В. А., ЧЕЛЫШОВ М. С., ШАМАНАЕВ П. А.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Аннотация. В статье описан численный метод ортогональной циклической редукции для решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицами специального вида. Приведены результаты расчетов для блочных матриц, состоящих из одномерных и двумерных блоков.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений с матрицами специального вида, метод ортогональной циклической редукции, ортогональные преобразования.

ATRYAKHIN V. A., CHELYSHOV M. S., SHAMANAEV P. A.

APPLICATION OF ORTHOGONAL CYCLIC REDUCTION METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH PARTICULAR MATRICES

Abstract. The article examines the numerical method of orthogonal reduction for solving systems of linear algebraic equations with particular matrices. The results of calculations for block matrices with one-dimensional and two-dimensional blocks are presented.

Keywords: system of linear algebraic equations with particular matrices, orthogonal cyclic reduction method, orthogonal transformations.

При решении различных прикладных задач [1] возникает необходимость в решении систем линейных алгебраических уравнений с блочной матрицей специального вида:

$$As = f, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n(N-1) \times (n \cdot N+1)}$ – постоянная блочная матрица, $s = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T, \theta]^T \in \mathbb{R}^{n \cdot N+1}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$,

$f \in \mathbb{R}^{n(N-1)}$, $\theta \in \mathbb{R}$, векторы x_1, x_N и параметр θ – известны.

Уравнение (1) в матричном представлении имеет вид:

$$\begin{bmatrix} D_1 & K_1 & & & & & & & & \\ & D_2 & K_2 & & & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & D_{N-2} & K_{N-2} & & & \\ & & & & & D_{N-1} & K_{N-1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{N-2} \\ E_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \\ x_N \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $D_l, K_l \in \mathfrak{R}^{n \times n}, E_l \in \mathfrak{R}^n, \quad l=1, \dots, N-1$.

Положим $N = 2^{k_{\max}} + 1$, где $k_{\max}$ задается исходя из вычислительных возможностей.

Уравнение (2) запишем в следующем виде:

$$D_l x_l + K_l x_{l+1} + E_l \theta = f_l, \quad l=1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Рассмотрим коэффициенты и свободные члены уравнения (3) при $l-1$ и l , записав их в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} D_{l-1}^{(0)} & K_{l-1}^{(0)} & 0 & E_{l-1}^{(0)} & f_{l-1}^{(0)} \\ 0 & D_l^{(0)} & K_l^{(0)} & E_l^{(0)} & f_l^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $D_l^{(0)} = D_l, K_l^{(0)} = K_l, E_l^{(0)} = E_l, f_l^{(0)} = f_l, \quad l=1, \dots, N-1$.

Применим для решения системы (1) метод ортогональной циклической редукции.

Метод ортогональной циклической редукции состоит из прямого и обратного хода.

Прямой ход метода заключается в последовательном применении ортогональных преобразований к системе (4), так что на каждом этапе преобразований исключаются блоки с нечетными индексами l .

Ортогональная матрица преобразований имеет вид:

$$Q_l^{(k-1)} = \begin{bmatrix} -D_l^{(k-1)} \bar{K}_{l-1}^{(k-1)} - \bar{K}_{l-1}^{(k-1)} & I \\ -D_l^{(k)} \bar{K}_{l-1}^{(k)} & I \end{bmatrix}, \quad k=1, \dots, k_{\max}, \quad l=2, \dots, \frac{N-1}{2^{k-1}}, \quad (5)$$

где $\bar{K} = K^{-1}$.

Применяя ортогональное преобразование (5) к (4), получим:

$$Q_l^{(k-1)} \begin{bmatrix} D_{l-1}^{(k-1)} & K_{l-1}^{(k-1)} & 0 & E_{l-1}^{(k-1)} & f_{l-1}^{(k-1)} \\ 0 & D_l^{(k-1)} & K_l^{(k-1)} & E_l^{(k-1)} & f_l^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_l^{(k)} & -I & U_l^{(k)} & W_l^{(k)} & r_l^{(k)} \\ D_{l/2}^{(k)} & 0 & K_{l/2}^{(k)} & E_{l/2}^{(k)} & f_{l/2}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

После последовательного применения преобразований $k_{\max}$ раз получим уравнение:

$$D_1^{(k_{\max})} x_0 + K_1^{(k_{\max})} x_N + E_1^{(k_{\max})} \theta = f_1^{(k_{\max})}. \quad (7)$$

Обратный ход заключается в вычислении неизвестных x_l по формулам:

$$x_m = V_l^k x_{m-p} + U_l^k x_{m+p} + W_l^k \theta + r_l^k, \quad k=k_{\max}, \dots, 1, \quad l=2, \dots, \frac{N-1}{2^{k-1}}, \quad (8)$$

где $p = 2^{k-1}, m = p \cdot (l-1) + 1$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} Y_l^{(k)} &= \{D_l^{(k)}, K_l^{(k)}, E_l^{(k)}, f_l^{(k)}\}, \quad k=0, \dots, k_{\max}, \quad l=1, \dots, N-1, \\ Z_l^{(k)} &= \{V_l^{(k)}, U_l^{(k)}, W_l^{(k)}, r_l^{(k)}\}, \quad k=1, \dots, k_{\max}, \quad l=2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (9)$$

приведем схемы вычислений, производящихся на прямом и обратном ходе метода в случае, когда $k_{\max} = 3$.

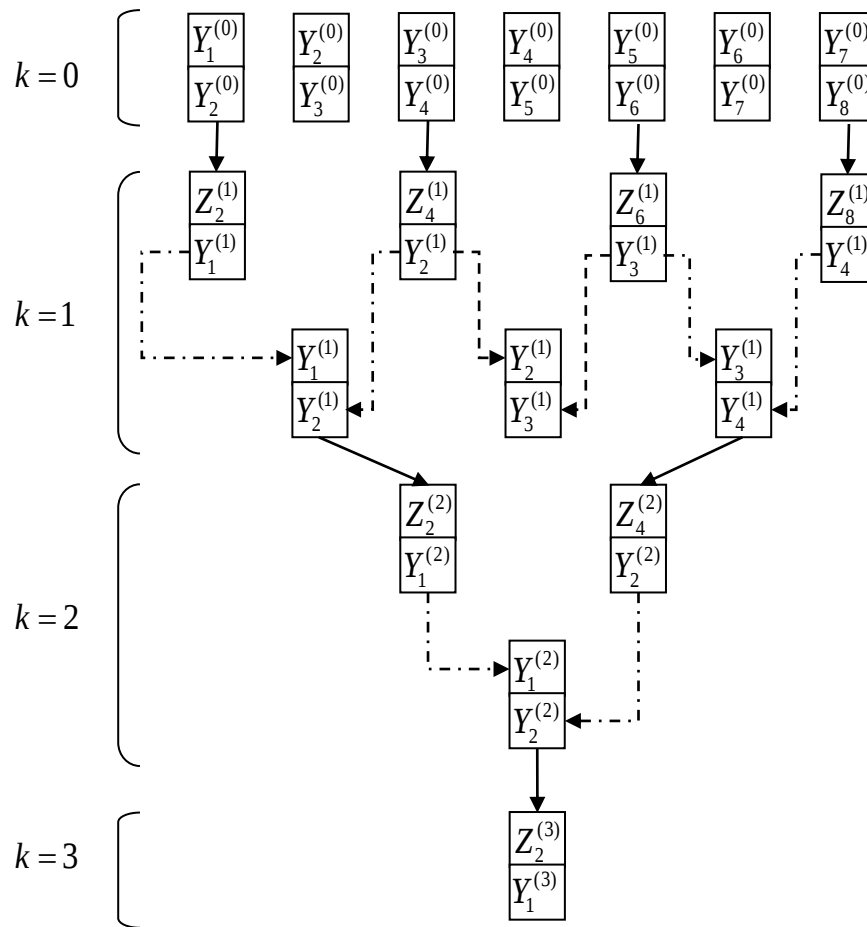


Рис. 1. Схема вычислений по прямому ходу метода.

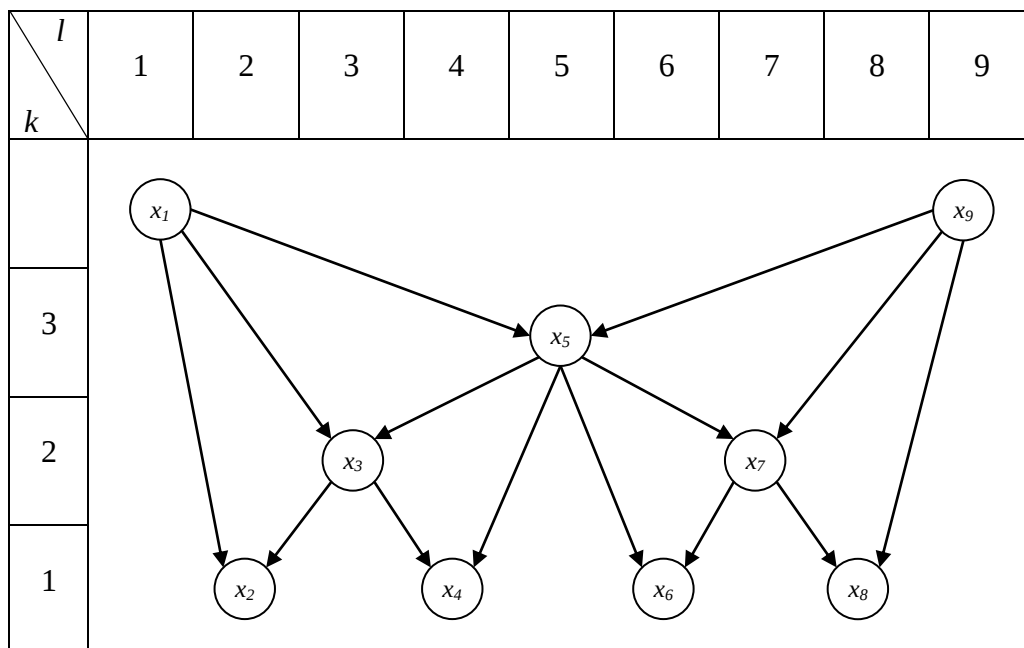


Рис. 2. Схема вычислений по обратному ходу метода.

Приведем примеры применения метода циклической ортогональной редукции для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Пример 1. Рассмотрим систему вида (2), где $k_{\max} = 2$, $N = 5$, $n = 1$. Зададим:

$$D_l = 1, K_l = 2, E_l = 1, f_l = 4, \quad l = \overline{1,4},$$

$$x_1 = 1, x_5 = 1, \theta = 1.$$

Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

В результате применения метода ортогональной циклической редукции получим решение:

$$s = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

Пример 2. Рассмотрим систему вида (2), где $k_{\max} = 2$, $N = 5$, $n = 2$. Зададим:

$$D_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, K_l = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, E_l = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, f_l = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad l = \overline{1,4},$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \theta = 3.$$

Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_4^1 \\ x_4^2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

В результате применения метода ортогональной циклической редукции получим решение:

$$s = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 3]^T$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhengfeng Li, Osborne M. R., Prvan T. Parameter estimation of ordinary differential equations // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2005. – № 25 – pp. 264-285.
2. Osborne M. R. Cyclic reduction, dichotomy, and the estimation of differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1997. – № 86 – pp. 271-286.

СИДОРЕНКО Д. С., МАМЕДОВА Т. Ф.,
ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ
ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ
НА ПРИМЕРЕ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ
РЕГУЛИРОВАНИЯ СМЕШАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Аннотация. В статье представлен обзор и дан сравнительный анализ классических численных методов оптимального управления динамическими системами. Разработан пример задачи управления для модифицированной жесткой модели Т. Мальтуса. Проведен анализ аналитического решения задачи с решениями, полученными различными численными методами.

Ключевые слова: оптимальное управление, численные методы, популяция.

SIDORENKO D. S., MAMEDOVA T. F.
PRACTICAL REALIZATION AND SOLUTION COMPARISON OF SOME
DIRECT NUMERICAL METHODS FOR OPTIMIZATION DYNAMIC PROBLEMS:
A STUDY OF SIMPLIFIED MODEL OF MIXED POPULATION CONTROL

Abstract. The article presents a review and a comparative analysis of classical numerical methods for dynamic system optimum control. The study includes an example of the management problem for T. Maltus modified rigid model. The authors present a comparative analysis of the problem analytical solution with its solutions obtained by various numerical methods.

Keywords: optimum control, numerical methods, population.

Прямые методы, предназначенные для итерационного решения задач оптимизации, отличаются тем, что дифференциальные уравнения, описывающие исследуемую задачу, всюду строго выполняются. Итерационный процесс, распространяющийся на условия оптимальности и граничные условия дифференциальных уравнений состояния, ведется в направлении минимизации функционала, выступающего критерием оптимальности. Его минимум вычисляется непосредственно, без использования сопряженной системы и свойства максимума функции Гамильтона.

При итерационном решении задачи в качестве начального приближения берется управление $u^0(t)$, и для него при соблюдении граничных условий интегрируется система уравнений состояния. Затем вычисляется функционал, выступающий критерием оптимальности.

Процедура, связанная с вычислением коррекций управления продолжается до тех пор, пока оптимальное решение не будет аппроксимировано достаточно точно. Для определения коррекций используются различные методы, о которых будет сказано ниже [1-3].

Метод градиента. Этот метод является наиболее известным прямым методом итерационного решения задач оптимизации. Также он известен как метод наискорейшего спуска или подъема. Его суть состоит в том, что коррекции $\Delta u^j(t)$ определяются таким образом, что функционал $J(u^j)$ минимизируется в направлении своего наибольшего изменения – направления градиента.

Итерационная формула для нахождения коррекций $\Delta u^j(t)$ искомого управления $u^{j+1}(t)$ имеет вид

$$\Delta u^j(t) = k^j G^{-1} \frac{\partial H}{\partial u^j(t)}, \quad k^j = \text{const} > 0,$$

где k^j – длина шага, G – постоянная матрица влияния (зачастую единичная), $H = H(t, x, u, \psi) = \psi^T f(t, x, u)$ – функция Гамильтона.

Достоинством градиентного метода является очень большая область сходимости, поэтому даже при очень плохих начальных приближениях $u^0(t)$ искомый минимум, как правило, находится без затруднений. С другой стороны, итерационный процесс может привести к соседнему минимуму, и тогда встает вопрос о выборе приближения $u^0(t)$ более близкого к оптимальному $u^*(t)$. Более того, метод обычно медленно сходится вблизи искомого минимума, поэтому к вопросу о выборе начального приближения все же стоит подходить основательно.

Extr-H-метод. Extr-H-метод представляет собой модификацию метода градиента, призванную улучшить его плохую сходимость в окрестности минимума J_{min} за счет того, что коррекция $\Delta u^j(t)$ выбирается не пропорционально градиенту, а вычисляется непосредственно из необходимого условия максимума функции Гамильтона H .

Здесь коррекции вычисляются по формуле

$$\Delta u^j(t) = u^{j*}(t) - u^j(t),$$

или

$$\Delta u^j(t) = k^j [u^{j*}(t) - u^j(t)], \quad k^j \leq 1,$$

если $\Delta u^j(t)$ принимает слишком большие значения ($u^{j*}(t)$ – аналитически найденное управление).

Определенная трудность в применении Extr-H-метода состоит в том, что часто не представляется возможным выразить аналитически управление $u^{j*}(t)$ и уже на этом этапе

приходится приступать к итерационному процессу. Именно этим можно объяснить тот факт, что метод используется относительно редко.

Метод сопряженных градиентов. При изучении градиентного метода было установлено, что направление градиента далеко не всегда является самым благоприятным направлением, чтобы за возможно малое число шагов вычислить минимальное значение функции или функционала. Более того, существуют направления поступательного движения, двигаясь по которым можно определить искомый минимум гораздо скорее. Этот факт и используется в методе сопряженных градиентов.

Поправка $\Delta u^j(t)$ здесь вычисляется как

$$\Delta u^j(t) = k^j s^j(t),$$

где k^j – величина шага, $s^j(t)$ – направление движения, складываемое из линейной комбинации градиента и предыдущего направления движения

$$s^j(t) = \pm[\gamma^j(t) + \beta^j s^{j-1}(t)],$$

причем знак плюс соответствует минимуму, знак минус – максимуму.

Метод сопряженных градиентов устраняет проблему медленной сходимости вблизи вычисляемого минимума J , не требуя аналитически выражать $u^{j*}(t)$ как в Extr-H-методе. Поэтому он является наиболее оптимальным из рассмотренных.

Метод Шатровского последовательного улучшения управлений. Наконец, метод Шатровского возвращает не оптимальное, а достаточно хорошее допустимое управление. Он используется для систем, в которых нужно одновременно оптимизировать некоторые параметры и управление, а также для систем с запаздыванием.

Идея метода состоит в поиске такой коррекции $\Delta u^j(t)$, которая минимизировала бы главную линейную часть $\delta J = (\text{grad } h(x^0, T), y(t))$ приращения функционала J (здесь $y(t)$ есть поправка по траектории фазовой координаты).

Упрощенное регулирование смешанной популяции. Рассмотрим хорошо известную модель Т. Мальтуса, описывающую динамику изолированной популяции:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t), \quad x(0) = x_0 > 0,$$

где $x(t)$ – численность популяции в момент времени t , α – показатель изменения ее численности, связанный с уровнями рождаемости и смертности (если $\alpha > 0$, то численность растет, иначе – убывает). Очевидно, что эта модель приводит к экспоненциальному росту населения и не применима в долгой перспективе. Однако в качестве жесткой модели ее можно использовать в расчетах на недолговременный период.

Теперь допустим, что у некоторых членов этой популяции может появиться признак, который выделит их в отдельную популяцию, динамика которой отлична от динамики первой. Тогда, заменяя x на x_1 , модель примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (\alpha - \beta)x_1(t), & x_1(0) &= x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2(t) &= \beta x_1(t), & x_2(0) &= x_{20} > 0,\end{aligned}$$

где $x_2(t)$ – численность малой популяции в момент времени t , β – показатель изменения численности этой популяции аналогичный α .

Можно конкретизировать данную задачу, считая, например, что $x_2(t)$ – численность членов популяции, состоящих в браке.

Допустим, что целью задачи является максимизация численности рассматриваемой популяций. Тогда можно обозначить критерий оптимальности данной задачи как

$$J = -(x_1(T) + x_2(T)) \rightarrow \min.$$

Управляющим параметром в задаче примем некоторую агрегированную величину, влияющую на интенсивности прироста обеих частей популяции. В конкретике это может быть, например, пропаганда европейской модели семьи, в которой велико число детей, живущих только с одним родителем, что является следствием большого числа разводов. Предположим также, что изменение $\dot{x}_2(t)$ чувствительнее, чем изменение $\dot{x}_1(t)$. Таким образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (\alpha - \beta)x_1(t) + \gamma_1 u(t), & x_1(0) &= x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2(t) &= \beta x_1(t) - \gamma_2 u^2(t), & x_2(0) &= x_{20} > 0,\end{aligned}$$

где γ_1, γ_2 – некоторые коэффициенты, вообще говоря, зависящие от текущей численности популяции. Но эти зависимости мы выяснять не будем.

Найдем для начала аналитическое решение задачи. Функция Гамильтона имеет вид:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi_1((\alpha - \beta)x_1 + \gamma_1 u) + \psi_2(\beta x_1 - \gamma_2 u^2).$$

Тогда оптимальное управление $u^*(t)$ вычисляется как

$$u^*(t) = \frac{\gamma_1 \psi_1}{2\gamma_2 \psi_2}.$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -(\alpha - \beta)\psi_1 - \beta\psi_2, & \psi_1(T) &= 1, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, & \psi_2(T) &= 1.\end{aligned}$$

Решая ее, получим

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta - \alpha e^{(\beta - \alpha)(T-t)}), \quad \psi_2(t) \equiv 1.$$

Таким образом:

$$u^*(t) = k(\beta - \alpha e^{(\beta-\alpha)(T-t)}), \quad k = \frac{\gamma_1}{2(\beta - \alpha)\gamma_2}.$$

Теперь перейдем к расчетам. Установим такие значения констант:

$$\alpha = -4 \cdot 10^{-3}, \quad \beta = -10^{-3}, \\ x_{10} = 1000, \quad x_{20} = 400, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad T = 1.$$

Подставляя эти значения в выражение для оптимального управления, получим

$$u^*(t) = \frac{4e^{3 \cdot 10^{-3}(1-t)} - 1}{6}.$$

Этому управлению отвечает значение функционала $J(1) = 1396,29$.

Заметим сразу, что на исследуемом интервале $[0;1]$ оптимальное управление $u^*(t)$ меняется очень слабо – функция монотонно убывает от $u^*(0) = 0.502$ до $u^*(T) = 0.5$. Основываясь на этом, зададим довольно «плохое» начальное приближение $u^0(t) = 10$.

Для численного интегрирования будем использовать хорошо известную схему Хойна для уравнений типа $y' = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + h * \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f(x_{i+1}, y_i + h * k_1),$$

имеющую второй порядок аппроксимации. Однако, основываясь на постановке задачи, имеет смысл запоминать номер итерации L^* , на которой уже не происходит изменение целой части функционала J . Для вычисления интегралов будем использовать формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$$

с оценкой остаточного члена

$$R(f) = \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Экспериментально выяснено, что достаточно хорошим значением длины шага является $k = 0.5$. Но, забегая вперед, стоит упомянуть, что при этом ее значении уже с помощью обычного метода градиента, требуемая точность (при $h = 0.01$ – до четвертого знака после запятой) достигается уже на пятой итерации (а целая часть функционала перестает изменяться на четвертой). Поэтому возьмем длину шага $k = 0.4$.

Для применения метода Шатровского было выбрано допустимое множество $U = [0.5; 2.5]$ и допустимое значение функционала $J_{don} = 1397$, причем из-за особенностей итерационного процесса функционал оценивался по абсолютному значению.

Результаты вычислений представлены в таблице (L – количество итераций, J^L – значение функционала J , $u^L(t)$ – значение найденного управления в момент времени t).

Используемый метод	L	L^*	J^L	$u^L(t)$					
				$t = 0$	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$	$t = 1.0$
Метод градиента	7	4	-1396.255	0.4986	0.499	0.4994	0.4998	0.5002	0.5006
Extr-Н-метод	3	3	-1396.255	0.498	0.4984	0.4988	0.4992	0.4996	0.5
Метод сопряженных градиентов	6	4	-1396.255	0.4981	0.4985	0.4989	0.4993	0.4997	0.5001
Метод Шатровского	3	-	-1396.342	0.8781	0.8785	0.8788	0.8792	0.8796	0.88

Полученные результаты полностью подтверждают теоретические рассуждения – Extr-Н-метод показал наилучшие результаты, метод сопряженных градиентов показал более быструю сходимость, нежели обычный метод градиента. Единственным явным несоответствием с аналитическим решением является то, что табличная функция $u^L(t)$ возрастает на выбранном интервале исследования, в отличие от убывающего управления $u^*(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хофер Э., Лундерштедт Р. Численные методы оптимизации / пер. с нем. Т. А. Летова; под ред. В. В. Семенова. – М.: Машиностроение, 1981. – 192 с.
2. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления: учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
3. Десяев Е. В., Мамедова Т. Ф. О построении управления для нелинейных динамических систем // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – № 1. – С. 154.

АНТОШКИНА С. А., РЯБОЧКИНА П. А.¹

**СТРУКТУРА И СПЕКТРАЛЬНО-ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
НАНОРАЗМЕРНЫХ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОРОШКОВ $\text{YbPO}_4\text{:Er}$**

Аннотация. В работе представлены результаты исследования фазового состава, морфологии, размеров и спектрально-люминесцентных свойств наноразмерных кристаллических порошков $\text{YbPO}_4\text{:Er}$ и $\text{YbPO}_4\cdot 0,8\text{:H}_2\text{OEr}$. Выявлены особенности люминесценции данных соединений и высказано предположение об их возможных причинах.

Ключевые слова: нанокристаллы, редкоземельный ион, рентгенофазовый анализ, спектроскопия диффузного отражения, люминесценция.

ANTOSHKINA S. A., RYABOCHKINA P. A.

**THE STRUCTURE AND SPECTRAL-LUMINESCENT PROPERTIES
OF NANOSIZED CRYSTALL POWDERS OF $\text{YbPO}_4\text{:ER}$**

Abstract. The paper presents the results of a study of phase composition, morphology, sizes and spectral-luminescent properties of nanosized crystal powders of $\text{YbPO}_4\text{:Er}$ и $\text{YbPO}_4\cdot 0,8\text{:H}_2\text{OEr}$. The luminescence features of these compounds are identified and their possible reasons are suggested.

Keywords: nanocrystals, rare-earth ion, X-ray diffraction analysis, diffuse reflection spectroscopy, luminescence.

¹ Авторы статьи выражают благодарность: Павлову А. М., к.ф.-м.н., научному сотруднику Колледжа королевы Марии Лондонского университета (QMUL) – за помощь в проведении исследований образцов методом ПЭМ; Мишкину В. П., младшему научному сотруднику кафедры общей физики института физики и химии МГУ им. Н. П. Огарёва – за помощь в проведении качественного элементного анализа образцов; Кяшкину В. М., к.ф.-м.н., доценту кафедры твердого тела института физики и химии МГУ им. Н. П. Огарёва – за помощь в проведении рентгенофазового анализа образцов; Хлучиной Н. А., инженеру кафедры органической химии института физики и химии МГУ им. Н. П. Огарёва – за помощь в проведении исследований методом ИК-спектроскопии; к.ф.-м.н. Ушакову С. Н., старшему научному сотруднику института общей физики им. А. М. Прохорова РАН – за консультации по вопросам интерпретации результатов экспериментов.

² Работа выполнена в рамках государственного задания 01 10 0210059 611 код проекта 2952.

В последнее время интерес исследователей привлекают наноразмерные кристаллические порошки, активированные редкоземельными (РЗ) ионами. Данный интерес обусловлен возможностью получения для них люминесценции в различных диапазонах длин волн путем варьирования типа РЗ иона и высокой фотостабильностью по сравнению с органическими люминофорами. Благодаря наличию люминесценции в видимом и ближнем ИК-диапазонах спектра, наноразмерные кристаллические частицы с РЗ-ионами представляют интерес для биомедицинских применений.

В связи с этим, представляется интересным исследование структуры, морфологии и спектрально-люминесцентных характеристик наноразмерных кристаллических порошков ортофосфатов и гидратов ортофосфатов, активированных РЗ ионами. Материалы данного типа, как правило, характеризуются монодисперсностью и низкой степенью агрегированности, что позволяет рассматривать их в качестве потенциальных кандидатов для применения в медицине и биологии.

В настоящей работе были исследованы наноразмерные кристаллические порошки ортофосфатов и гидратов ортофосфатов иттербия, активированные ионами Er^{3+} . Образцы были получены методом гидротермально-микроволнового синтеза [1] к.х.н. А. С. Ванецевым в Институте физики Тартуского университета (Эстония).

Исследования методом просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) были выполнены при помощи микроскопа JEM-2100 JEOL в Колледже королевы Марии Лондонского университета (QMUL).

Рентгенофазовый анализ образцов был выполнен с помощью дифрактометра Empyrean производства компании PANalytical B.V. ($\text{CuK}\alpha$ -излучение, $\lambda=1,5414 \text{ \AA}$) с гониометром вертикального типа и детектором PIXcel 3D. Дифракционные максимумы на рентгенограммах идентифицировали с использованием банка данных PDF 2 1911. Качественный элементный анализ порошков осуществлялся с помощью энергодисперсионной приставки к растровому электронному микроскопу QUANTA 200 I 3D.

Для регистрации ИК-спектров образцов в диапазоне $400\text{--}4000 \text{ cm}^{-1}$ использовался ИК-Фурье-спектрометр ИнфраЛюм, образцы для исследований готовились по стандартной методике – прессовались в таблетки с KBr.

Спектры диффузного отражения для образцов получены с помощью приставки к спектрофотометру Lambda 950 Perkin Elmer – 150 мм интегрирующей сферы. Спектры люминесценции зарегистрированы с помощью автоматизированной установки на базе монохроматора МДР-23. В качестве источника излучения использовались полупроводниковый лазерный диод с $\lambda_{\text{изл}} \approx 970 \text{ нм}$ и твердотельный лазер с $\lambda_{\text{изл}} \approx 532,8 \text{ нм}$. В качестве приемников излучения использовались фотоумножитель ФЭУ-100 и германиевый

фотодиод ФД-7Г. На рисунке 1 представлены результаты ПЭМ для порошков $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5 \text{ at. \%}$) (А) и $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5 \text{ at. \%}$).

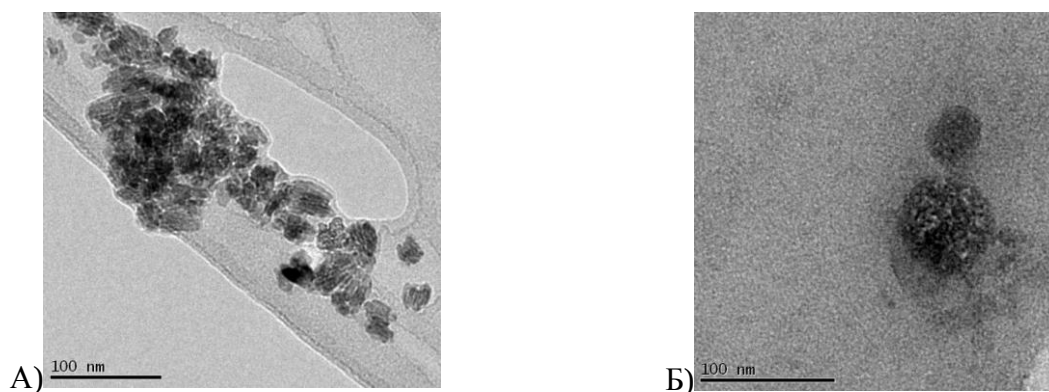


Рис. 1. Фотографии кристаллических порошков $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5 \text{ at. \%}$) (А) и $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5 \text{ at. \%}$) (Б), полученные при помощи ПЭМ.

Как видно из рисунка 1, образцы порошков ортофосфатов иттербия и гидратов ортофосфатов иттербия состоят из частиц с формой близкой к сферической с диаметром 30-50 нм. Стоит отметить, что в образце $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5 \text{ at. \%}$) присутствует значительное количество частиц меньшего размера. Образцы характеризуются монодисперсностью и низкой степенью агрегации.

Для уточнения фазового состава исследуемых порошков был выполнен рентгенофазовый анализ. Полученные дифрактограммы приведены на рисунке 2. Из сравнения дифрактограмм исследуемых образцов с данными базы PDF2 1911 [2 – 3] следует, что образец безводного ортофосфата соответствует фазе ортофосфата иттербия с тетрагональной структурой ксенотима, а образец гидрата ортофосфата – гексагональной рабдофанитоподобной фазе состава $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}$.

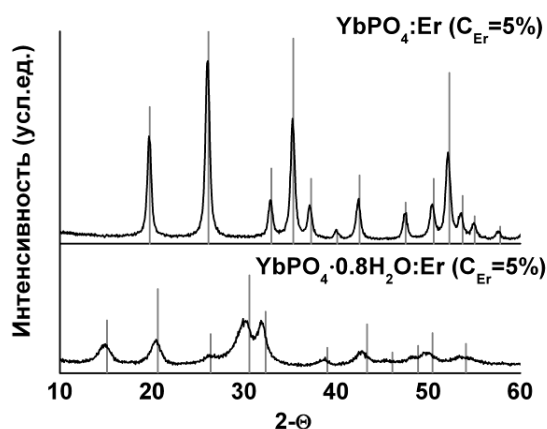


Рис. 2. Дифрактограммы кристаллических порошков $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5 \text{ at. \%}$) и $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5 \text{ at. \%}$).

Из результатов РФА с использованием формулы Шерера можно оценить значения средних размеров областей когерентного рассеяния (ОКР):

$$\beta = \frac{C\lambda}{\Lambda \cos \Theta}, \quad (1)$$

где β – полуширина линии, Λ – размер ОКР, λ – длина волны рентгеновского излучения, Θ – Брэгговский угол, $C=0.94$ – константа.

Размеры ОКР составили 20 ± 2 нм для $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат.) и 7 ± 1 нм для $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат.).

На рисунке 3 представлены спектры диффузного рассеяния образцов $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ и $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат. %), преобразованные в соответствие с функцией Кубелки-Мунка:

$$F(R_\infty) = \frac{(1 - R_\infty)^2}{2R_\infty} = \frac{k}{S}, \quad (2)$$

где k – коэффициент поглощения, S – коэффициент рассеяния, R_∞ – относительное диффузное отражение образца, отнесенное к непоглощающему стандарту MgO .

Из спектров идентифицированы полосы поглощения, обусловленные переходами с основного состояния $^4\text{I}_{15/2}$ на возбужденные мультиплеты $^4\text{I}_{13/2}$, $^4\text{I}_{11/2}$, $^4\text{I}_{9/2}$, $^4\text{F}_{9/2}$, $^4\text{S}_{3/2}$, $^2\text{H}_{11/2}$, $^4\text{F}_{7/2}$, $^4\text{F}_{5/2}$, $^4\text{F}_{3/2}$, $^2\text{H}_{9/2}$, $^4\text{G}_{11/2}$ ионов Er^{3+} , а также интенсивная полоса поглощения в области 960 нм, соответствующая переходу $^2\text{F}_{5/2} \rightarrow ^2\text{F}_{7/2}$ ионов Yb^{3+} .

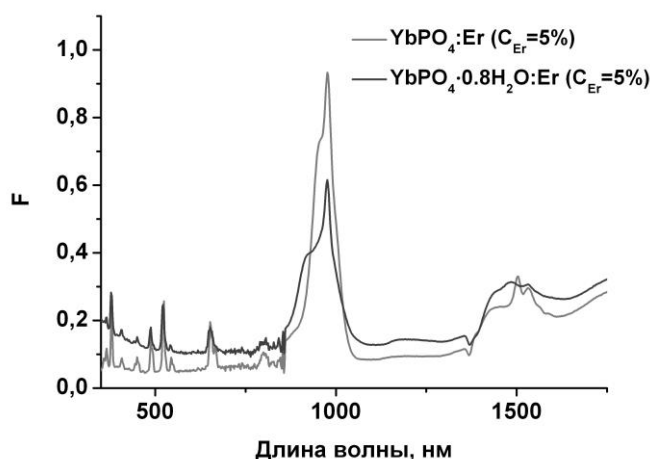


Рис. 3. Спектры отражения порошков $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ и $\text{YbPO}_4 \cdot 0.8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат. %).

В соответствии со схемой, приведенной на рисунке 4 А), ионы Er^{3+} характеризуются люминесценцией в видимой и ближней ИК областях спектра. Соактивация ионами Yb^{3+} позволяет получить эффективную апконверсионную люминесценцию. Схема, иллюстрирующая процессы переноса энергии от ионов Yb^{3+} к ионам Er^{3+} , приведена рисунке Б).

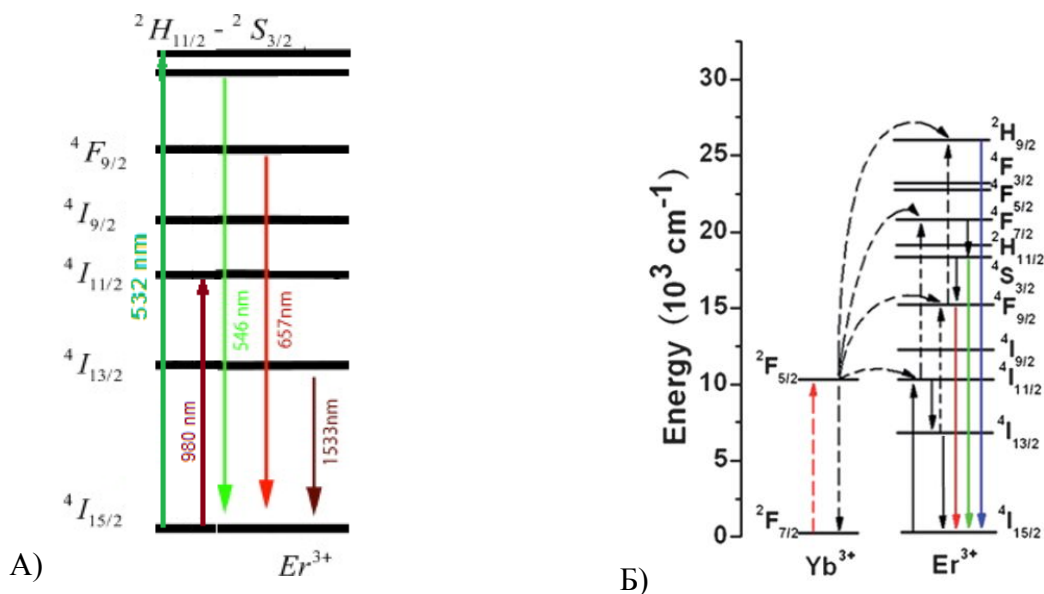


Рис. 4. А) наиболее важные излучательные переходы ионов Er^{3+} в видимой и ближней ИК областях; Б) перенос энергии между ионами Yb^{3+} и Er^{3+}

На рисунке 5 представлены полученные спектры люминесценции наноразмерных кристаллов $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат. %), $\text{YbPO}_4 \cdot 0,8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат. %), обусловленные переходами ионов Er^{3+} с уровней $^2\text{H}_{9/2}$, $^2\text{H}_{11/2}$, $^4\text{S}_{3/2}$, $^4\text{F}_{9/2}$, $^4\text{I}_{13/2}$ при возбуждении уровня $^2\text{F}_{5/2}$ ионов Yb^{3+} .

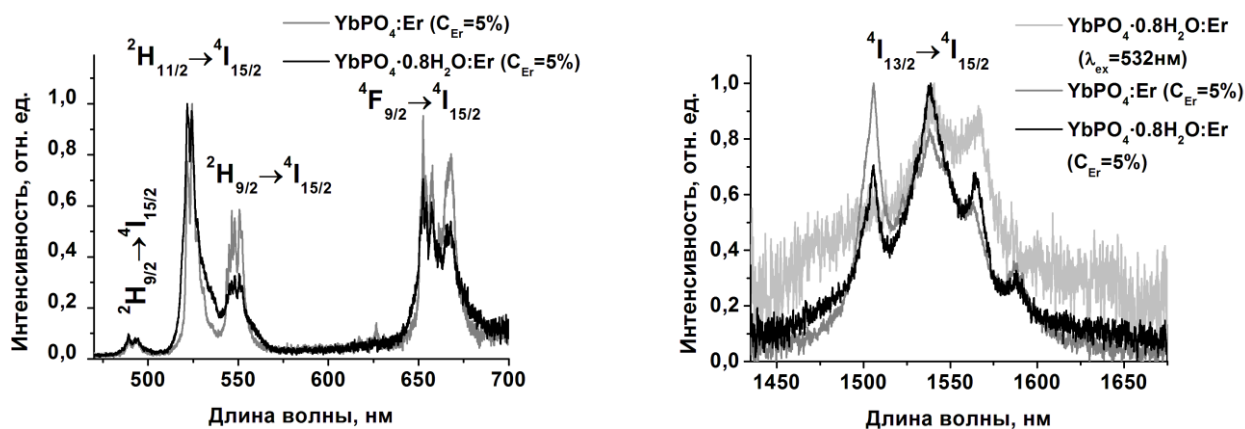


Рис. 5. Спектры люминесценции порошков $\text{YbPO}_4:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат. %) и $\text{YbPO}_4 \cdot 0,8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат. %).

Следует отметить, что при возбуждении уровня $^4\text{S}_{3/2}$ ($\lambda_{\text{ex}} = 532$ нм) ионов Er^{3+} для образца $\text{YbPO}_4 \cdot 0,8\text{H}_2\text{O}:\text{Er}$ ($C_{\text{Er}}=5$ ат. %) была зарегистрирована люминесценция только с уровня $^4\text{I}_{13/2}$, а характерная для объемных монокристаллов люминесценция с других уровней ионов Er^{3+} отсутствовала при данном способе возбуждения. Данный факт можно связать с тушением люминесценции ионов Er^{3+} на OH^- -группах, адсорбированных из атмосферы на поверхность частиц. С целью проверки данного предположения были зарегистрированы ИК-спектры исследуемых нанопорошков, представленные на рисунке 6.

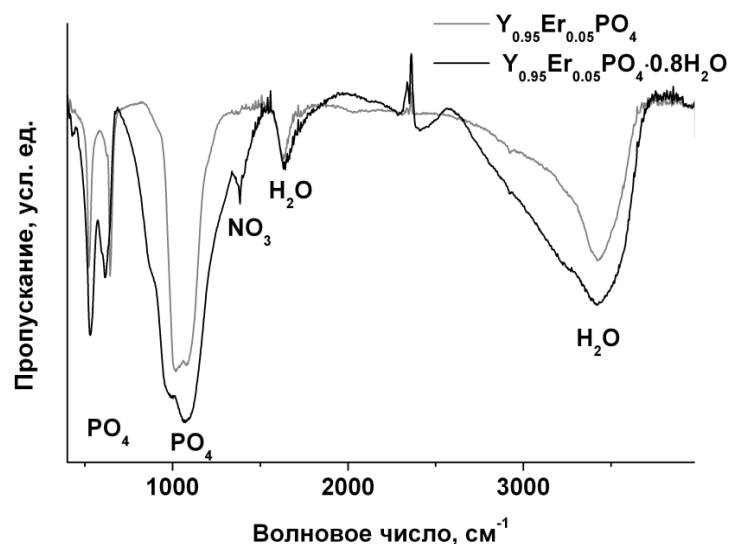


Рис. 6. ИК-спектры порошков $\text{YbPO}_4\text{:Er}$ и $\text{YbPO}_4\cdot 0,8\text{H}_2\text{O:Er}$

Путем сравнения полученных результатов с литературными данными [4] установлено, что полосы с максимумами 525 см^{-1} , 644 см^{-1} ($\text{YbPO}_4\text{:Er}$) и 536 см^{-1} , 617 см^{-1} ($\text{YbPO}_4\cdot 0,8\text{H}_2\text{O:Er}$), а также полоса с максимумом 1087 см^{-1} характеризуют поглощение фосфатных групп. Полосы с максимумами 3425 см^{-1} и 1635 см^{-1} обусловлены поглощением воды, адсорбированной на поверхности частиц, и гидроксогрупп, что подтверждает предположение о возможных причинах отсутствия люминесценции) ионов Er^{3+} при возбуждении уровня $^4\text{S}_{3/2}$ ($\lambda_{\text{ex}} = 532\text{ нм}$). Полоса с максимумом 1383 см^{-1} в образце $\text{YbPO}_4\cdot 0,8\text{H}_2\text{O:Er}$ связана с колебаниями NO_3 групп, присутствие которых обусловлено наличием в образце остатков продуктов синтеза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванецев А. С., Гайтко О. М., Чувашова И. Г. и др. Синтез нанодисперсных порошков $\text{YV}_{1-x}\text{P}_x\text{O}_4\text{:Eu}$ с использованием гидротермально-микроволновой обработки // Доклады академии наук. – 2011. – Т. 441, № 2. – С. 196–200.
2. Herrmann J., Eysel W. // Mineral.-Petrogr. Inst., Univ. Heidelberg, Germany., ICDD Grant-in-Aid – 1994.
3. Min W., Daimon K., Ota T., Matsubara T. et al. Synthesis and Thermal Reactions of Rhabdophane-(Yb or Lu) // Mater. Res. Bull. – 2000. – V. 35. – P. 2199.
4. Li C., Hou Z., Zhang C. et al. Controlled Synthesis of Ln^{3+} ($\text{Ln} = \text{Tb}, \text{Eu}, \text{Dy}$) and V^{5+} Ion-Doped YPO_4 Nano-Microstructures with Tunable Luminescent Colors // Chemical Materials. – 2009. – V. 21(19). – P. 4598–4607.

ПОЗДНЯКОВА О. Д., ШОРОХОВ А. В.

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В
ОДНОМЕРНОМ МАССИВЕ КОНТАКТОВ ДЖОЗЕФСОНА¹**

Аннотация. Теоретически изучена параметрическая генерация высокочастотного электромагнитного излучения массивами контактов Джозефсона. Вычислена поглощенная мощность внешнего высокочастотного излучения в одномерном массиве одинаковых синхронизированных последовательно соединенных контактов Джозефсона, найдена мощность параметрического усиления внешнего излучения в массиве контактов при разных параметрах нагрузки, изучено влияние параметров нагрузки на усиление. Мощность усиления в массиве из тысячи контактов составила несколько мкВт, что согласуется с экспериментальными данными.

Ключевые слова: массив контактов Джозефсона, параметрическое усиление.

POZDNYAKOVA O. D., SHOROKHOV A. V.

**PARAMETRIC AMPLIFICATION OF HIGH-FREQUENCY RADIATION
IN ONE-DIMENSIONAL JOSEPHSON JUNCTION ARRAY**

Abstract. The article presents a study of parametric generation of the high frequency electromagnetic radiation by Josephson junction arrays. The absorbed power of the external high-frequency radiation in one-dimensional array of identical synchronized series-connected Josephson junctions is calculated, the power of parametric amplification of external radiation is found for the junction array at various load parameters, the effect of load parameters on the gain is studied. The power gain for a thousand-contact array is a few microwatts. That is consistent with the experimental data.

Keywords: Josephson junctions array, parametric amplification.

Хорошо известно, что если ток через джозефсоновский контакт превышает некоторое критическое значение, обусловленное свойствами самого контакта, на контакте возникает разность потенциалов, и контакт начинает генерировать высокочастотное электромагнитное излучение [1]. Частота такого джозефсоновского излучения может достигать нескольких сотен ГГц.

¹ Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках госзадания, проект № 2.2665.2014.

В настоящее время актуальной проблемой является создание компактных когерентных источников ТГц излучения, поэтому повышение порога генерации в режиме нестационарного эффекта Джозефсона до ТГц частот представляет большой интерес. Одним из способов решения данной проблемы является параметрическая генерация, при которой собственное джозефсоновское излучение выступает в роли накачки [2-7]. Поскольку мощность излучения одного контакта мала для практического применения (порядка нескольких нВт), в последнее время все большую актуальность приобретает исследование массивов контактов Джозефсона, допускающих в настоящее время, благодаря успехам в технологии их изготовления, синхронизацию, необходимую для достижения когерентного излучения достаточной мощности, которая может достигать нескольких мкВт [8; 9]. В данной работе рассмотрен линейный массив контактов Джозефсона, связанных внешней нагрузкой и синхронизированных во внешнем высокочастотном электромагнитном поле, и исследованы возможности данной системы для генерации ТГц излучения.

Вблизи критической температуры для анализа высокочастотных явлений мы используем удобную резистивную модель [10]. Для некоторых типов джозефсоновских контактов (например, для точечных контактов) емкость контакта можно не учитывать из-за ее малости. Поэтому в дальнейшем мы пренебрегаем емкостью контакта. Заметим, что контакты с малой емкостью легче согласовывать с внешними электродинамическими системами СВЧ [11].

Параметрическое усиление внешнего ВЧ излучения одиночным контактом Джозефсона хорошо изучено теоретически и экспериментально, как было отмечено выше. Рассмотрим кратко особенности параметрической генерации одиночного контакта, необходимые в дальнейшем для понимания процессов генерации массивами таких контактов.

Согласно резистивной модели, при $T \approx T_c$ полный ток через джозефсоновский контакт можно представить в виде $I(t) = I_J + I_N = I_c \sin(\varphi) + V/R_J$, где $I_J = I_c \sin(\varphi)$ – джозефсоновский ток куперовских пар, I_c – критический ток, φ – разность фаз контактирующих сверхпроводников, I_N – нормальный ток электронов проводимости, $V = I_N R_J$ – напряжение на контакте, R_J – сопротивление контакта в нормальном состоянии [4]. Эквивалентная схема контакта представлена на рис. 1.

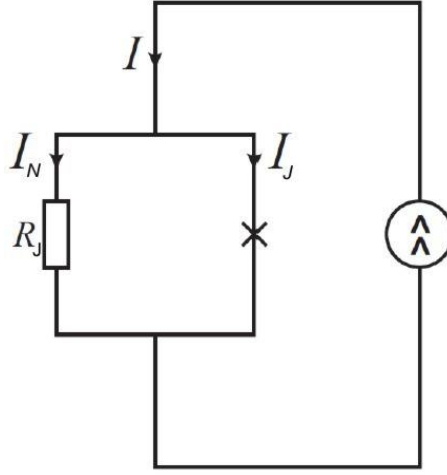


Рис. 1. Эквивалентная схема контакта Джозефсона без учета емкости.

Действие внешнего электромагнитного излучения частоты ω_1 приведет к появлению дополнительного переменного тока через контакт. Тогда полный ток $I(t) = I_{dc} + I_1 \cos(\omega_1 t)$, где I_{dc} – постоянный ток. Учитывая связь между напряжением на контакте и разностью фаз $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V(t)$, из резистивной модели получим уравнение для разности фаз:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} + \sin(\varphi) = i_{dc} + i_1 \cos(\Omega_1 \tau), \quad (1)$$

где $\tau = \omega_c t$, $\omega_c = \frac{2e}{\hbar} V_c$ – характерная частота контакта, $V_c = I_c R_J$ – характерное напряжение,

$i_{dc} = \frac{I_{dc}}{I_c}$, $i_1 = \frac{I_1}{I_c}$, $\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_c}$. Уравнение (1) является уравнением нелинейного передемпфированного маятника. Решение данного уравнения приводит к хорошо известному результату: на статической ВАХ контакта появляются ступеньки, называемые ступеньками Шапиро [12] (см. рис. 2).

Вычислим среднюю поглощенную мощность внешнего высокочастотного излучения на его частоте по формуле:

$$\frac{P}{I_1 V_c} = \langle \dot{\varphi} \cos(\Omega_1 \tau) \rangle_\tau. \quad (2)$$

Численный анализ показал, что вблизи первой ступеньки Шапиро возможно появление области отрицательной мощности, то есть контакт будет генерировать ВЧ излучение (Рис. 2).

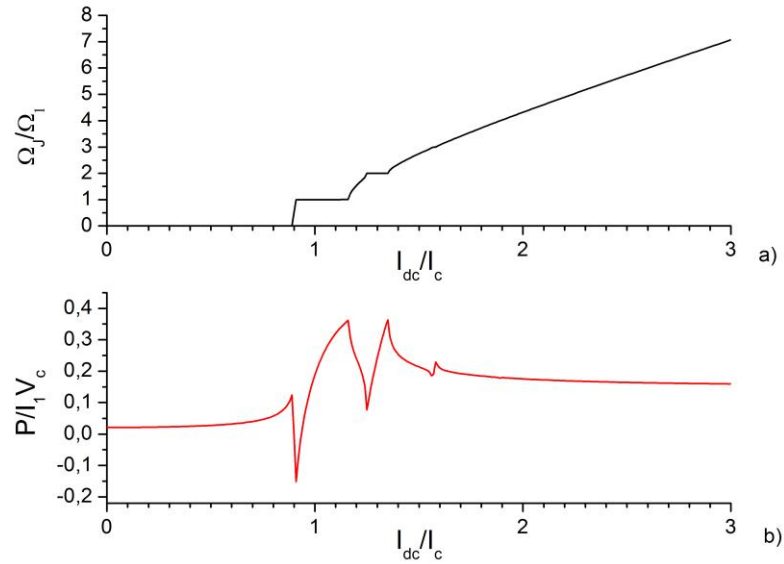


Рис. 2. ВАХ джозефсоновского контакта (a) и график зависимости поглощенной мощности от постоянного тока (b) для частоты $\omega_1 = 0.4\omega_c$ и амплитуды переменного тока $I_1 = 0.3I_c$

Рассмотрим теперь массив контактов Джозефсона. Связь между контактами в массиве осуществляется за счет нагрузки. В общем случае нагрузка характеризуется активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C . Существуют различные способы соединения джозефсоновских контактов в массив и различные механизмы, и модели их синхронизации [13-16]. В данной работе мы изучаем одномерный массив последовательно соединенных контактов Джозефсона.

Рассмотрим массив N одинаковых контактов, связанных с помощью внешней нагрузки, как показано на Рис. 3.

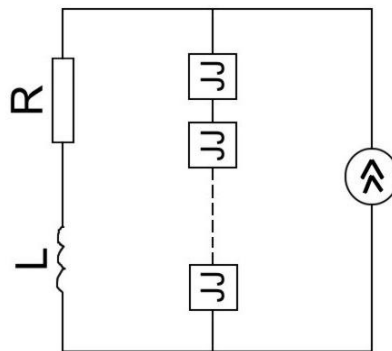


Рис. 3. Массив N одинаковых контактов, связанных с помощью внешней LR-нагрузки.

Эквивалентная схема каждого джозефсоновского контакта (JJ) представлена на Рис. 1.

Поместим массив контактов во внешнее высокочастотное излучение. Зафиксируем полный ток в виде $I(t) = I_{dc} + I_1 \cos(\omega_1 t)$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\hbar}{2eR_J} \frac{d\varphi_k}{dt} + I_c \sin(\varphi) + I_{Load} = I_{dc} + I_1 \cos(\omega_1 t), & k = 1, 2, \dots, N \\ \frac{\hbar}{2e} \sum_{k=1}^N \frac{d\varphi_k}{dt} = L \frac{dI_{Load}}{dt} + RI_{Load} \end{cases}, \quad (3)$$

где I_{Load} – ток через нагрузку, где L и R – индуктивность и активное сопротивление нагрузки.

Рассмотрим случай, когда разность фаз на всех контактах одинакова $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = \varphi$, т. е. контакты синхронизированы. Стабильность такого состояния может быть достигнута в случае LR-нагрузки, а наличие емкости нагрузки может привести к нарушению синхронизированного состояния контактов в массиве [17; 18], поэтому мы рассматриваем нагрузку без емкости. В случае синхронизации система уравнений (3) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin(\varphi) + i_{Load} = i_{dc} + i_1 \cos(\Omega_1 \tau) \\ N \frac{d\varphi}{d\tau} = l \frac{di_{Load}}{d\tau} + r i_{Load} \end{cases}, \quad (4)$$

где $i_{Load} = \frac{I_{Load}}{I_c}$, $l = \frac{L}{L_c}$, $L_c = \frac{\hbar}{2eI_c}$, $r = \frac{R}{R_J}$. Следует отметить, что импеданс нагрузки должен быть согласован с сопротивлением массива ($|Z_{Load}| \approx NR_J$) [16].

Численно решив систему уравнений (4), среднюю поглощенную мощность для массива контактов можно найти по формуле (2). ВАХ и графики зависимости поглощенной мощности от постоянного тока для тысячи контактов представлены на Рис. 4.

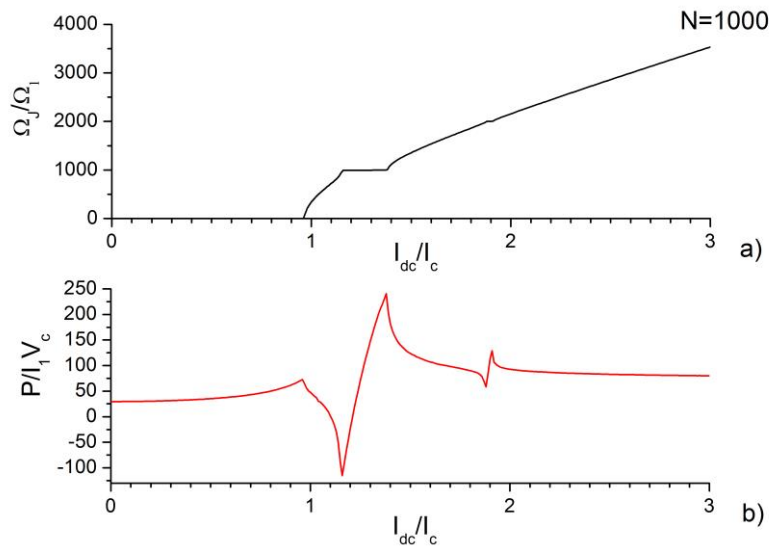


Рис. 4. ВАХ (a) и график зависимости поглощенной мощности от постоянного тока (b) для массива из тысячи контактов, связанных внешней LR-нагрузкой. $\omega_1 = 0.4\omega_c$, $I_1 = 0.3I_c$, $L = 10L_c$, $R = 10^3 R_J$

Из Рис. 2 и 4 видно, что при увеличении числа контактов поглощенная мощность (усиление) значительно увеличивается.

Численный анализ показал, что чем больше индуктивность нагрузки, тем меньше усиление. В связи с этим рассмотрим случай, когда $L = 0$ (Рис. 5).

Сравнивая графики на Рис. 4 и 6, можно заметить, что поглощенная мощность (усиление) для массива контактов больше в случае чисто активной нагрузки.

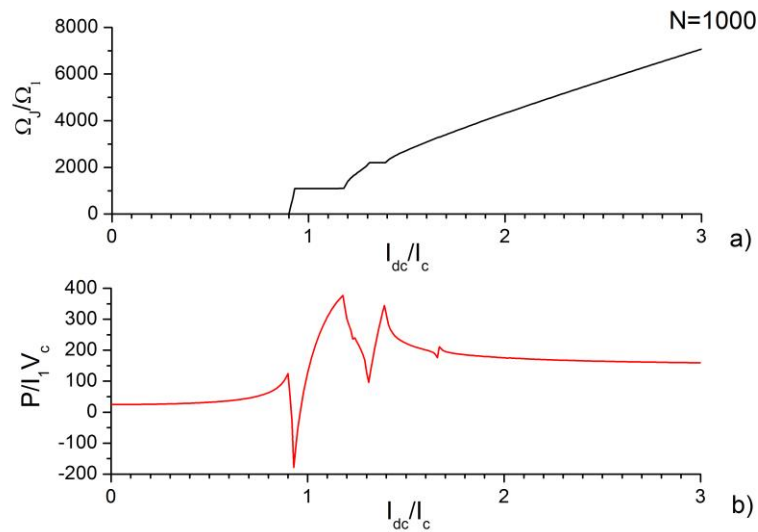


Рис. 5. ВАХ (а) и график зависимости поглощенной мощности от постоянного тока (б) для массива из тысячи контактов, связанных внешней R-нагрузкой. $\omega_1 = 0.4\omega_c$, $I_1 = 0.3I_c$, $L = 0$, $R = 10^4 R_j$

Мы рассмотрели одиночный контакт Джозефсона и массив из нескольких таких контактов, связанных внешней нагрузкой и синхронизированных во внешнем высокочастотном электромагнитном поле. Нами теоретически изучено влияние параметров внешней нагрузки на поглощение (усиление) внешнего высокочастотного излучения массивом синхронизированных джозефсоновских контактов, а также численно найдены области усиления для массива при различных параметрах изучаемой системы. Численный анализ показал следующие результаты: (1) с увеличением индуктивности нагрузки уменьшаются область усиления и выигрыш в усилении от увеличения числа контактов в массиве; (2) с увеличением активного сопротивления нагрузки при чисто активной нагрузке увеличиваются области усиления и поглощения, при этом области усиления для массива нескольких контактов совпадают с областями усиления для одиночного контакта; (3) усиление существенно возрастает при увеличении числа контактов Джозефсона в массиве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Josephson B. D. Possible new effects in superconductive tunneling // Phys. Lett. – 1962. – V. 1. – P. 251.
2. Выставкин А. Н., Губанков В. Н., Кузьмин Л. С. и др. Об особенностях параметрической регенерации в точечных сверхпроводящих контактах // Радиотехника и электроника. – 1971. – В. 15. – С. 896.
3. Auracher F. and Van Duzer T. rf impedance of superconducting weak links // J. Appl. Phys. – 1973. – V. 44. – No. 2. – P. 848.
4. Выставкин А. Н., Губанков В. Н., Лещенко Г. Ф. и др. О параметрическом преобразовании и усилении с использованием сверхпроводящих точечных контактов // Радиотехника и электроника. – 1970. – В. 15. – С. 2404.
5. Kanter H. and Vernon F. L. High-Frequency Response of Josephson Point Contacts // J. Appl. Phys. – 1972. – V. 43. – P. 3174.
6. Kanter H. and Silver A. H. Self-Pumped Josephson Parametric Amplification // Appl. Phys. Lett. – 1971. – V. 19. – P. 515.
7. Kanter H. A novel parametric negative resistance effect in Josephson junctions // Appl. Phys. Lett. – 1973. – V. 23. – P. 350.
8. Fengbin Song, Franz Muller, Thomas Scheller, Alexei Semenov, Ming He et al. Compact tunable sub-terahertz oscillators based on Josephson junctions // Appl. Phys. Lett. – 2011. – V. 98. – P. 142506.
9. Masashi Tachiki, Krsto Ivanovic, Kazuo Kadowaki, and Tomio Koyama. Emission of terahertz electromagnetic waves from intrinsic Josephson junction arrays embedded in resonance LCR circuits // Phys. Rev. B. – 2011. – V. 83. – P. 014508.
10. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И. Эффект Джозефсона в точечных сверхпроводящих контактах // Письма в ЖЭТФ. – 1969. – Т. 9. – С. 47.
11. Лихарев К. К., Семенов В. К. Электродинамические свойства сверхпроводящих точечных контактов // Радиотехника и электроника. – 1971. – В. 11. – С. 2167.
12. Shapiro S. Josephson currents in superconducting tunneling: the effect of microwaves and other observations // Phys. Rev. Lett. – 1963. – V. 11. – P. 80.
13. Darula M., Doderer T. and Beuven S. Millimetre and sub-mm wavelength radiation sources based on discrete Josephson junction arrays // Supercond. Sci. Technol. – 1999. – V. 12. – P. R1-R25.
14. Filatrella G., Pedersen N. F., and Wiesenfeld K. High-Q cavity-induced synchronization in oscillator arrays // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 61. – P. 2513.

15. Juan A. Acebron, L. L. Bonilla, Conrad J. Perez Vicente, Felix Ritort, and Renato Spigler. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // Rev. Mod. Phys. – 2005. – V. 77. – P. 138.
16. Jain A. K., Likharev K. K., Lukens J. E., and Sauvageau J. E. Mutual phase-locking in Josephson junction arrays // Phys. Rep. – 1984. – V. 109. – P. 309.
17. Hadley P. and Beasley M. R. Dynamical states and stability of linear arrays of Josephson junctions // Appl. Phys. Lett. – 1987. – V. 50. – P. 621.
18. Hadley P., Beasley M. R., and Wiesenfeld K. Phase locking of Josephson-junction series arrays // Phys. Rev. B. – 1988. – V. 38. – P. 8712.

ПАНЬКИН Н. А., НОСОВ Ю. С., ОКИН М. А.

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПОЛУЧЕННЫХ
ХОЛОДНЫМ ПРЕССОВАНИЕМ ПОРОШКОВ ТИТАНА И АЛЮМИНИЯ**

Аннотация. Методами металлографии, электронной растровой микроскопии и рентгеновской дифрактометрии исследованы титан-алюминиевые композиционные материалы. Они были получены одноосным прессованием при комнатной температуре (нагрузка 520 МПа) смеси порошков титана и алюминия и последующим твердофазным спеканием на воздухе при температуре 600 °С.

Ключевые слова: композиционный материал, прессование, спекание, пористость, твердость, фазовый состав, структура.

PANKIN N. A., NOSOV YU. S., OKIN M. A.

**A STUDY OF COMPOSITE MATERIALS PRODUCED
BY COLD PRESSING OF TITANIUM AND ALUMINUM POWDERS**

Abstract. The methods of metallography, raster electron microscopy and x-ray diffractometry are applied to investigate the titanium-aluminium composite materials. They were received by uniaxial pressing at room temperature (load 520 MPa) of mixture of titanium and aluminum powders and their subsequent solid-phase sintering in the air at the temperature of 600 °C.

Keywords: composite material, pressing, sintering, porosity, hardness, phase composition, structure.

В настоящее время широко исследуются и применяются многокомпонентные (многоэлементные, многофазные, конструкционные и т.д.) материалы [1-4]. Среди них можно назвать и покрытия на основе нитридов титана, которые обладают определенным набором уникальных физико-механических, химических и эксплуатационных свойств [1; 4-7]. Измельчение структурных элементов TiN-покрытий достигается добавлением в его состав легирующих элементов (Cu, C, Si, Al) [1; 4; 5]. Для осаждения таких пленок требуется генерировать многокомпонентную плазму однородного в пространстве и стабильного во времени элементного и зарядового состава. Для ее получения, в настоящее время, разработано несколько методов [1; 4; 6]: 1. Одновременное распыление двух или нескольких различных по составу мишеней (катодов). 2. Использование мозаичных (составных) катодов. 3. Использование композиционных катодов, содержащих все необходимые компоненты в нужном соотношении. Для их получения широко используются методы порошковой металлургии, и, в частности, формирование и спекание смеси порошков – исходных компонентов распыляемого катода [7].

В настоящей работе представлено исследование микроструктуры и некоторых свойств композиционных материалов, полученных холодным прессованием смеси порошков титана и алюминия и последующим твердофазным спеканием. Выбор данных элементов обусловлен широким их применением при получении покрытий с уникальными эксплуатационными характеристиками (высокая жаро-, износо- и коррозионная стойкость, большая твердость и т.д.) [1; 8-10].

(Ti, Al)-композиты получали холодным прессованием (при 20°C) порошков титана (марка ПТМ-1) и алюминия (марка ПА-4) с последующим твердофазным спеканием на воздухе при температуре 600°C. Время спекания составляло 2 часа. В качестве исходных материалов использовали порошки титана (ПТМ-1, получен гидридно-кальциевым восстановлением титана) и алюминия (ПА-4, получен пульверизацией расплавленного алюминия). Содержание алюминия в (Ti, Al)-композитах изменялось от 5 до 50 вес.% (от 8.5 до 64 ат.%). Для получения однородной смеси порошков титана и алюминия проводили перемешивание на смесителе МР-6. Формование порошков в образцы цилиндрической формы диаметром 12.6 мм и высотой 3 мм проводили на машине для механических испытаний Shimadzu AG-X100kN. Рабочая нагрузка составляла 65кН (520 МПа) и поддерживалась в течение 30 мин. Скорость движения верхнего пуансона – 0.6 мм/мин.

Определение фазового состава проводили на рентгеновском дифрактометре ДРОН-6 в медном фильтрованном излучении. Исследования микроструктуры проводили с помощью металлографического (OLYMPUS GX-71) и сканирующего электронного (Phenom proX) микроскопов. Плотность определяли гидростатическим взвешиванием в дистиллированной воде.

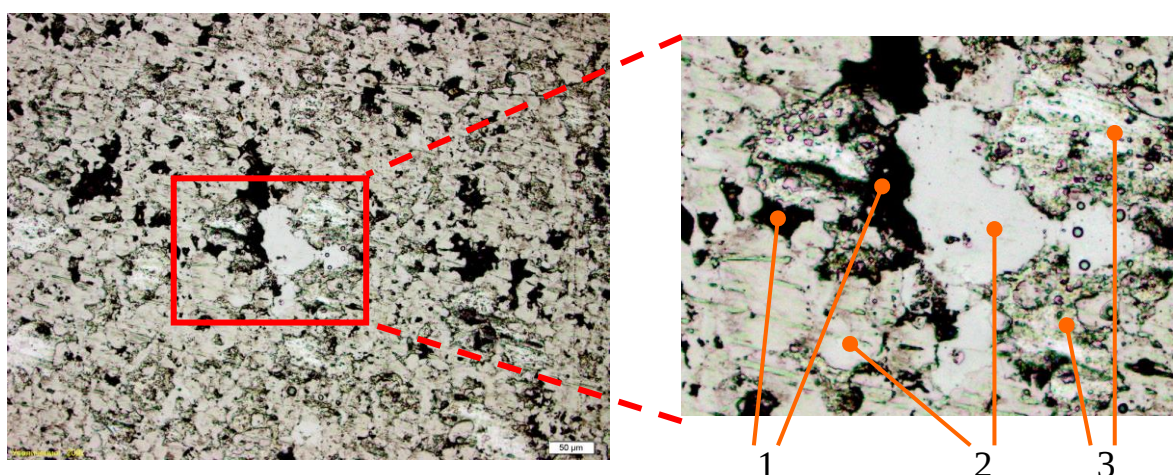


Рис. 1. Микроструктура шлифа (Ti, Al)-композита (25 вес.% Al; 1 – поры, 2 – зерна титана; 3 – зерна алюминия).

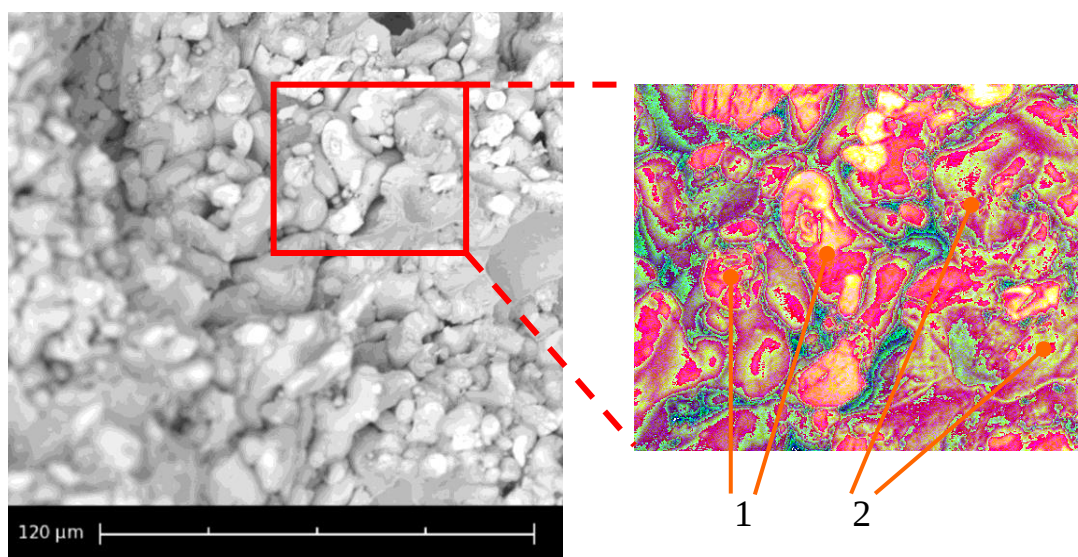


Рис. 2. Электронно-микроскопическое изображение излома (Ti, Al)-композита (25 вес.% Al; 1 – зерна титана; 2 – зерна алюминия).

Анализ микроструктуры (Ti, Al)-композита (шлифа – рис. 1 и излома – рис. 2) показал, что исследуемый композиционный материал помимо зерен титана и алюминия содержит некоторое количество пор. При этом титановые частицы при прессовании частично деформируются. Алюминий, вследствие большей пластичности, при прессовании заполняет пространство между зернами титана.

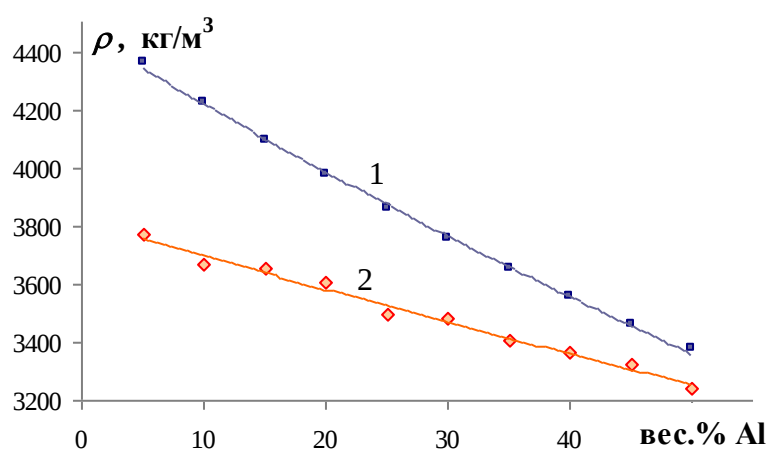


Рис. 3. Плотность (Ti, Al)-композитов (1 – теория; 2 – эксперимент).

На наличие большого количества пор показывают результаты измерения плотности композиционных материалов (рис. 3). Она оказывается меньше соответствующих значений для безпористых образцов (теоретические результаты). Увеличение содержания алюминия приводит к снижению пористости.

Содержание алюминия также оказывает влияние на твердость прессованных образцов. Результаты измерения твердости по Бринеллю представлены на рис. 4. По мере увеличения

концентрации алюминия от 5 до 50 вес.% наблюдается уменьшение твердости от 147 НВ (твердость массивного титана 130-160 НВ) до 55 НВ (твердость алюминия 20-40 НВ).

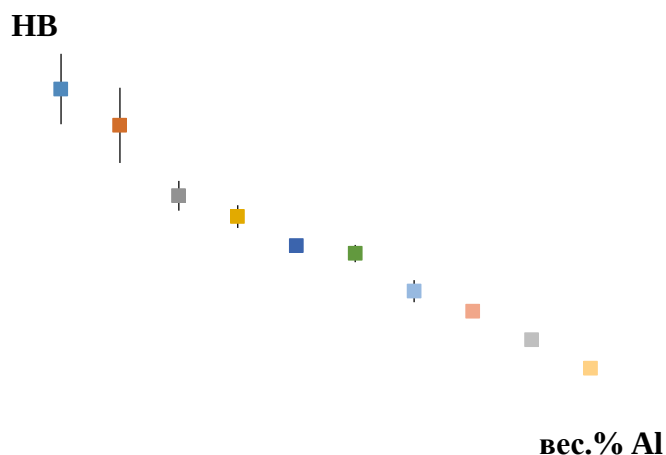


Рис. 4. Твердость по Бриннелю (Ti, Al)-композитов.

Рентгенографические исследования указывают на присутствие в (Ti,Al)-композите трех фаз (рис. 5): α -титана (брегговский угол $2\Theta \approx 35.1, 38.4, 40.2$; пространственная группа – $P6_3/mmc$), алюминия ($2\Theta \approx 38.5, 44.7$; пространственная группа – $Fm\bar{3}m$) и интерметаллического соединения $TiAl_3$ ($2\Theta \approx 39.2$; пространственная группа – $I4/mmm$).

Согласно литературным данным зарождение фазы $TiAl_3$ происходит путем диффузии атомов алюминия в решетку частиц титана [6; 11]. При этом, в области контакта Ti-Al с меньшим содержанием алюминия возможно образование фазы $TiAl$ (находящегося в равновесии с фазой $TiAl_3$), а на заключительной стадии – Ti_3Al [11]. Нами присутствие линий соответствующих фазам $TiAl$ и Ti_3Al не обнаружено.

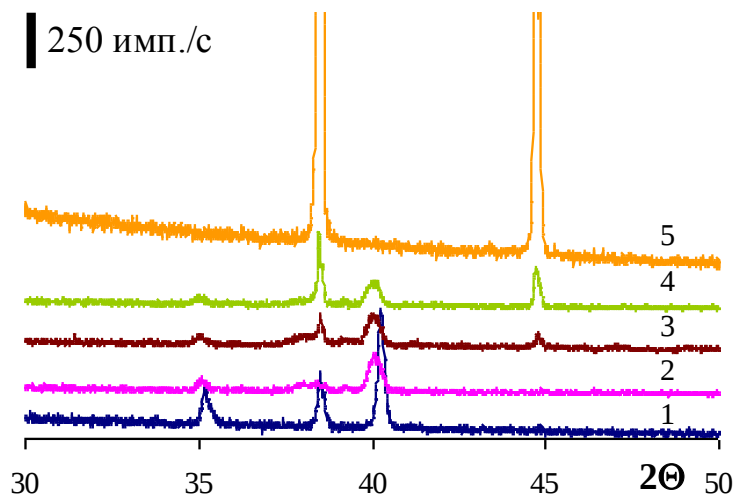


Рис. 5. Участки рентгеновской дифракционной картины от порошков и (Ti, Al)-композитов (1 – ПТМ-1; 2 – 5 вес.%; 3 – 25 вес.%; 4 – 50 вес.%; 5 – ПА-4).

Отмечается смещение линий α -титана и алюминия в (Ti, Al)-композите относительно аналогичных рефлексов для порошков ПТМ-1 и ПА-4. Для титана сдвиг происходит в область

малых 2Θ , а для алюминия в область больших брегговских углов. Это указывает на наличие макронапряжений различного знака в зернах титана и алюминия. При этом изменение межплоскостного расстояния для алюминия меньше чем у титана. Данный факт является следствием отжига и рекристаллизационных процессов, происходящих в зернах алюминия при спекании.

Основные выводы можно сформулировать следующим образом:

1. (Ti, Al)-композит состоит из частиц титана, пространство между которыми заполнено алюминием и поровым объемом. Содержание алюминия оказывает влияние на плотность, твердость и пористость прессованных образцов, значения которых уменьшаются при увеличении концентрации алюминия.

2. В (Ti,Al)-композите обнаружено присутствие трех фаз: α -титана, алюминия и интерметаллоида $TiAl_3$, полученный вследствие диффузии атомов алюминия в решетку частиц титана. Анализ положения линий α -титана и алюминия указывает на наличие макронапряжений различного знака и величины в зернах титана и алюминия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Погребняк А. Д., Шпак А. П., Азаренков Н. А. и др. Структура и свойства твердых и сверхтвердых нанокompозитных покрытий // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179. – № 1. – С.35-64.
2. Погожев Ю. С., Левашов Е. А., Кудряшов А. Е. и др. Композиционные СВС-материалы на основе карбида и никелида титана, легированные тугоплавким нанокompонентом // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2012. – № 2. – С. 24-32.
3. Прибытков Г. А., Коростелева Е. Н., Гурских А. В. и др. Структурообразование при спекании порошковых смесей Ti-Cu // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2011. – № 4. – С. 16-20.
4. Федотов А. Ф., Амосов А. П., Ермошкин А. А. Состав, структура и свойства СВС-прессованных катодов системы Ti-C-Al-Si и полученных из них вакуумно-дуговых покрытий // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2013. – № 2. – С. 29-36.
5. Коротаев А. Д., Мошков В. Ю., Овчинников С. В. Многокомпонентные твердые и сверхтвердые субмикро- и нанокompозитные покрытия на основе нитридов титана и железа // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10. – № 3. – С. 39-52.
6. Амосов А. П., Латухин Е. И., Федотов А. Ф. и др. Получение многокомпонентных СВС-прессованных катодов на основе тугоплавких соединений титана для нанесения

- вакуумно-дуговых покрытий // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2011. – № 1. – С. 46-51.
7. Либенсон Г. А., Лопатин В. Ю., Комарницкий Г. В. Процессы порошковой металлургии. – Т.2. Формирование и спекание. – М., 2002. – 540 с.
 8. Белоус В. А., Васильев В. В., Лучанинов А. А. Твердые покрытия Ti-Al-N, осажденные из фильтрованной вакуумно-дуговой плазмы // Физическая инженерия поверхности. – 2009. – Т. 7. – № 3. – С. 216-222.
 9. Каменева А. Л. Модель структурных зон покрытий из TiN, TiAlN, формируемых электродуговым испарением металла в активной газовой среде // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2012. – № 1. – С. 52-57.
 10. Аникин В. Н., Блинков И. В., Волхонский А. О. Ионно-плазменные покрытия Ti-Al-N на режущем инструменте, работающем в условиях постоянных и знакопеременных нагрузок // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2009. – № 1. – С.44-52.
 11. Кокорин В. Н. Прессование деталей и заготовок с использованием механических смесей с различным фазовым состоянием. – Ульяновск, 2009. – 341 с.

ЗЮЗИН А. М., БАКУЛИН М. А., РАДАЙКИН В. В., САБАЕВ С. Н., ЯНЦЕН Н. В.
ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СТЕПЕНИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СПИНОВ В
ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛЕНКАХ

Аннотация. Обнаружено резкое различие в поведении температурных зависимостей спектров спин-волнового резонанса двухслойных пленок с различными параметрами слоев закрепления. Проведенный расчет подтвердил, что эффект исчезновения и последующего появления спин-волновых мод в определенном интервале температур связан с уменьшением степени закрепления из-за сближения полей однородного резонанса в слоях возбуждения и закрепления спиновых колебаний.

Ключевые слова: спин-волновой резонанс, двухслойная пленка.

ZYUZIN A. M., BAKULIN M. A., RADAYKIN V. V., SABAIEV S. N., YANTSEN N. V.
TEMPERATURE DEPENDENCE OF THE CONSOLIDATION DEGREE
OF THE SPINS IN BILAYER FILMS

Abstract. The authors found a sharp difference in the behavior of the temperature dependence of the spectra of spin wave resonance two-layer films with different layer settings fixing. The calculation confirmed that the effect of the disappearance and the subsequent appearance of spin-wave modes in a certain interval of temperatures is due to the decrease of the degree of consolidation due to the convergence of fields homogeneous resonance in layers of excitation and consolidation of spin fluctuations.

Keywords: spin-wave resonance, thin bilayer film.

Исследования спиновой динамики в многослойных пленочных структурах ферритов гранатов приобретают в последнее время особый интерес, связанный с перспективами развития спинтроники [1, 2]. В настоящей работе исследовано влияние температуры на степень закрепления спинов в двухслойных пленках и характеристики спектров спин-волнового резонанса (СВР).

Эксперименты проводились на двухслойных монокристаллических пленках ферритов-гранатов, полученных методом жидкофазной эпитаксии. Состав и параметры пленок при комнатной температуре приведены в таблице I. Толщина каждого из слоев d определялась на их однослойных аналогах интерференционным методом. Пленки обладали различными значениями намагниченности M , параметра затухания Гильберта α и эффективного поля одноосной анизотропии $H_k^{eff} = H_k^u - 4\pi M$ в слоях, здесь H_k^u - поле одноосной магнитной анизотропии. H_k^{eff} определялось по значениям полей

однородного H_{0i} резонанса при перпендикулярной и параллельной ориентациях постоянного магнитного поля относительно плоскости пленки. Намагниченность насыщения определялась по интенсивности и ширине линии поглощения нулевой моды соответствующего слоя, а также линий ферромагнитного резонанса (ФМР) однослойного аналога, измеренных при соответствующих температурах [3]. Регистрацию спектров СВР производили на ЭПР-спектрометре X-диапазона EMX Plus (Bruker) в интервале температур $20 - 290^{\circ}\text{C}$, на частоте СВЧ поля $f = 9.34\text{GGz}$.

Таблица 1. Состав и параметры пленок.

образ ец	№ слоя	Состав	d , μm	$4\pi M$, Gs	α	H_k^{eff} , Oe	$\gamma, 10^7$ $\text{Oe}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
1	1	$\text{Y}_{2.98}\text{Sm}_{0.02}\text{Fe}_5\text{O}_{12}$	0.41	1740	0.003	-1715	1.76
	2	$\text{Sm}_{1.2}\text{Lu}_{1.8}\text{Fe}_5\text{O}_{12}$	1.4	1760	0.12	790	1.76
2	1	$\text{Y}_{2.98}\text{Sm}_{0.02}\text{Fe}_5\text{O}_{12}$	0.4	1740	0.003	-1715	1.76
	2	$\text{Sm}_{0.45}\text{Er}_{2.55}\text{Fe}_5\text{O}_{12}$	2.5	1330	0.2	36	1.38

Известно, что на степень закрепления спинов существенное влияние оказывают ряд физических факторов, таких как разность полей однородного резонанса слоя возбуждения и слоя закрепления, параметр затухания, толщина, намагниченность, константа обмена [4-6].

Как показали проведённые эксперименты температурные зависимости числа возбуждаемых спин-волновых (СВ) мод в образцах №1 и №2 существенно различаются. На рис. 1. а, б приведены температурные зависимости числа мод и их резонансных полей при перпендикулярной ориентации внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ относительно плоскости пленки. В образце №1 по мере увеличения температуры в интервале $20^{\circ}\text{C} < T < 175^{\circ}\text{C}$ количество СВ-мод остается неизменным, а затем, начиная с температуры $\sim 175^{\circ}\text{C}$ монотонно уменьшаться. Трансформация спектра СВР в образце №2 при возрастании температуры носит существенно иной характер, имея ярко выраженную особенность в интервале температур $(100 - 250^{\circ}\text{C})$. Видно, что в этом интервале происходит сначала уменьшение, а затем возрастание числа СВ-мод. Вблизи точки Кюри ($T_C = 283^{\circ}\text{C}$) СВ-моды перестают возбуждаться в обоих образцах.

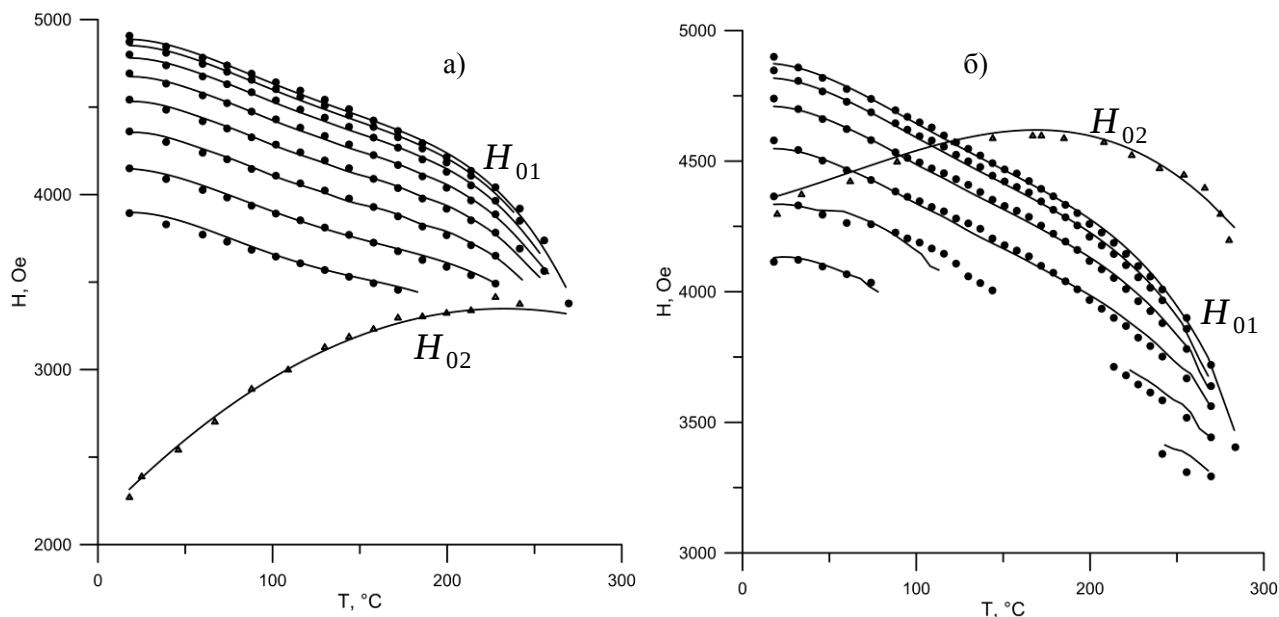


Рис. 1. Температурные зависимости числа возбуждаемых СВ-мод и их резонансных полей при перпендикулярной ориентации **H** относительно плоскости пленки: а) для образца № 1, б) для образца №2, значки – экспериментальные данные, линии – расчёт.

При параллельной ориентации (рис. 2 а, б) поведение спектров СВР с увеличением температуры носит иной характер. Как для одного, так и другого образцов количество возбуждаемых СВ-мод, с возрастанием температуры, вплоть до $\sim 230^{\circ}\text{C}$, не изменяется.

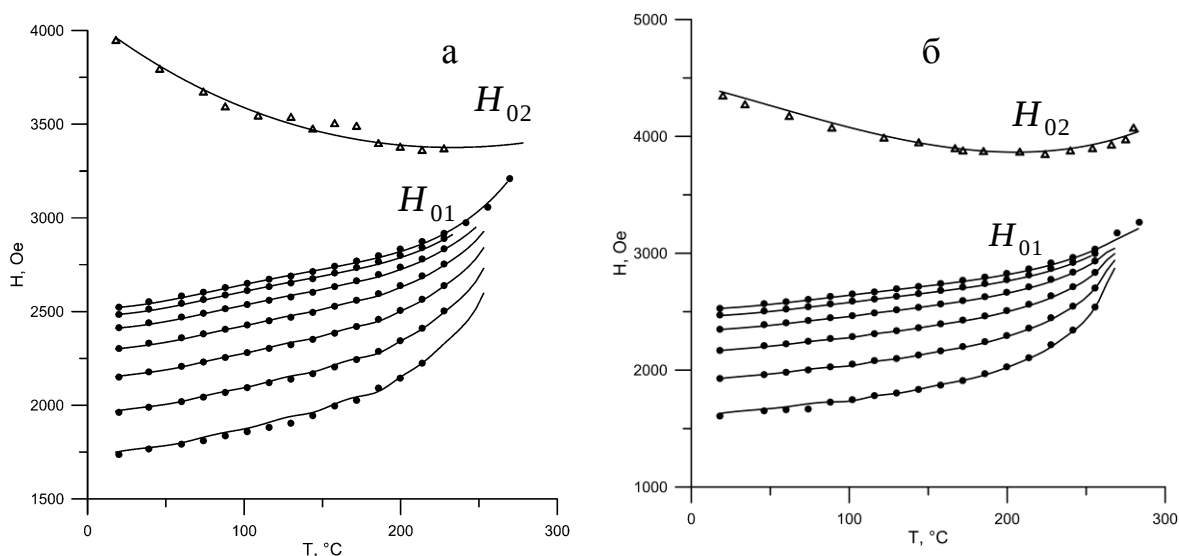


Рис. 2. Температурные зависимости числа возбуждаемых СВ-мод и их резонансных полей при параллельной ориентации **H** относительно плоскости пленки: а) для образца № 1, б) для образца №2, значки – экспериментальные данные, линии – расчёт.

Лишь вблизи точки Кюри происходит резкое уменьшение интенсивности пиков

поглощения одновременно всех СВ-мод и они перестают наблюдаться в спектре. Видно, что при параллельной ориентации, отсутствует та особенность, которая наблюдалась в образце №2 при перпендикулярной ориентации.

Поскольку температурные зависимости константы обменного взаимодействия A и намагниченности M имеют монотонный характер [6], наблюдаемые зависимости числа возбуждаемых СВ-мод, а, следовательно, и соответствующие зависимости степени закрепления спинов можно объяснить особенностями температурных зависимостей разности полей однородного резонанса в слоях исследуемых двухслойных пленок. Это обусловлено тем, что данный параметр как показано в [4] существенным образом влияет на степень закрепления спинов, а, следовательно, и на число возбуждаемых СВ-мод.

Большее число наблюдаемых мод в образце №1 при перпендикулярной ориентации внешнего магнитного поля относительно плоскости пленки связано с большей разностью $H_{01} - H_{02} \sim 2700 \text{ Oe}$, а, следовательно, с большей степенью закрепления спинов (в образце №2 $H_{01} - H_{02} \sim 900 \text{ Oe}$). С увеличением температуры, как видно из рис. 1а разность полей однородного резонанса в слоях $|H_{01} - H_{02}|$ в образце №1 монотонно уменьшается. В образце №2, $|H_{01} - H_{02}|$ также сначала уменьшается, а затем, начиная с температуры 160°C вновь начинает возрастать. Следовательно, происходит увеличение степени закрепления спинов и в спектре вновь начинают возбуждаться моды более высокого порядка.

Из рис. 1-2 видно, что проявляется четкая зависимость: с увеличением разности полей однородного резонанса, увеличивается число возбуждаемых СВ-мод. Причем эта зависимость проявляется как в случае, когда слой закрепления находится в состоянии реактивной среды $H_{01} < H_{02}$ так и дисперсивной $H_{01} > H_{02}$ [5].

Нами был проведен расчёт спектров СВР, возбуждаемых в двухслойных пленках. Движение намагниченности $\mathbf{M}$ в магнитной пленке при наличии затухания в спиновой системе описывали уравнением Ландау-Лифшица с релаксационным членом в форме Гильберта

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) + \frac{\alpha}{M} \left(\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) \quad (1)$$

где γ – гиромагнитное отношение. Эффективное магнитное поле $\mathbf{H}_{eff}$ определялось выражением:

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_0 - \tilde{N}^{eff} \mathbf{M} + \frac{A}{M} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial z^2} + \mathbf{h} \exp(i\omega t) \quad (2)$$

где $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{h}$ ($\mathbf{h} \perp \mathbf{H}_0, \mathbf{h} \ll \mathbf{H}_0$) – внешнее постоянное и высокочастотное поля, $\tilde{N}^{eff}$ – тензор эффективных размагничивающих факторов, A – константа обменного взаимодействия. Начало координат помещали на одной из поверхностей пленки, ось Z совпадала с нормалью к пленке. При расчетах использовались обменные граничные условия на межслойной и свободных поверхностях пленки [7].

Для случая малых колебаний $m \ll M_0$, $\mathbf{M}(z, t) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(z) \exp(i\omega t)$ из (1) получим линеаризованное уравнение движения намагниченности

$$\begin{aligned} i \frac{\omega}{\gamma} \mathbf{m} + \mathbf{m} \times (\mathbf{H}_{0z} - \tilde{N} \mathbf{M}_0) + (\tilde{N}^{eff} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{M}_0 - \\ - \frac{2A}{M_0^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial z^2} \times \mathbf{M}_0 \right) - i \frac{\alpha \omega}{\gamma M_0} (\mathbf{M}_0 \times \mathbf{m}) = -\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h} \end{aligned} \quad (3)$$

где вектор $\mathbf{H}_{0z}$ – проекция вектора $\mathbf{H}_0$ на ось z .

Для двухслойной плёнки необходимо найти решения уравнения движения намагниченности (3) записанного для каждого из слоев и обменных граничных условий на свободных и межслойной границах двухслойной плёнки. Это позволяет найти усредненное по толщине плёнки значение переменной намагниченности, а, следовательно, и определить высокочастотную восприимчивость χ [8-10].

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \frac{1}{d_1 + d_2} \left(\int_{-d_1}^0 \mathbf{m}_1(z) dz + \int_{0_1}^{d_2} \mathbf{m}_2(z) dz \right) = \hat{\chi} \mathbf{h}, \quad (4)$$

где $\hat{\chi}$ – тензор высокочастотной восприимчивости пленки, d_1 и d_2 толщины слоев.

Мощность высокочастотного поля (P) поглощаемая плёнкой определяется мнимой частью высокочастотной восприимчивости $\hat{\chi} = \hat{\chi}' - i\hat{\chi}''$. Если принять, что линейно-поляризованное поле $\mathbf{h}$ направлено вдоль оси X , то мощность P , а, следовательно, и амплитуда пиков поглощения $I \sim P$, будут определяться компонентой χ''_{xx} ($I \sim P \sim \chi''_{xx}$) [11]. При расчете спектра СВР использовались экспериментальные значения A , M , γ и α для соответствующего значения температуры [6].

На рис. 1 и 2 представлены расчётные зависимости резонансных полей СВ-мод (сплошные линии). Видно, что расчётные результаты хорошо согласуются с

экспериментом. На рис. 3 представлены расчетные и экспериментальные зависимости I от температуры, которые качественно согласуются между собой. Видно, что резкое уменьшение рассчитанных значений интенсивности пиков СВ-мод для образца №2 при перпендикулярной ориентации происходит примерно в том же интервале температур, в котором происходит уменьшение числа возбуждаемых СВ-мод.

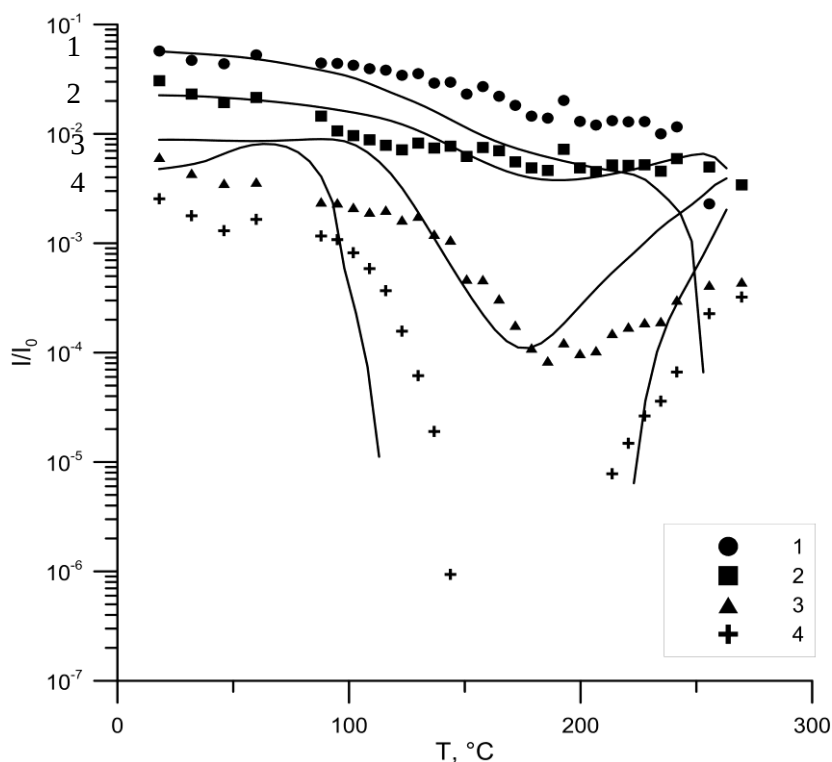


Рис. 3. Температурная зависимость относительной интенсивности (I/I_0) пиков 1-4-й СВ-мод при перпендикулярной ориентации для образца №2, значки – экспериментальные данные (цифры номера мод), линии – расчёт.

Таким образом, в настоящей работе показано, что особенности температурных зависимостей спектров СВР обусловлены вариациями степени закрепления спинов. Величина последней в исследованных пленках, кроме других факторов, определяется в большей степени разностью полей однородного резонанса в слоях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kajiwaru Y., Harii K., Takahashi S. et al. // Nature. – 2010. – V. 464. – pp. 262-266.
2. Uchida K., Xiao J., Adachi H. et al. // Nature Materials. – 2010. – V. 9. – pp. 894-897.
3. Зюзин А. М., Радайкин В. В., Ваньков В. Н. // Письма в журнал технической физики. – 1991. – Т. 17. № 23. – С. 65-69.
4. Зюзин А. М., Бакулин М. А., Радайкин В. В. и др. // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2010. – Т. 74. № 10. – С. 1491-1493.

5. Зюзин А. М., Сабаев С. Н., Куляпин А. В. // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45. Вып. 12. – С. 2208-2214.
6. Зюзин А. М., Бажанов А. Г. // Письма в ЖЭТФ. – 1996. – Т. 63. Вып. 7. – С. 528-532.
7. Kajiwara Y., Harii K., Takahashi S. et al. // Nature. – 2010. – V. 464. – pp. 262-266.
8. Uchida K., Xiao J., Adachi H. et al. // Nature Materials. – 2010. – V. 9. – pp. 894-897.
9. Зюзин А. М., Радайкин В. В., Ваньков В. Н. // Письма в журнал технической физики. – 1991. – Т. 17. № 23. – С. 65-69.
10. Зюзин А. М., Бакулин М. А., Радайкин В. В. и др. // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2010. – Т. 74. № 10. – С. 1491-1493.
11. Зюзин А. М., Сабаев С. Н., Куляпин А. В. // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45. Вып. 12. – С. 2208-2214.
12. Зюзин А. М., Бажанов А. Г. // Письма в ЖЭТФ. – 1996. – Т. 63. Вып. 7. – С. 528-532.
13. Зюзин А. М., Бажанов А. Г. // ЖЭТФ. – 1997. – Т. 111. Вып. 5. – С. 1667-1673.
14. Зюзин А. М., Бакулин М. А., Зюзин Д. А. и др. // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81. Вып. 6. – С. 63-67.
15. Василевская Т. М., Семенцов Д. И. // Физика твердого тела. – 2007. – Т. 49. Вып. 10. – С. 1824-1830.
16. Саланский Н. М., Ерухимов М. Ш. Физические свойства и применение магнитных пленок. – Новосибирск: Наука, 1975. – 224 с.
17. Зюзин А. М., Ваньков В. Н. // Физика твердого тела. – 1990. – Т. 32. №7. – С. 2015-2019.

**ГОРБУНОВ Д. С., МИШКИН В. П., НИЩЕВ К. Н.,
НОВОПОЛЬЦЕВ М. И., УСКОВА Е. Н.**

**ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МНОГОСЛОЙНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ
ПОКРЫТИЙ НА КРЕМНИИ МЕТОДАМИ РЭМ И СЗМ**

Аннотация. Методом химического травления, травления фокусированным ионным пучком, растровой электронной микроскопии и сканирующей зондовой микроскопии определена структура и элементный состав многослойных металлических покрытий, используемых в качестве переходного омического интерфейса в контактной системе структур мощных силовых полупроводниковых приборов. Исследуемые металлические покрытия наносились на поверхность кремниевых структур по технологии магнетронного напыления. Полученные результаты демонстрируют эффективность совместного применения методов химического и ионного травления, РЭМ и СЗМ для исследования структуры и элементного состава многослойных металлических покрытий на кремнии.

Ключевые слова: силовые полупроводниковые приборы, межэлементные соединения, структура «кремний на молибдене», многослойные металлические покрытия, растровая электронная микроскопия, сканирующая зондовая микроскопия.

**GORBUNOV D. S., MISHKIN V. P., NISHCHEV K. N.,
NOVOPOLTSEV M. I., USKOVA E. N.**

**A STUDY OF THE STRUCTURE OF MULTILAYER METALLIC
COATINGS ON SILICON BY SEM AND AFM**

Abstract. The structure and elemental composition of the multilayer metallic coatings used as a transition of the ohmic contact interface system structures of large power semiconductor devices have been identified by chemical etching, etching by focused ion beam, scanning electron microscopy, scanning probe microscopy. The metal coatings were deposited on the surface of the silicon structures by the magnetron sputtering technique. The results demonstrate the efficiency of the combined application of chemical and ion etching, SEM and AFM to study the structure and elemental composition of multilayer metal coatings on silicon.

Keywords: power semiconductor devices, interconnections, the structure "silicon-on-molybdenum", multilayer metallic coatings, scanning electron microscopy, scanning probe microscopy.

Основные параметры силовых полупроводниковых приборов (СПП) и их надежность в значительной степени определяются технологией межэлементных соединений и сборки в корпус электрически активных функциональных элементов. Межэлементные соединения в

СПП должны обладать необходимым сочетанием свойств: минимальными электрическими и тепловыми сопротивлениями, низкой индуктивностью, способностью быстро отводить возникающие в полупроводниковых структурах потери мощности без заметной разницы температур на полупроводниковом элементе и поверхности корпуса, обеспечивать механическую прочность приборов в широком диапазоне температур и циклических нагрузках мощности. Обычно применяемые для соединения элементов СПП технологии (пайка мягкими припоями, сплавление высокотемпературными припоями, технология прижимных контактов) уже не удовлетворяют постоянно растущим требованиям к техническим параметрам и надежности мощных СПП. Поэтому в настоящее время весьма актуален поиск новых способов соединения элементов в структурах СПП.

В качестве одной из наиболее перспективных рассматривается технология низкотемпературного соединения (Low-Temperature Joint Technique – LTJT) с использованием спеченных мелкодисперсных частиц серебра. Высокие значения электропроводности и теплопроводности серебра, обеспечивают повышение тепловых и электрических характеристик приборов, а сравнительно низкие температуры спекания обеспечивает структурам СПП необходимую механическую прочность и высокую надежность. Процесс LTJT представляет собой технологический способ получения структур «кремний на молибдене» (КНМ) – соединения кремниевой структуры, содержащей p-n-переходы, с молибденовым термокомпенсатором посредством спекания (sintering – синтеринг) с применением специальных серебрясодержащих паст, при воздействии температуры и давления [1-3]. Структура КНМ является основным активным элементом, определяющим выходные электрические и тепловые параметры СПП. Термокомпенсаторы служат для отвода тепловых потерь от кремниевой структуры. Их температурный коэффициент расширения должен быть близким к коэффициенту кремния во всем диапазоне температурных изменений, имеющих место при производстве и последующей эксплуатации СПП.

Одним из ключевых элементов технологии низкотемпературного соединения с использованием серебрясодержащих паст является металлизация соединяемых поверхностей кремниевых структур и молибденовых термокомпенсаторов (МТ). Процесс формирования металлизации не должен ухудшать характеристики кремниевых кристаллов СПП. Технологический процесс металлизации контактных поверхностей кремниевых пластин и молибденовых термокомпенсаторов обычно состоит из следующих операций:

- очистка поверхности кремниевых пластин (КП) и молибденовых термокомпенсаторов (МТ);
- нанесение слоев металлизации на КП и МТ;

- вжигание напыленных слоев металлизации;
- контроль качества металлизации.

Процесс нанесения тонких слоев заданной толщины и состава является наиболее важной операцией при создании многослойной металлизации КП и металлизации серебром МТ. Качество металлизации зависит от подготовки поверхностей, на которые наносится слой металлов, а также от метода нанесения металлических слоев.

В настоящей работе представлены результаты исследования структуры и элементного состава многослойной металлизации кремниевой структуры, предназначенной для низкотемпературного спекания с молибденовым компенсатором. Для последовательного нанесения тонких металлических слоев на кремниевую подложку использовалась технология магнетронного напыления. Исследования структуры и элементного состава многослойной металлизации кремниевой структуры проводились нами на растровом электронном микроскопе с системой фокусированного ионного пучка Quanta 200 i 3D FEI и сканирующем зондовом микроскопе SPM 9600 SHIMADZU.

На рис. 1 и 2 представлены типичные изображения внешней поверхности многослойной металлизации кремниевой структуры, полученные методами РЭМ и СЗМ.

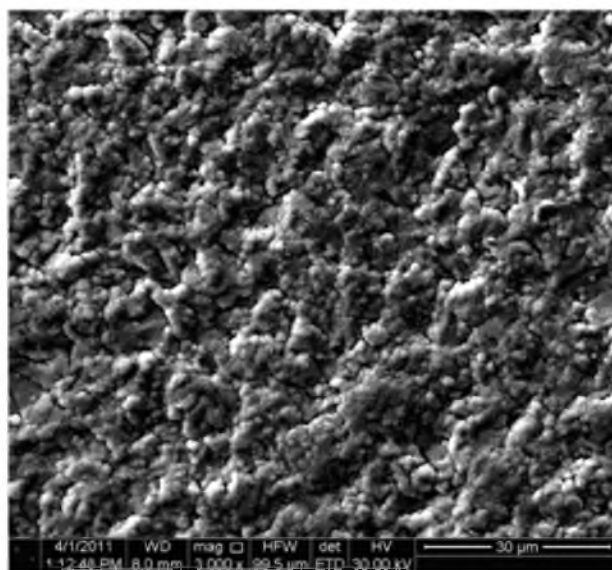


Рис. 1. РЭМ-изображение внешней поверхности многослойной металлизации кремниевой структуры. Увеличение 3000х, ускоряющее напряжение 30 кВ.

Как следует из рис.1 и 2, методом магнетронного напыления удастся получить морфологически однородные металлические слои, состоящие из зерен микронного размера, форма которых близка к сферической.

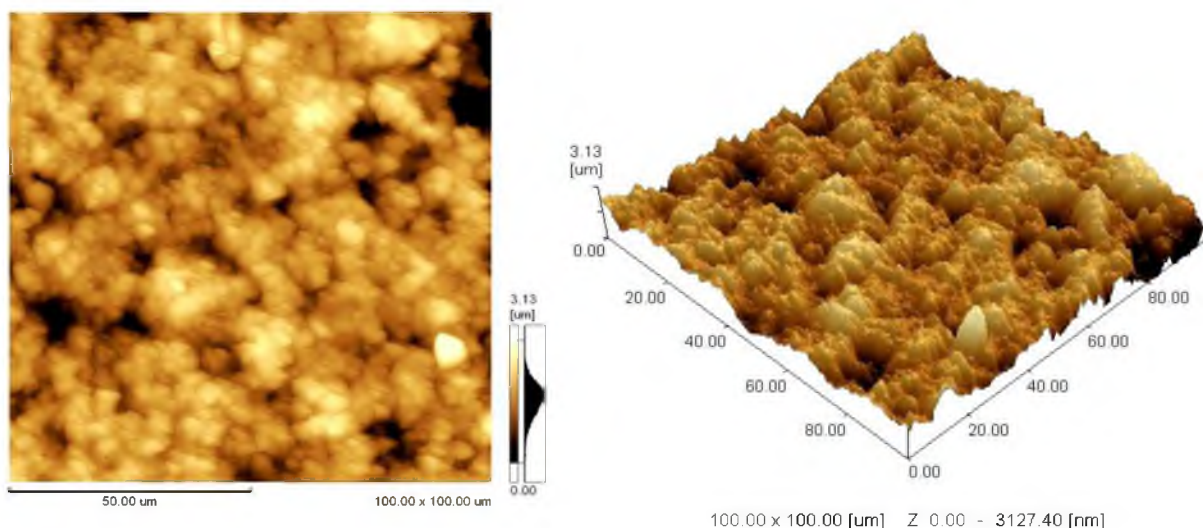


Рис. 2. СЗМ-изображения внешней поверхности многослойной металлизации кремниевой структуры. Размер скана 100х100 мкм.

Для выявления структуры многослойной металлизации и определения элементного состава металлических слоев нами использовались метод селективного химического травления и метод травления поверхности металлизированной кремниевой структуры сфокусированным ионным пучком в колонне РЭМ. Химическому травлению подвергалась открытая часть поверхности исследуемого образца, другая часть поверхности была защищена химически стойким лаком (ХСЛ). Для химического травления использовался травитель состава: HNO_3 (концентр.) + HF (5%) в соотношении 1:1. Время травления составляло 3 мин, температура травления 25°C . После травления образец промывался в растворе NH_4OH с добавлением $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$.

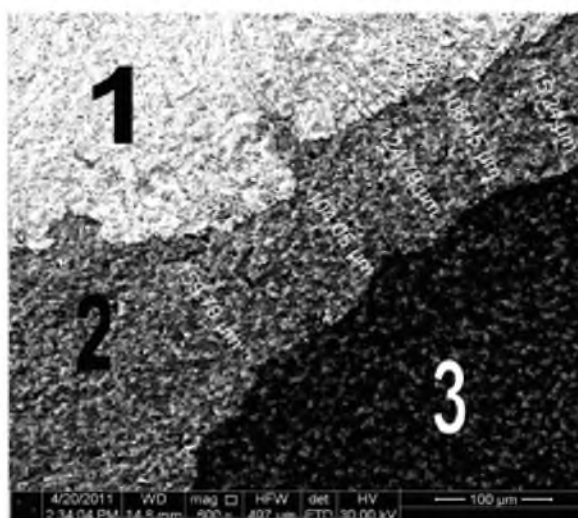


Рис. 3. РЭМ-изображение поверхности металлизированной кремниевой структуры после ее химического травления в смеси HNO_3 (концентр.) и HF (5%). Время травления 3 мин, температура 25°C .

На рис. 3 представлено РЭМ-изображение поверхности металлизированной кремниевой структуры после ее химического травления. Как видно из рис.3, в результате воздействия вышеуказанным травителем на незащищенную ХСЛ часть поверхности исследуемого образца в ней была выявлена переходная область шириной порядка 120 мкм, обнажившая внутренние слои металлизации. Используя энергодисперсионную рентгеноспектральную приставку РЭМ Quanta 200 i 3D FEI, нами был проведен локальный микроанализ элементного состава выявленных травлением внутренних слоев металлизации.

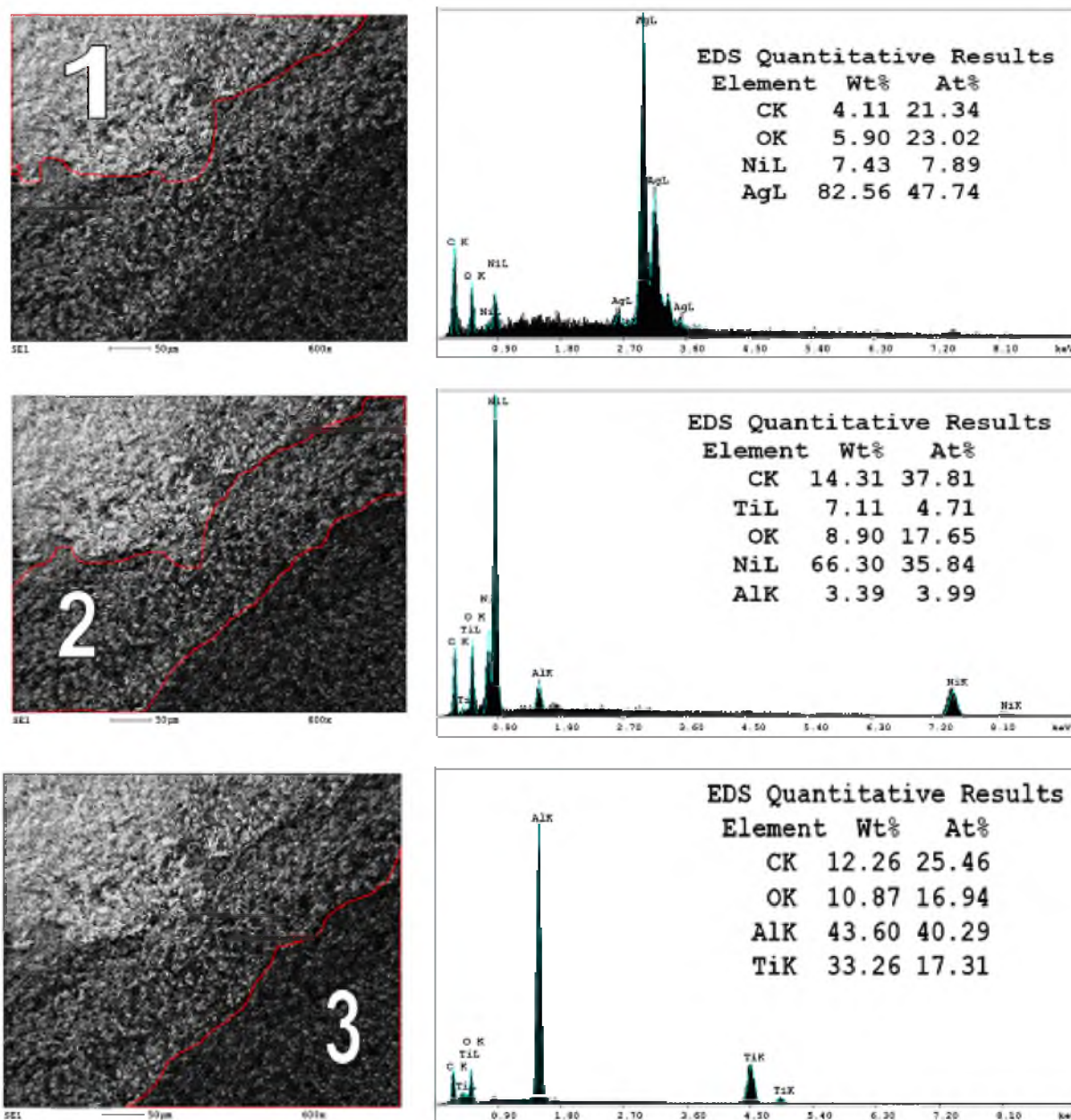


Рис. 4. Элементный состав многослойного покрытия кремниевой структуры по данным энергодисперсионного рентгеновского микроанализа.

При этом было обнаружено, что преобладающим элементом в составе области 1 многослойного покрытия является серебро (48 ат.%), преобладающими элементами в составе области 2 является никель (36 ат.%) и титан (5%). В составе области 3 (прилегающей к кремнию) присутствуют алюминий (40 ат.%) и титан (17 ат. %). Таким образом, результаты химического травления и энергодисперсионного рентгеновского микроанализа металлизированной кремниевой структуры подтвердили заданную при изготовлении последовательность металлических слоев покрытия.

Толщина поверхностного слоя серебра определялась с использованием технологии травления фокусированным ионным пучком (ФИП) в колонне РЭМ Quanta 200 i 3D, а также методом сканирующей зондовой микроскопии. На рис. 5. представлено РЭМ-изображение поперечного сечения металлического покрытия кремниевой структуры после травления фокусированным ионным пучком. Ионное травление металлического покрытия кремниевой структуры проводилось на торце исследуемого образца. Как видно из рис. 5, толщина поверхностного слоя серебра в выбранной области покрытия варьировалась в интервале от 1,5 до 1,75 мкм.

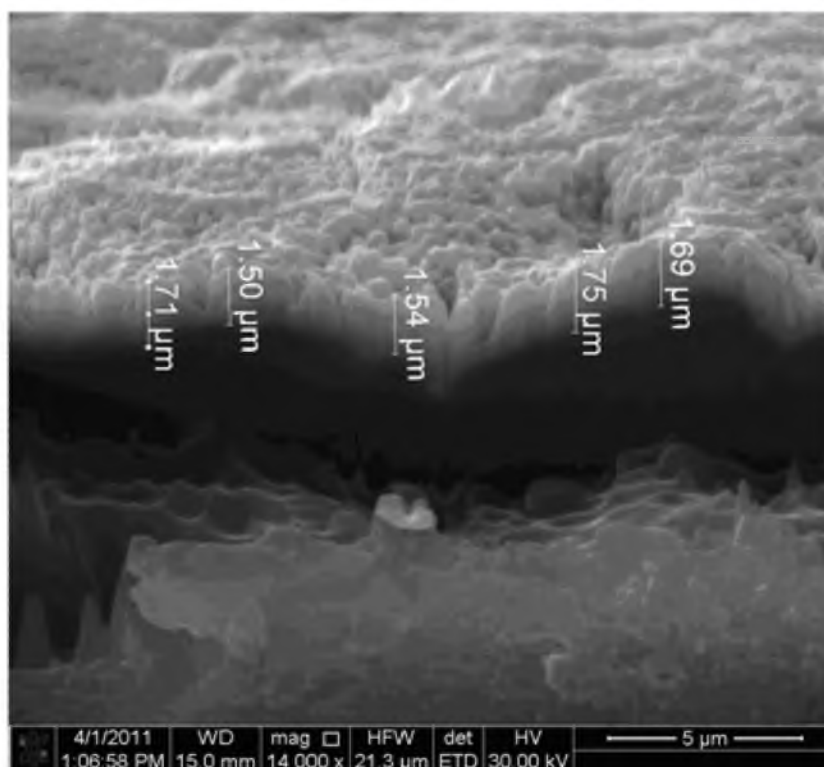


Рис. 5. РЭМ-изображение поперечного сечения поверхностного слоя металлического покрытия кремниевой структуры, полученного с использованием функции фокусированного ионного пучка.

На рис. 6 представлены СЗМ-изображения границы раздела областей 1 и 2 (рис. 2) поверхности многослойного металлического покрытия кремниевой структуры после

химического травления по технологии, описанной выше. Перепад высот внешних поверхностей металлических слоев в области 1 (Ag) и в области 2 (Ni), определенный по данным СЗМ, составил 1,8 мкм, что, с учетом шероховатости поверхностей, соответствует результатам, полученным с использованием ФИП.

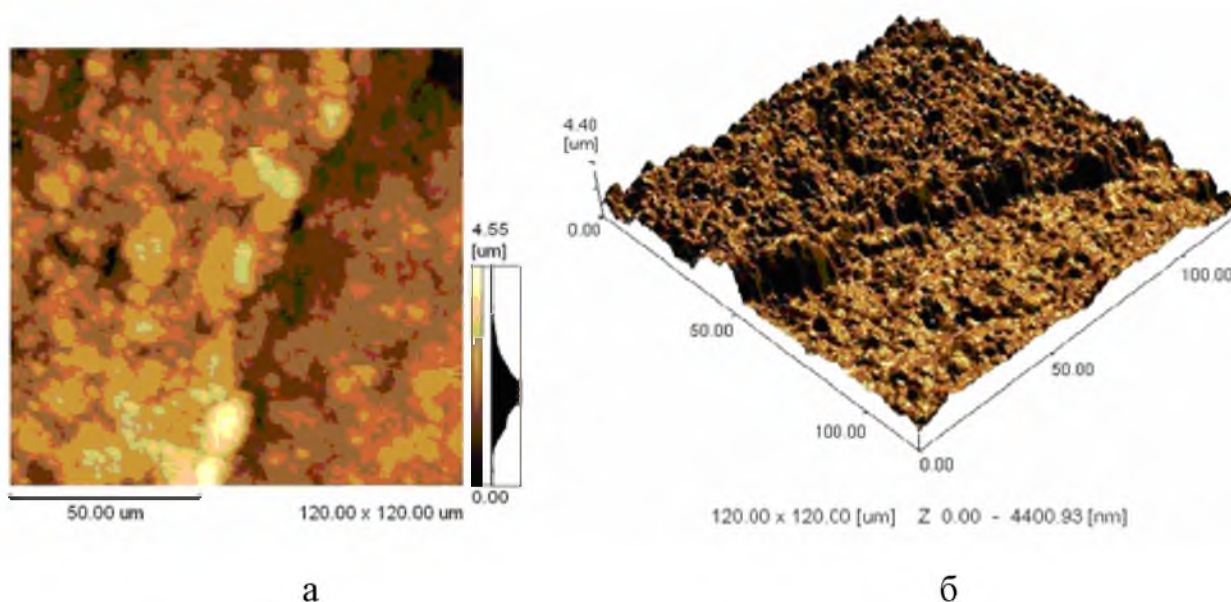


Рис.6. СЗМ-изображения границы раздела областей 1 и 2 (рис.2) поверхности многослойного металлического покрытия кремниевой структуры после химического травления.

Размер скана 120x120мкм.

Таким образом, приведенные выше результаты демонстрируют эффективность применения методов химического и ионного травления в сочетании с РЭМ и СЗМ для исследования структуры и элементного состава многослойных металлических покрытий на кремнии.

Работа выполнена в рамках договора № 02.G25.31.0051 между ОАО «Электровыпрямитель» и Министерством образования и науки Российской Федерации об условиях предоставления и использования субсидии на реализацию комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, выполняемого с участием российского высшего учебного заведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fellenger J., Baumgartner W. Patentschrift – DE 3414065 C2. Deutsches Patentamt. – 1989.
2. Schwarzbauer H., Europäische Patentschrift EP 0 242 626 B1. Europäisches Patentamt. – 1991.
3. Schwarzbauer H., Kuhnert R. Novel Large Area Joining Technique for Improved Power Device Performance. In: IEEE Trans. Ind. Appl. – 1991. – Vol. 27. – № 1. – pp. 93-95.