



eISSN 2311-2468  
Том 4, № 20. 2016  
Vol. 4, no. 20. 2016

электронное периодическое издание  
для студентов и аспирантов

# Огарёв-онлайн Ogarev-online

<https://journal.mrsu.ru>



**ГУБАЙДУЛЛИН И. М., ПЕСКОВА Е. Е., ЯЗОВЦЕВА О. С.**  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА**  
**НА ПРИМЕРЕ БРУТТО-РЕАКЦИИ ПИРОЛИЗА ЭТАНА**

**Аннотация.** В работе описана модель течений химически активного газа. Математическая модель построена на примере брутто-реакции пиролиза этана.

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, уравнения Аррениуса, химическая кинетика, пиролиз этана.

**GUBAIDULLIN I. M., PESKOVA E. E., YAZOVTSEVA O. S.**  
**MATHEMATICAL MODEL OF MULTICOMPONENT GAS DYNAMICS**  
**BASED ON ETHANE PYROLYSIS BRUTTO-REACTION**

**Abstract.** The paper describes a mathematical model of gas flows with chemical reactions. The model is based on the ethane pyrolysis brutto-reaction.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, Arrhenius equations, chemical kinetics, ethane pyrolysis.

**Введение.** Впервые численное моделирование трехмерной динамики газового потока пиролиза этана и пропана в программном пакете ANSYS Fluent с использованием компактной кинетической модели проведено в работах [1; 3]. Но результаты численных расчетов и экспериментальные исследования по конверсии пропана хорошо согласуются не при всех температурах проведения реакции. С целью адекватного описания процесса динамики химически активного газа при любых температурах нами начата разработка отечественного программного комплекса, который позволит изучить пиролиз легких углеводородов в условиях, труднореализуемых экспериментально. Такие процессы носят сложный нелинейный характер и описываются системой уравнений Навье-Стокса, дополненной уравнениями неразрывности для каждой компоненты газа.

В настоящей статье построена математическая модель для расчета газодинамических параметров брутто-реакции пиролиза этана.

**1. Математическая модель.** Математическая модель представляет собой уравнения неразрывности, сохранения импульса, сохранения энергии, дополненные уравнениями неразрывности для каждой компоненты газа [4; 5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\
\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p &= 0, \\
\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}(\rho E + p)) + \vec{q} &= S_h, \\
\frac{\partial (\rho Y_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \rho Y_i) + \nabla \cdot \vec{J}_i &= R_i.
\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение состояния смеси идеальных газов имеет вид:

$$p = \rho R T \sum_j (Y_j / M_{wj}) \tag{2}$$

Начальные условия задают состояние рассматриваемого объекта в начальный момент времени:  $\rho(x, t_0) = \rho_0$ ,  $\vec{v}(x, t_0) = (u(x, t_0), v(x, t_0), w(x, t_0))^T$ ,  $p(x, t_0) = p_0$ ,  $T(x, t_0) = T_0$ ,  $Y(x, t_0) = Y_0$ .

Границные условия задают состояние газа на границе рассматриваемой области. Это могут быть условия свободного втекания или вытекания, непротекания.

Здесь  $\rho$  – плотность газа ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ),  $\vec{v}$  – скорость газа ( $\text{м}/\text{с}$ ),  $p$  – давление ( $\text{Па}$ ),  $\rho E$  – полная энергия в единице объема ( $\text{Дж}/\text{м}^3$ ),  $h_j = \int_{T_{ref}}^T c_{pj} dT$  – энталпия ( $\text{Дж}/\text{кг}$ ),  $c_{pj}$  – удельная теплоемкость вещества  $j$  ( $\text{Дж}/(\text{К} \cdot \text{кг})$ ),  $S_h = -\sum_j \frac{h_j}{M_{wj}} R_j$  – нагрев (охлаждение) в результате химической реакции и внешних воздействий ( $\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ ),  $Y_i$  – локальная массовая доля вещества  $i$ ,  $R_i = M_{wi} \sum_{r=1}^N \hat{R}_{ir}$  – объемная скорость образования вещества  $i$  ( $\text{кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ ),  $\hat{R}_{ir}$  – молярный коэффициент Аррениуса образования (расхода) вещества  $i$  в ходе реакции  $r$  ( $1/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ ),  $M_{wi}$  – молекулярная масса вещества  $i$  (кг),  $R$  – универсальная газовая постоянная ( $\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ ),  $T$  – температура (К).

В уравнениях неразрывности для каждой компоненты газа величина  $\vec{J}_i$  – вектор плотности потока массы  $i$ -ой компоненты смеси. В задачах, где бародиффузией и термодиффузией можно пренебречь, он определяется следующим выражением [5, 6]:

$$\vec{J}_j = -\rho D_{im} \nabla Y_j. \tag{3}$$

Здесь  $D_{im}$  – коэффициент диффузии вещества  $i$  в вещество  $j$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ), для нахождения которого широко используется следующая формула [2]:

$$D_{im} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k M_{wk}}{(1/\sum_{k=1}^N Y_k/M_{wk}) \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N x_k / D_{ik}}. \quad (4)$$

Здесь  $X_k$  – мольная концентрация  $k$ -ой компоненты газа,  $D_{ik}$  – бинарный коэффициент диффузии для  $i$ -го и  $k$ -го компонента ( $m^2/c$ ):

$$D_{ik} = (2.628 \times 10^{-7}) \frac{\left[ T^3 \left( \frac{1}{M_{wi}} + \frac{1}{M_{wj}} \right) \right]^{0.5}}{p \times (0.5(\sigma_i + \sigma_j))^2 \times \Omega_D}.$$

$\Omega_D$  – интеграл диффузационных столкновений [4]:

$$\Omega_D = \frac{1,06036}{T_D^* 0,1651} + \frac{0,1930}{\exp(0,47635 T_D^*)} + \frac{1,03587}{\exp(1,52996 T_D^*)} + \frac{1,76474}{\exp(3,89411 T_D^*)},$$

$$T_D^* = \frac{T}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{k_b}\right)_i \left(\frac{\varepsilon}{k_b}\right)_j}}; \left(\frac{\varepsilon}{k_b}\right)_j, \sigma_j \text{ – параметры Леннарда-Джонса [5]}$$

Вектор плотности потока энергии  $\vec{q}$  для многокомпонентной смеси определяется выражением [5; 6]:

$$\vec{q} = -\chi \nabla T - \sum_i h_i \rho D_{im} \nabla Y_j. \quad (5)$$

Здесь  $\chi$  – коэффициент теплопроводности смеси:  $\chi = \sum_{i=1}^N X_i \chi_i$

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры потока можно определить по формуле Сазерленда:

$$\chi_i = \chi_{0i} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}, \quad (6)$$

где  $\chi_{0i}$  – коэффициент теплопроводности при температуре  $T_0$ ,  $T_S$  – постоянная Сазерленда.

Для каждого компонента смеси энталпия  $h_i$  рассчитывается по следующей формуле:

$$h_i = \int_{T_0}^T C_{pi}(T) dT + h_i^0. \quad (7)$$

Здесь  $h_i^0$  – энталпия образования  $i$ -ой компоненты при температуре  $T_0$ ,  $C_{pi}(T)$  – удельная теплоемкость  $i$ -ой компоненты при постоянном давлении, для вычисления которых используется полиномиальная аппроксимация [4].

**2. Разностная схема.** Будем рассматривать двумерную постановку задачи. В векторной форме уравнения Навье-Стокса, дополненные уравнениями неразрывности для компонент, можно представить в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (F^{(1)}(U) - H^{(1)}(U))}{\partial x} + \frac{\partial (F^{(2)}(U) - H^{(2)}(U))}{\partial y} = Q. \quad (8)$$

Здесь  $F(U) = (F^{(1)}(U), F^{(2)}(U))^T$  – конвективные члены в системе (1),  $H(U) = (H^{(1)}(U), H^{(2)}(U))^T$  – диффузионные члены в системе (1),  $Q$  – источник.

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho Y_i \end{pmatrix}; F^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (\rho E + p)u \\ \rho u Y_i \end{pmatrix}; F^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \\ \rho v Y_i \end{pmatrix};$$

$$H^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_j h_j \rho D_{mj} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \\ \rho D_{mi} \frac{\partial Y_i}{\partial x} \end{pmatrix}; H^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_j h_j \rho D_{mj} \frac{\partial Y_j}{\partial y} \\ \rho D_{mi} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_h \\ R_i \end{pmatrix}.$$

Для построения разностной схемы введем дискретную сетку, равномерную по каждому направлению. Для аппроксимации системы уравнений газовой динамики используем следующую разностную схему:

$$\frac{dU_{ij}}{dt} + \frac{F_{i+1/2,j}^{(1)} - F_{i-1/2,j}^{(1)}}{h_x} + \frac{F_{ij+1/2}^{(2)} - F_{ij-1/2}^{(2)}}{h_y} - \left( \frac{H_{i+1/2,j}^{(1)} - H_{i-1/2,j}^{(1)}}{h_x} + \frac{H_{ij+1/2}^{(2)} - H_{ij-1/2}^{(2)}}{h_y} \right) = Q_{ij}.$$

Здесь  $F_{i+1/2,j}^{(1)}, F_{ij+1/2}^{(2)}$  – дискретные потоки, значения которых находятся по схеме Лакса-Фридрихса:

$$F_{i+1/2}^{(m)} = \frac{1}{2} \left[ (F^{(m)}(U_{i+1/2}^+)) + (F^{(m)}(U_{i+1/2}^-)) - \alpha_m (U_{i+1/2}^+ - U_{i+1/2}^-) \right], \quad m = 1, 2 \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \max(|u_{ij}| + \sqrt{\frac{\rho_{ij}}{\rho_{ij}}}; |u_{i+1,j}| + \sqrt{\frac{\rho_{i+1,j}}{\rho_{i+1,j}}}), \\ \alpha_2 &= \max(|u_{ij}| + \sqrt{\frac{\rho_{ij}}{\rho_{ij}}}; |u_{i,j+1}| + \sqrt{\frac{\rho_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}}}).\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь  $U_{i+1/2,j}^+$ ,  $U_{j+1/2}^+$  – “левые” и “правые” значения вектора  $U$  на грани между  $i$  и  $i+1$  ячейками и  $j$  и  $j+1$  ячейками соответственно. Алгоритм вычисления этих значений с высоким порядком точности предложен в [8].

**3. Модель химической реакции пиролиза этана.** Расчет газодинамических параметров будем проводить на примере брутто-реакции пиролиза этана. В таблице приведена схема реакции, предэкспоненциальный множитель  $A_i$  и энергия активации  $E_i$  для каждой стадии:

Таблица 1

**Схема реакции**

Стадия	$A_i, 1/c$	$E_i, \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{моль})$
$C_2H_6 \rightarrow C_2H_4 + H_2$	1,08E+16	2,5E+08
$2C_2H_6 \rightarrow C_2H_4 + 2CH_4$	3,16E+16	2,7E+08

Последовательность химических превращений и соответствующие кинетические уравнения для реакции запишем следующим образом:

Таблица 2

**Кинетические уравнения**

$A_1 \rightarrow A_2 + A_3$	$w_1 = k_1 C_1$
$2A_1 \rightarrow A_2 + 2A_4$	$w_2 = k_2 C_1^2$

Здесь  $A_1 = [C_2H_6]$ ,  $A_2 = [C_2H_4]$ ,  $A_3 = [H_2]$ ,  $A_4 = [CH_4]$ ,  $C_i = \rho Y_i / M_{wi}$ ,  $k_j$  – константа скорости  $j$ -ой прямой стадии, размерности:  $k_1 = [1/c]$ ,  $k_2 = [\text{л}/(\text{моль}\cdot\text{с})]$ .

Зависимость константы скорости стадии от температуры выражается из уравнения Аррениуса [9]:

$$k_i = A_i e^{\left( -\frac{E_i}{RT} \right)} \quad (11)$$

Объемную скорость образования вещества  $i$  определяем из соотношения:

$$R_i = M_{wi} \sum_{r=1}^N v_{ir} w_r. \text{Здесь } v_{ir} \text{ – стехиометрические коэффициенты компонента } i \text{ в реакции } r$$

Для такого механизма пиролиза этана нагрев или охлаждение в результате химических реакций рассчитывается следующим образом [4]:

$$S_h = -\left( \frac{h_{C_2H_6}^0}{M_{w,C_2H_6}} R_{C_2H_6} + \frac{h_{C_2H_4}^0}{M_{w,C_2H_4}} R_{C_2H_4} + \frac{h_{H_2}^0}{M_{w,H_2}} R_{H_2} + \frac{h_{CH_4}^0}{M_{w,CH_4}} R_{CH_4} \right).$$

**Заключение.** В работе построена математическая модель для решения задач газовой динамики с учетом химических реакций. Модель предназначена для описания двумерной динамики реагирующего газа с учетом теплообменных и диффузионных процессов, а также химических реакций пиролиза этана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nurislamova L. F., Gubaidullin I. M., Novichkova A. V., Stoyanovskaya O. P., Stadnichenko O. A., Snytnikov V. N. Few-step kinetic model of gaseous autocatalytic ethane pyrolysis and its evaluation by means of uncertainty and sensitivity analysis // Chemical Product and Process Modeling. – 2014. – Vol. 9, No. 2. – P. 143–154.
2. Нурисламова Л. Ф. Разработка компактной кинетической модели пиролиза пропана методами анализа чувствительности: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2015. – 22 с.
3. Губайдуллин И. М., Маничев В. Б., Нурисламова Л. Ф. Редуктивный подход при моделировании сложных задач химической кинетики // Журнал Средневолжского математического общества. – 2012. – Т. 14, № 4. – С. 26–33.
4. Стадниченко О. А., Снытников В. Н., Снытников В. Н. Математическое моделирование потоков многокомпонентного газа с энергоемкими химическими процессами на примере пиролиза этана // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – Т. 15. – С. 658–668.
5. Саразов А. В., Зеленский Д. К., Корчажкин Д. А., Никитин В. Ф. Математическое моделирование потоков многокомпонентного газа с энергоемкими химическими процессами на примере пиролиза этана // Тезисы докладов XIV Международной конференции "Супервычисления и математическое моделирование". – Саров, 2012. – С. 513–520.
6. Борисов В. Е. и др. Программный комплекс TCS 3D: математическая модель // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2015. – № 6. – С. 1–20.

7. Poling B. E., Prausnitz J. M., O'Connell J. P. The properties of gases and liquids. – New York: McGraw-Hill, 2001. – 768 p.
8. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма для прямого численного моделирования сложных газодинамических течений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 1. – С. 137–146.
9. Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. – М.: Мир, 2000. – 176 с.

**ЛАРЬКИН П. А., СЫРОМЯСОВ А. О.**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕТА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**  
**С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ**

**Аннотация.** Изучается движение материальной точки под действием сил тяжести и аэродинамического сопротивления в атмосфере с постоянной и переменной плотностью. Коэффициент сопротивления точки зависит от ее скорости. Найдена зависимость максимальной дальности полета и угла запуска точки от ее начальной скорости.

**Ключевые слова:** материальная точка, полет, аэродинамическое сопротивление, коэффициент аэродинамического сопротивления, сглаживание данных.

**LARKIN P. A., SYROMYASOV A. O.**  
**MODELING OF MATERIAL POINT FLIGHT**  
**WITH VARIABLE COEFFICIENT OF AIR RESISTANCE**

**Abstract.** The paper deals with the movement of material point in the atmosphere of constant or variable density. The point is supposed to be under the action of gravity and air-resistance forces, and the resistance coefficient of the point depends on its velocity. The relation between the range, the launch angle and the initial velocity of the point is found.

**Keywords:** material point, flight, aerodynamic resistance, coefficient of air resistance, data smoothing.

**1. Постановка задачи.** В связи с разработкой высокоскоростных летательных аппаратов, а также в связи с проектированием стрелкового, артиллерийского и ракетного вооружения актуальным является моделирование движения тела в атмосфере. При этом размеры тела много меньше, чем преодолеваемое им расстояние, что во многих случаях позволяет считать его материальной точкой.

Ниже моделируется движение точки в земной атмосфере. Относительно характера этого движения делаются следующие допущения.

1. Максимальная высота подъема тел над поверхностью Земли много меньше земного радиуса. Это предположение позволяет считать Землю плоской.

2. Воздух в атмосфере неподвижен (ветер отсутствует).

3. Дальности полета сравнительно невелики, так что вращением Земли и возникающим из-за этого кориолисовым ускорением можно пренебречь. Вместе с предыдущим пунктом это позволяет считать траекторию тела плоской кривой.

4. На точку действуют лишь сила тяжести и сила аэродинамического сопротивления.

Первая из них направлена вниз (перпендикулярно земной поверхности) и численно равна  $mg$ ,

где  $m$  – масса точки,  $g = 9.80665 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения. Вторая направлена против движения точки (противоположно ее скорости) и численно равна

$$R = \frac{1}{2} \rho c_x S v^2, \quad 1)$$

где  $\rho$  – плотность атмосферы,  $c_x$  – коэффициент аэродинамического сопротивления,  $S$  – площадь поперечного сечения тела,  $v$  – его скорость [1].

Введем декартову прямоугольную систему координат с горизонтальной осью  $Ox$  и вертикальной осью  $Oy$  и будем задавать положение точки в произвольный момент времени  $t$  координатами  $(x(t); y(t))$ . Будем предполагать, что запуск тела происходит из начала координат с начальной скоростью  $v_0$  под острым углом  $\alpha$  к горизонту. Тогда с учетом (1) движение материальной точки описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} \rho c_x S v v_x, \\ m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2} \rho c_x S v v_y - mg, \end{cases} \quad 2)$$

с начальными данными

$$x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = v_0 \cos \alpha, v_y(0) = v_0 \sin \alpha. \quad 3)$$

Здесь  $\vec{v} = \{v_x, v_y\}$  – вектор скорости тела,  $v$  – длина этого вектора:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для нахождения траектории тела требуется решить систему уравнений (2) и (3). Помимо самой траектории, нас будет интересовать дальность полета материальной точки, а также зависимость максимальной дальности от начальной скорости и сопротивления среды.

**2. Метод решения.** Система (2), (3) решалась численно, при этом применялся метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности [2]. Для реализации метода была написана программа на языке C# в среде Visual Studio. Созданная программа позволяет задавать параметры атмосферы (в т. ч. таблично описывать зависимость плотности воздуха от высоты над горизонтом), строить различного рода графики, искать дальность и максимальную высоту полета, сохранять результаты работы в форме PDF- и HTML-отчетов.

При поиске дальности полета  $X$  использовался весьма простой алгоритм. Именно, путем перебора всех вычисленных пар координат  $(x; y)$  определялось такое значение  $x > 0$ , при котором величина  $y$  максимально близка к нулю. Аналогично, при поиске высоты полета  $H$  определялось максимальное вычисленное значение  $y$ .

В качестве теста был рассмотрен известный из курса теоретической механики случай движения точки в среде без сопротивления, в котором значения  $X$  и  $H$  легко находятся аналитически. Относительная погрешность определения этих величин с помощью созданной

программы составила всего около  $10^{-3}$ , что является удовлетворительным результатом с точки зрения практики.

**3. Оптимальные параметры полета в атмосфере постоянной плотности.** В отсутствие сопротивления среды максимальная дальность полета достигается при угле запуска  $\alpha_{\max} = 45^\circ$  вне зависимости от начальной скорости и составляет

$$X_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (4)$$

Если движение происходит в среде с сопротивлением, то угол  $\alpha_{\max}$  не является постоянной величиной, а зависит от ряда параметров, одним из которых служит начальная скорость  $v_0$ . Если же плотность является постоянной, то вторым параметром, определяющим значения  $\alpha_{\max}$  и  $X_{\max}$ , служит

$$k = \frac{\rho c_x S}{2m}, \quad (5)$$

поскольку уравнения (2) могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -kvv_x, \\ \frac{dv_y}{dt} = -kvv_y - g. \end{cases}$$

С помощью созданного программного комплекса была изучена зависимость  $\alpha_{\max}$  и  $X_{\max}$  от  $v_0$  и  $k$ . Приложением результатов моделирования служит определение оптимальных параметров полета для пуль, выпущенных из различных видов стрелкового оружия. Их движение осуществляется на небольших высотах, где плотность атмосферы можно считать равной  $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$  [3]. В качестве конкретных примеров были рассмотрены пули пистолета Макарова ПМ (масса  $m = 6 \text{ г}$ , калибр  $d = 9 \text{ мм}$ , начальная скорость  $v_0 = 315 \text{ м/с}$ ), автомата Калашникова АК-74 ( $m = 3 \dots 4 \text{ г}$ ,  $d = 5.45 \text{ мм}$ ,  $v_0 = 735 \text{ м/с}$ ) и снайперской винтовки Драгунова ( $m = 9 \dots 13.75 \text{ г}$ ,  $d = 7.62 \text{ мм}$ ,  $v_0 = 830 \text{ м/с}$ ), параметры которых доступны в открытых источниках. Соответственно, исследование проводилось при  $300 \leq v_0 \leq 850 \text{ м/с}$ .

Наконец, в качестве  $c_x$  использовался коэффициент сопротивления т.н. стандартной пули G1 [4]. Поскольку он зависит от изменяющейся с течением времени скорости движения пули, то (5) фактически задает начальное значение  $k$ . В выбранном диапазоне скоростей параметр  $c_x$  изменяется от 0.2 до 0.66, что для трех рассмотренных видов вооружения окончательно приводит к оценке  $k \leq 0.0045 \text{ м}^{-1}$ .

При исследовании значения  $v_0$  в указанном диапазоне перебирались с шагом 50 м/с, а значения  $k$  – с шагом  $0.0005 \text{ м}^{-1}$ . Типичный график зависимости  $\alpha_{\max}$  от  $v_0$  при

фиксированном  $k$ , полученный с помощью численного моделирования в разработанной программе, выглядит следующим образом (рис. 1).

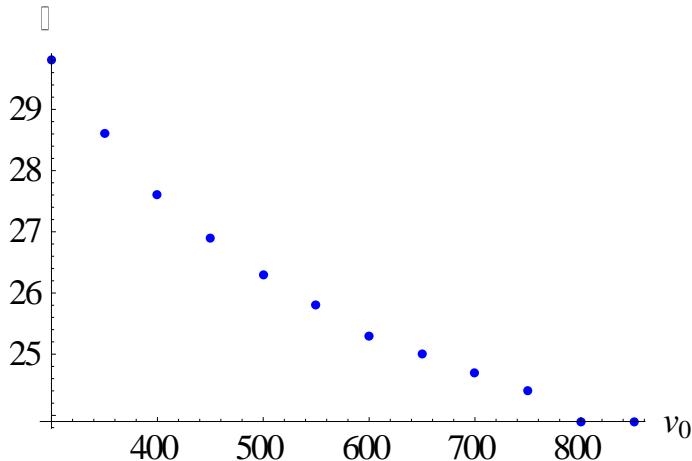


Рис. 1. Зависимость  $\alpha_{\max}(v_0)$  при  $k = 0.0025$ .

С одной стороны, график иллюстрирует убывание функции  $\alpha_{\max}(v_0)$ . С другой стороны, нельзя утверждать, что при  $v_0 \rightarrow \infty$  угол  $\alpha_{\max}$  стремится к нулю, ибо при нулевом угле запуска дальность полета заведомо нулевая. Поэтому были рассмотрены две конкурирующие гипотезы касательно зависимости  $\alpha_{\max}(v_0)$ :

$$\alpha_{\max} = \frac{A}{v_0^m} + B \text{ или } \alpha_{\max} = A m^{-v_0} + B. \quad (6)$$

Параметры  $A$ ,  $B$ ,  $m$  положительны и зависят от  $k$ , причем во втором случае  $m < 1$ . Для каждого конкретного  $k$ , включенного в рассмотрение, они были найдены с использованием стандартной функции FindFit системы Wolfram Mathematica.

Критерием качества согласования сглаженных данных с табличными служила исправленная выборочная дисперсия  $S^2$ , рассчитанная по формуле [5]

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\alpha_{\max}(v_{0,i}) - \alpha_i)^2,$$

где  $\alpha_i$  – табличные значения угла, соответствующие  $i$ -му значению скорости  $v_{0,i}$ ,  $\alpha_{\max}(v_{0,i})$  – сглаженные значения.

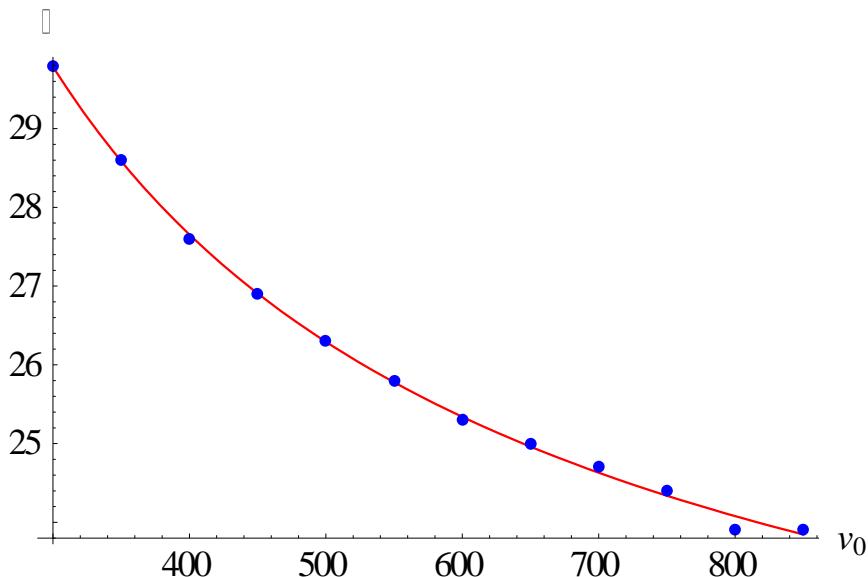
Выяснилось, что первая из гипотез (6) приводит к меньшим значениям  $S^2$ , а значит, является более адекватной. Значения  $A$ ,  $B$ ,  $m$  при различных значениях  $k$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения  $A, B, m$  в формуле (6)

$k$	0	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045
$A$	0	131.67	199.31	158.69	158.85	821.89	152.77	211.17	277.39	97.544
$B$	45	0	11.236	11.032	10.279	18.907	9.3228	13.880	15.318	1.6698
$m$	—	0.2294	0.3867	0.3612	0.3623	0.7582	0.3571	0.4674	0.5386	0.2313

Сглаживание данных с использованием принятой гипотезы проиллюстрировано на рисунке 2.

Рис. 2. Сглаживание данных с помощью гипотезы (6) при  $k = 0.0025$ .

Далее выясним, как  $X_{\max}$  зависит от  $v_0$  при различных  $k$ . Аналогично (4), будем искать эту зависимость в виде

$$X_{\max} = \frac{v_0^2}{g} F(v_0, k).$$

Результаты численного эксперимента подтверждают, что множитель  $F$  должен стремиться к нулю при  $v_0 \rightarrow \infty$ . Поэтому для данной функции при фиксированном  $k$  рассмотрены следующие две конкурирующие гипотезы:

$$F = \frac{A}{v_0^m} \text{ или } F = A m^{-v_0}. \quad (7)$$

Как и в формуле (6), величины  $A$  и  $m$  больше нуля, а при использовании второй из гипотез (7) дополнительно  $m < 1$ .

Критерием согласования данных вновь служила величина  $S^2$ ; оказалось, что первая из гипотез (7) – «степенная» вновь приводит к меньшим значениям выборочной дисперсии. Табл. 2 содержит значения параметров  $A, m$  при различных  $k$ .

Таблица 2

**Значения  $A, m$  в формуле (7)**

$k$	0	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045
$A$	1	746.47	857.73	848.26	813.76	774.86	737.64	703.08	671.61	618.96
$m$	0	1.3807	1.4843	1.5324	1.5619	1.5826	1.5982	1.6106	1.6207	1.6229

На рисунке 3 приведен пример сглаживания данных по дальности полета.

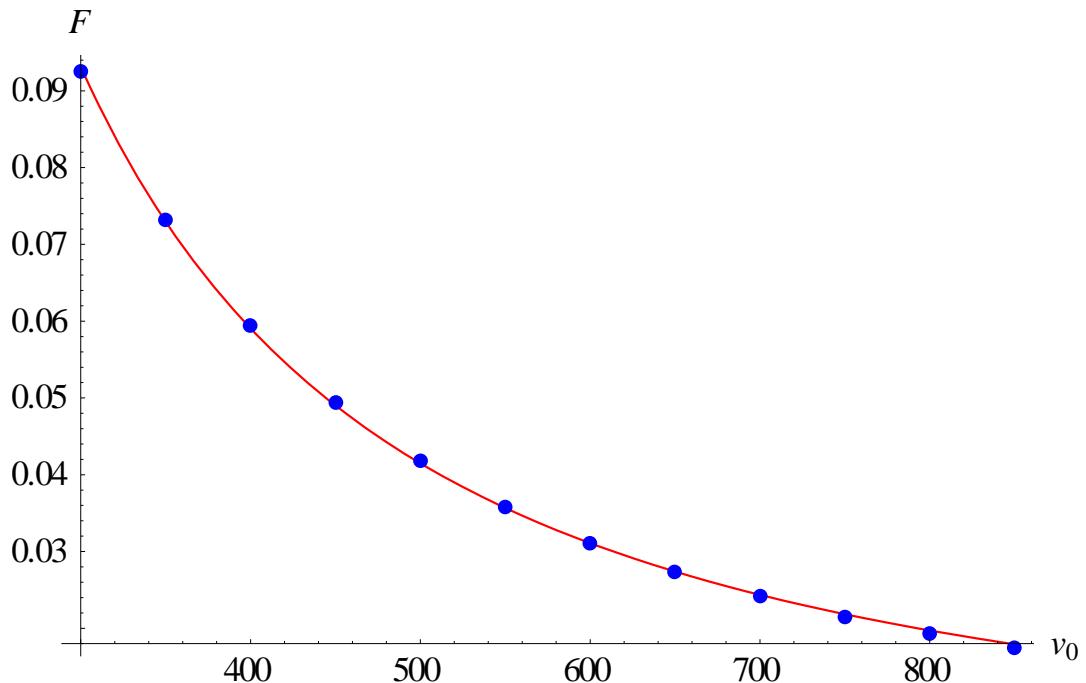


Рис. 3. Сглаживание данных с помощью гипотезы (7) при  $k = 0.0025$ .

Как видно, применяемые формулы (6) и (7) весьма просты, а найденные значения параметров  $A, B, m$  обеспечивают хорошее согласование формул с результатами численного эксперимента.

**4. Полет в стратифицированной атмосфере.** При изучении полета снаряда в стандартной атмосфере, плотность которой меняется с высотой [3], было получено, что при больших начальных скоростях угол запуска, при котором достигается максимальная дальность, превышает  $45^\circ$  (в отличие от полета в среде с постоянными свойствами). Это можно объяснить так. При больших  $v_0$  материальная точка достигает верхних слоев атмосферы, где плотность воздуха близка к нулю, а сопротивление практически отсутствует.

Однако в среде без сопротивления максимальная дальность полета достигается при угле запуска, равном  $45^\circ$ . Это означает, что достичь верхних слоев атмосферы снаряд должен, двигаясь именно под этим углом к горизонту. Однако угол, образуемый вектором  $\vec{v}$  и плоскостью горизонта, на восходящем участке траектории со временем уменьшается. Поэтому начальный угол запуска должен превышать  $45^\circ$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов. – 17-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2007. – 416 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П. , Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
3. ГОСТ 4401–81. Атмосфера стандартная. Параметры. – Взамен ГОСТ 4401–73. – Введ. 1981/02/27. – М.: Изд-во стандартов, 2004. – 180 с.
4. Tabulated values of CD vs Mach number [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.jbmballistics.com/ballistics/downloads/text/mcg1.txt>.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юрайт, 2010. – 479 с.

**ГАЛКИН Д. В., ГОРБЕНКО О. Ю., ПОЗДЯЕВА Н. С.,  
СИДОРЕНКОВА Т. О., ХАЛИКОВА К. К.  
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА  
НА АДАПТИРУЕМЫХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕЛЬЧАЮЩИХСЯ СЕТКАХ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ CHOMBO**

**Аннотация.** Рассмотрена методика решения уравнений тепло- и массопереноса на ортогональных локально-адаптируемых сетках разрывным методом Галёркина с использование библиотеки Chombo. Рассмотрены схемы для решения уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности, описаны схемы передачи значений сеточных функций между уровнями адаптации сетки. Рассмотрен алгоритм построения сетки вокруг тела заданной геометрии для задач внешней аэродинамики.

**Ключевые слова:** разрывный метод Галёркина, структурированная сетка, библиотека Chombo, RKDG.

**GALKIN D. V., GORBENKO O. YU., POZDYAEVA N. S.,  
SIDORENKOVA T. O., KHALIKOVA K. K.  
USING CHOMBO LIBRARY FOR SOLVING PROBLEMS OF  
HEAT AND MASS TRANSFER ON LOCALLY-ADAPTIVE REFINED GRIDS**

**Abstract.** The paper deals with the methodology of solving equations of heat and mass transfer on orthogonal local-adaptive grids by the discontinuous Galerkin method and Chombo library. Numerical schemes for solving the equations of gas dynamics and the equation of heat conduction are considered. The schemes of transmitting the values of grid functions from one level of adaptation to another are described. The algorithm of constructing the grid around the body of given geometry for external aerodynamics problems is included.

**Keywords:** discontinuous Galerkin method, structured grid, Chombo library, RKDG.

**Введение.** Задачи тепло- и массопереноса входят в число важнейших задач математической физики. Уравнения газовой динамики, описывающие процесс массопереноса, – одна из моделей механики сплошной среды. С их помощью поддается количественному и качественному описанию множество процессов, будь то обтекание тел жидкостью или газом, истечение газа из сопла. Теплоперенос и диффузия описываются уравнениями теплообмена.

Рассмотрим в данной статье решение таких уравнений с помощью разрывного метода Галёркина [1; 2]. На основе данного метода разработана методика для численного решения задач тепло- и массопереноса с использованием библиотеки Chombo [3]. Данная библиотека

содержит в себе набор инструментов для реализации методов конечных разностей и конечных элементов для решения дифференциальных уравнений в частных производных на блочно-структурных адаптивных прямоугольных сетках. Выбор именно этого вида сетки обусловлен тем, что при помощи адаптивных сеток возможно эффективно использовать компьютерные ресурсы и в значительной степени сократить объем используемой машинной памяти при решении многомерных задач. Кроме того, реализация данного подхода гораздо проще по сравнению с другими методами и может достичь высокого порядка точности [4].

**1. Решение задач газовой динамики разрывным методом Галёркина.** Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера для идеального газа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} F(u) = 0, \quad (1)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, F_x(u) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, F_y(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}$$

в области  $\Omega$  с начальным условием

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

и граничным условием

$$u(x, y, t) = g(x, y, t)$$

При  $(x, y) \in \gamma$ ,  $0 < t \leq T$ , где  $\gamma$  – границы области  $\Omega$ .

Введем в области  $\Omega$  структурированную прямоугольную сетку  $T_h$ , и в каждой ячейке  $T_i$  зададим базис  $\{\varphi_k\}_{k=0}^p$ . Приближенное решение системы (1) в ячейке  $T_i$  будем искать в виде:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^p u_k(t) \varphi_k(x). \quad (2)$$

Коэффициенты  $u_k(t)$  в (2) найдем из условия ортогональности невязки всем базисным функциям, получаемой после подстановки (2) в (1):

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dxdy + \iint_{T_i} \operatorname{div} F(U_h) \varphi_k dxdy = 0, \quad k = 0, \dots, p.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dxdy &= \iint_{T_i} \left( F(U_h) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + F(U_h) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) dxdy - \\ &\quad - \oint_{\partial T_i} \hat{F}(U_h) \varphi_k n_x + \hat{F}(U_h) \varphi_k n_y dl \\ &\quad k = 0, \dots, p. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначив за  $M$  матрицу масс, составленную из значений скалярных произведений базисных функций, за  $L(U_h)$  – правую часть (3), получим систему:

$$M \frac{\partial U_h}{\partial t} = L(U_h), \quad (4)$$

Запишем выражение для конкретной ячейки  $T_i$ . Пусть  $p = 2$  и базис имеет вид:

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = (x - x_c), \varphi_2 = (y - y_c) \quad (5)$$

где  $(x_c, y_c)$  – координаты центра ячейки.

Тогда приближенное решение принимает вид:

$$U_h = u_0 + u_1(x - x_c) + u_2(y - y_c) \quad (6)$$

Подставив данный вид решения в формулы (3) и (4), получим систему (4) в виде:

$$M \frac{dU_h}{dt} = - \left( \begin{array}{l} \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_x + \hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_y) dl \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(x - x_c)n_x + \hat{F}(U_h)(x - x_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(x - x_c)}{\partial x} dx dy \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(y - y_c)n_x + \hat{F}(U_h)(y - y_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(y - y_c)}{\partial y} dx dy \end{array} \right)$$

Дискретизация по времени осуществляется методом Эйлера, что приводит к схеме:

$$M \frac{U_h^{new} - U_h}{\Delta t} = - \left( \begin{array}{l} \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_x + \hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_y) dl \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(x - x_c)n_x + \hat{F}(U_h)(x - x_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(x - x_c)}{\partial x} dx dy \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(y - y_c)n_x + \hat{F}(U_h)(y - y_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(y - y_c)}{\partial y} dx dy \end{array} \right) \quad (7)$$

Решив систему (7) получим значение приближенного решения на новом временном слое.

**2. Решение задач теплопроводности разрывным методом Галёркина.** В случае двумерного уравнения теплопроводности имеем:

$$\rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} u) + f, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \quad (8)$$

с начальным условием  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

и граничным условием  $u(x, y, t) = g(x, y, t)$

при  $(x, y) \in \gamma, 0 < t \leq T$ .

Тогда уравнение (8) можно переписать в виде [5]:

$$\begin{cases} \rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k q_x + \frac{\partial}{\partial y} k q_y + f, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \\ q_x = \frac{\partial u}{\partial x}, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \\ q_y = \frac{\partial u}{\partial y}, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \end{cases}$$

Введем в области  $\Omega$  структурированную прямоугольную сетку  $T_h$ , и в каждой ячейке  $T_i$  зададим базис  $\{\varphi_k\}_{k=0}^p$  из пространства полиномов степени не выше  $K$ . Приближенное решение системы (1) в ячейке  $T_i$  будем искать в виде:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^p u_k(t) \varphi_k(x).$$

Совершая аналогичные преобразования, как и для случая уравнения газовой динамики, получим:

$$\begin{cases} \rho C_v \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dxdy = \iint_{T_i} \operatorname{div}(k(q_x + q_y)) \varphi_k dxdy + \iint_{T_i} f_h \varphi_k dxdy \\ q_x = \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial x} \varphi_k dxdy \\ q_y = \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial y} \varphi_k dxdy \end{cases},$$

$$k = 0, \dots, p$$

**3. Передачи сеточных данных между уровнями на локально-адаптивных прямоугольных сетках.** Локально-адаптивные сетки, которые измельчаются только в тех областях, где решение обладает большим градиентом, в большинстве случаев экономят вычислительные ресурсы и повышают скорость сходимости приближенного решения.

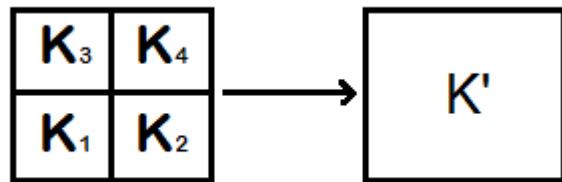


Рис. 1. Огрубление ячеек.

Когда имеется более мелкое разбиение сетки и необходимо перейти на более грубый уровень (см. рис. 1), то для получения решения в новой ячейке  $K'$  используются уравнения:

$$\begin{aligned}
 U_{K'}^{(0)} &= \frac{1}{4} \left( U_{K1}^{(0)} + U_{K2}^{(0)} + U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(1)} &= \frac{1}{8} \left( U_{K1}^{(1)} + U_{K2}^{(1)} + U_{K3}^{(1)} + U_{K4}^{(1)} \right) + \frac{3}{8} \left( -U_{K1}^{(0)} + U_{K2}^{(0)} - U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(2)} &= \frac{1}{8} \left( U_{K1}^{(2)} + U_{K2}^{(2)} + U_{K3}^{(2)} + U_{K4}^{(2)} \right) + \frac{3}{8} \left( -U_{K1}^{(0)} - U_{K2}^{(0)} + U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(3)} &= \frac{1}{16} \left( U_{K1}^{(3)} + U_{K2}^{(3)} + U_{K3}^{(3)} + U_{K4}^{(3)} \right) + \frac{3}{16} \left( -U_{K1}^{(2)} + U_{K2}^{(2)} - U_{K3}^{(2)} + U_{K4}^{(2)} \right) \\
 &\quad + \frac{3}{168} \left( -U_{K1}^{(1)} - U_{K2}^{(1)} + U_{K3}^{(1)} + U_{K4}^{(1)} \right) + \frac{9}{16} \left( U_{K1}^{(0)} - U_{K2}^{(0)} - U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(4)} &= \frac{1}{16} \left( U_{K1}^{(4)} + U_{K2}^{(4)} + U_{K3}^{(4)} + U_{K4}^{(4)} \right) + \frac{15}{32} \left( -U_{K1}^{(1)} + U_{K2}^{(1)} - U_{K3}^{(1)} + U_{K4}^{(1)} \right), \\
 U_{K'}^{(5)} &= \frac{1}{16} \left( U_{K1}^{(5)} + U_{K2}^{(5)} + U_{K3}^{(5)} + U_{K4}^{(5)} \right) + \frac{15}{32} \left( -U_{K1}^{(2)} - U_{K2}^{(2)} + U_{K3}^{(2)} + U_{K4}^{(2)} \right).
 \end{aligned}$$

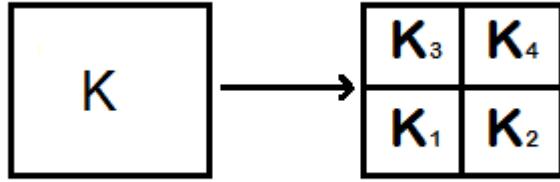


Рис. 2. Интерполяция ячейки.

Если нужно получить более точное решение, то, раздробив сетку (см. рис. 2), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 U_{K'_i}^{(0)} &= U_K^{(0)} + a_i U_K^{(1)} + b_i U_K^{(2)} + a_i b_i U_K^{(3)}, \\
 U_{K'_i}^{(1)} &= \frac{1}{2} U_K^{(1)} + (-1)^i a_i b_i U_K^{(3)} + a_i U_K^{(4)}, \\
 U_{K'_i}^{(2)} &= \frac{1}{2} U_K^{(1)} + (-1)^i |a_i b_i| U_K^{(3)} + b_i U_K^{(5)}, \\
 U_{K'_i}^{(3)} &= \frac{1}{4} U_K^{(3)}, \\
 U_{K'_i}^{(4)} &= \frac{1}{4} U_K^{(4)},
 \end{aligned}$$

$$U_{K'_i}^{(5)} = \frac{1}{4} U_K^{(5)},$$

где  $a_i = (-1)^{i+1} \frac{1}{2}, b_1 = b_2 = -\frac{1}{2}, b_3 = b_4 = \frac{1}{2}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

**4. Алгоритм заполнения полигонов.** Одним из наиболее простых объектов для моделирования задач внешней аэродинамики является профиль крыла, представляющий собой сечение крыла плоскостью, параллельной плоскости симметрии самолета. В ходе реализации метода Галёркина на локально-адаптируемых сетках возникает задача задания и загрузки геометрии области. При использовании прямоугольных двумерных сеток для задания областей можно воспользоваться алгоритмом заполнения полигонов.

Контур полигона задается вершинами, соединенными отрезками прямых – ребрами. Часто для заполнения полигона применяют алгоритм, идея которого – закрашивание фигуры отрезками прямых линий. Рассмотрим заполнение по горизонтали. Алгоритм представляет собой цикл вдоль оси  $y$ , в ходе которого происходит поиск точек пересечения горизонталей с линиями контура.

Обоснование этого алгоритма следует из топологического свойства контура фигуры. Оно заключается в следующем: любая прямая линия пересекает любой замкнутый контур четное количество раз. Если фигура выпуклая, то точек пересечения с любой прямой всегда две.

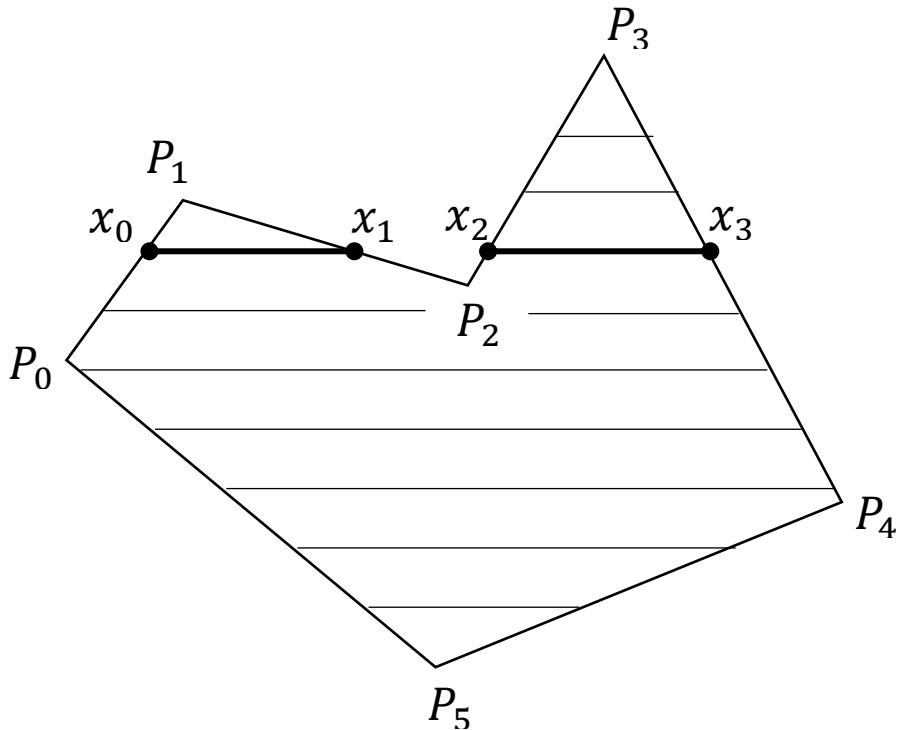


Рис. 3. Точки пересечения прямых с контуром полигона.

Во время поиска точек пересечения прямых с контуром полигона нужно обратить внимание на особые точки. Если горизонталь имеет координату ( $y$ ), которая совпадает с координатой  $y_i$  вершины  $P_i$ , тогда необходимо рассмотреть то, как горизонталь проходит через вершину. Когда горизонталь пересекает контур, как в точках  $P_0$  или  $P_4$ , то в массив попадает только одна точка пересечения. В случае, если горизонталь касается вершины контура (т.е. вершина является локальным минимумом или максимумом, как в вершинах  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  или  $P_5$ ), то координата точки касания или не сохраняется, или сохраняется в массив дважды. Вследствие выполнения этого условия, в массиве хранится четное количество точек пересечения.

**Заключение.** С увеличением числа различных задач прикладного характера повышаются требования к эффективности и точности численных методов, применяемых для решения уравнений. Благодаря тому, что рассмотренный в статье разрывный метод Галёркина имеет конечно элементную структуру, следует отметить ряд его преимуществ перед другими численными методами, применяемыми в данной области: 1) разрывный метод Галеркина обладает гибкостью и хорошей приспособленностью в условиях локальных сгущений сетки и при локальном повышении порядков базисных функций; 2) метод позволяет работать со сложными и геометрически разнородными областями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection // Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics). – 1998. – Vol. 1697. – P. 151–268.
2. Jianming Liu, Jianxian Qiu, Ou Hu, Ning Zhao, Mikhail Goman, Xinkai Li Adaptive Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for complex geometry problems on Cartesian grid // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2013. – No.73. – P. 847–868.
3. Adams M., Colella P., Graves D. T., etc., Chombo Software Package for AMR Applications - Design Document / Lawrence Berkeley National Laboratory Technical Report LBNL-6616E, 2015. – 204 p.
4. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма для прямого численного моделирования сложных газодинамических течений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2008. – Т.10, № 1. – С. 137–146.
5. Масягин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 59–65.

**БОБРЕНЁВА Ю. О., ГУБАЙДУЛЛИН И. М., ЖАЛНИН Р. В.**  
**НЕЯВНАЯ СХЕМА НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА**  
**ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ<sup>1</sup>**

**Аннотация.** В работе для моделирования температурного поля в системе «скважина-трещина-пласт» предложена неявная схема, основанная на разрывном методе Галёркина. Рассматривается двумерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами, равными единице. Получены выражения для определения элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

**Ключевые слова:** разрывный метод Галёркина, неявная схема, термометрия, DG.

**BOBRENEVA YU. O., GUBAYDULLIN I. M., ZHALNIN R. V.**  
**IMPLICIT SCHEME BASED ON DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD**  
**FOR MODELING TEMPERATURE IN OIL RESERVOIR**

**Abstract.** The implicit scheme is developed to simulate the temperature in the "well-fracture-layer" system. The scheme is based on the discontinuous Galerkin method. The two-dimensional heat conduction equation with constant coefficients equal to unity is considered. The expressions to determine matrix elements of the system of linear equations are obtained.

**Keywords:** discontinuous Galerkin method, implicit scheme, thermometry, DG.

При гидродинамических исследованиях скважин, особенно для скважин с гидравлическим разрывом пласта [1], необходимо совместное рассмотрение гидродинамического состояния системы «скважина-пласт» с температурным полем, или термометрией. Термометрия исторически является первым методом исследования скважин. Основным параметром, который несет информационную нагрузку в данном методе, является температура. Профиль температуры зависит от скорости фильтрации, градиента давления, а также свойств жидкости и породы [2; 3]. Для детального изучения термогидродинамических процессов в пласте со скважиной необходима разработка эффективного вычислительного алгоритма для численного моделирования совместной работы системы «скважина-трещина-пласт» [4]. Как известно, процессы теплопередачи описываются уравнениями параболического типа. При этом для использования алгоритмов сквозного счета необходимо строить сетки, имеющие достаточно мелкие ячейки в области, соответствующей трещине. Это накладывает существенные ограничения на шаг дискретизации по времени и, тем

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-31-50018 мол\_нр).

самым, требует большого числа итераций. Поэтому возникает необходимость построения неявных схем, для которых такое ограничение отсутствует.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in G, t > 0, u = u(t, x, y); \quad (1)$$

$$u = \varphi(x, y), (x, y) \in \partial G, t > 0; u|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (2)$$

Для дискретизации разрывным методом Галеркина запишем (1) в виде системы уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= 0, \\ q_x + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ q_y + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Покроем рассматриваемую область треугольной сеткой и введем в каждом треугольнике  $\Delta_i$  систему базисных функций

$$\{\varphi_m^i\} \subset P^K(x, y), \quad (4)$$

$$m = 0, \dots, N-1, N = \frac{(K+2)(K+1)}{2}, P^K(x, y) - \text{пространство полиномов степени не выше } K.$$

Решение системы (3) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i(t) \varphi_l^i(x, y), \\ q_x^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i(t) \varphi_l^i(x, y), \\ q_y^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i(t) \varphi_l^i(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем проекцию уравнений (3) на пространство кусочно-непрерывных полиномов с базисом (4). Для этого подставим (5) в (3) и умножим скалярно каждое уравнение на базисную функцию:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \varphi_m^i \, dx \, dy + \int_{\Delta_i} \left( \frac{\partial q_x^i}{\partial x} + \frac{\partial q_y^i}{\partial y} \right) \varphi_m^i \, dx \, dy = 0 \\
& \int_{\Delta_i} q_x^i \varphi_m^i \, dx \, dy + \int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \varphi_m^i \, dx \, dy = 0, \\
& \int_{\Delta_i} q_y^i \varphi_m^i \, dx \, dy + \int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial y} \varphi_m^i \, dx \, dy = 0.
\end{aligned}$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial u_l^i}{\partial t} \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i \, dx \, dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{q_x^i} \cdot n_x + \widehat{q_y^i} \cdot n_y) \varphi_m^i \, d\gamma - \\
& - \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} \, dx \, dy - \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} \, dx \, dy = 0, \\
& \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i \, dx \, dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{u^i} \cdot n_x \varphi_m^i \, d\gamma - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} \, dx \, dy) = 0, \\
& \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i \, dx \, dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{u^i} \cdot n_y \varphi_m^i \, d\gamma - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} \, dx \, dy) = 0.
\end{aligned}$$

Дискретизацию по времени выполним по неявной схеме. Значения на границе ячеек положим равным полусумме значений из ячеек, которые разделяет данное ребро. Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i \, dx \, dy + \\
& + \sum_{k \in \text{neigh}(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left( \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i \, d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^k n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i \, d\gamma + \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^{N-1} q_{yl}^i n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i \, d\gamma + \sum_{i=0}^{N-1} q_{yl}^k n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i \, d\gamma \right) - \\
& - \sum_{i=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} \, dx \, dy - \sum_{i=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} \, dx \, dy = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i \, dx \, dy,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \\
& + \sum_{k \in \text{neigh}(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left( \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} u_l^k n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
& - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dx dy = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \\
& + \sum_{k \in \text{neigh}(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left( \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} u_l^k n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
& - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dx dy = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь  $\text{neigh}(\Delta_i)$  – множество номеров соседних ячеек ячейки  $\Delta_i$ ;  $\gamma_{ik}$  – ребро между ячейками с номерами  $i$  и  $k$ ;  $\tilde{u}^i$  – значение на предыдущем слое по времени.

Таким образом, получили систему линейных алгебраических уравнений:

$$Ay = b, \tag{9}$$

где матрица  $A$  – состоит из блоков размера  $3N \times 3N$ , столбец  $y$  состоит из блоков  $y^i$ , а столбец  $b$  – из блоков  $b^i$ , соответствующих  $i$  – ой ячейке сетки:

$$y = \begin{pmatrix} u_0^i \\ \vdots \\ u_{N-1}^i \\ q_{x0}^i \\ \vdots \\ q_{xN-1}^i \\ q_{y0}^i \\ \vdots \\ q_{yN-1}^i \end{pmatrix}, \quad b^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_0^i dx dy \\ \vdots \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_{N-1}^i dx dy \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $i = 0, \dots, M-1$ ,  $M$  – количество ячеек расчетной сетки.

Для решения системы (9) можно воспользоваться библиотекой HYPRE [6,7].

Таким образом, предложен вычислительный алгоритм, основанный на неявной схеме для разрывного метода Галёркина, предназначенный для моделирования температурных

полей в системе «скважина-трещина-пласт». Неявная схема позволяет проводить расчеты с временным шагом, ограниченным только условием требуемой точности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малышев А. Г. и др. Анализ влияния технологических факторов и механических свойств горных пород на эффективность ГРП // Нефть Сургута. – М.: Нефтяное хозяйство, 1997. – С. 224-237.
2. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. – 238 с.
3. Рамазанов А. Ш., Нагимов В. М. Аналитическая модель для расчета температурного поля в нефтяном пласте при нестационарном притоке жидкости // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2007. – № 1. – С. 1–9.
4. Губайдуллин И. М., Линд Ю. Б., Коледина К. Ф. Методология распараллеливания при решении многопараметрических обратных задач химической кинетики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13, № 2 (26). – С. 28–36.
5. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Панюшкина Е. Н. О применении разрывного метода Галеркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6. – С. 874.
6. Falgout R. B., Yang U. M. Hypre: a Library of High Performance Preconditioners // Computational Science / P.M.A. Sloot, C.J.K. Tan, JJ Dongarra, A.G. Hoekstra (Eds.). – Springer-Verlag, 2002. – Vol. 2331. – P. 632–641.
7. Falgout R. D., Jones J. E., Yang U. M. The Design and Implementation of hypre, a Library of Parallel High Performance Preconditioners // Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers / A.M. Bruaset, A. Tveito (Eds.). – Springer-Verlag, 2006. – Vol. 51. – P. 267–294.

ЧЕЛЫШОВ М. С., ШАМАНАЕВ П. А.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО  
ФУНКЦИОНАЛА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ

**Аннотация.** Описывается алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями. Для решения системы линейных алгебраических уравнений специальной структуры применяется метод ортогональной циклической редукции.

**Ключевые слова:** задача минимизации с нелинейными ограничениями, квадратичный функционал, ортогональная циклическая редукция.

CHELYSHOV M. S., SHAMANAEV P. A.

QUADRATIC FUNCTIONAL NONLINEAR MINIMIZATION PROBLEM SOLVING  
ALGORITHM BY ORTHOGONAL CYCLIC REDUCTION METHOD

**Abstract.** The article describes an algorithm for solving the quadratic functional nonlinear minimizing problem. The orthogonal cyclic reduction method is applied for the solution of the system of linear algebraic equations of special structure.

**Keywords:** nonlinear minimization problem, quadratic functional, orthogonal cyclic reduction.

При решении задач идентификации параметров систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе экспериментальных данных [5; 6] возникает задача минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями:

$$\begin{cases} \min_z m(z), \quad m(z) = \frac{1}{2} (H_2 z, z) - (H_2 \tilde{z}, z), \\ Tz = h, \\ g(z) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $z \in \Re^{Nn+p}$  — вектор неизвестных параметров,  $\tilde{z} \in \Re^{Nn+p}$  — вектор известных параметров,

$$H_2 = \frac{1}{N} H_1^T H_1,$$

где  $H_1 = [I_{Nn} : O_{Nn \times p}]$ ,  $I_{Nn}$  — единичная  $(Nn \times Nn)$ -матрица,  $O_{Nn \times p}$  — нулевая  $(Nn \times p)$ -матрица,

$$T = [T_1 : T_2 : \dots : T_N : T_\theta],$$

где  $T_1, T_N$  — постоянные  $(q \times n)$ -матрицы,  $T_\theta$  — постоянная  $(q \times p)$ -матрица,  $T_i$ ,  $i = \overline{2, N-1}$  — нулевые  $(q \times n)$ -матрицы,  $h \in \mathfrak{R}^q$  — вектор известных параметров,

$$g(z) = \text{column}(g_1(z), \dots, g_{N-1}(z)),$$

$$g_i(z) = \text{column}(g_{i,1}(z), \dots, g_{i,n}(z)), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Предполагается, что матрица Якоби вектор-функции нелинейных ограничений имеет специальную структуру следующего вида:

$$\frac{\partial g(z^{(r)})}{\partial z} \equiv A = \begin{pmatrix} D_1 & K_1 & & & E_1 \\ & D_2 & K_2 & & E_2 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & D_{N-1} & K_{N-1} & E_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

где  $D_l, K_l \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $E_l \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $l = \overline{1, N-1}$ .

Для задачи (1) введем функцию Лагранжа:

$$L(z) = m(z) + (\lambda, g(z)) + (\mu, Tz - h),$$

где  $\lambda \in \mathfrak{R}^{(N-1)n}$ ,  $\mu \in \mathfrak{R}^q$ , и разложим её в ряд Тейлора в точке  $z^{(r)}$ :

$$L(z) = L(z^{(r)}) + l_2(z) + o\left(\|z - z^{(r)}\|^2\right),$$

где

$$l_2(z) = l_1(z) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 L(z^{(r)})}{\partial z^2} (z - z^{(r)}) (z - z^{(r)}) \right), \quad l_1(z) = \left( \frac{\partial L(z^{(r)})}{\partial z}, z - z^{(r)} \right) + L(z^{(r)}),$$

$$\frac{\partial L(z^{(r)})}{\partial z} = H_2(z^{(r)} - \tilde{z}) + \lambda^T \frac{\partial g(z^{(r)})}{\partial z} + \mu^T T, \quad \frac{\partial^2 L(z^{(r)})}{\partial z^2} = H_2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{i,j}^T \frac{\partial^2 g_{i,j}(z^{(r)})}{\partial z^2}, \quad (3)$$

Тогда задача безусловной минимизации:

$$\min_z L(z)$$

аппроксимируется последовательностью квадратичных задач минимизации:

$$\begin{cases} r = 0, \\ z^{(0)}, \\ \begin{cases} s^{(r)} = \arg \min_s l_2(s^{(r)} + z^{(r)}), \\ z^{(r+1)} = z^{(r)} + s^{(r)}, \\ r = r + 1, \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

где  $s^{(r)} = \text{column}(dx_1, dx_2, \dots, dx_N, d\theta) \in \mathfrak{R}^{Nn+p}$ .

При каждом фиксированном  $r$  задача (4) сводится к решению системы

$$\begin{cases} \frac{\partial l_2(s^{(r)} + z^{(r)})}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial l_1(s^{(r)} + z^{(r)})}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial l_1(s^{(r)} + z^{(r)})}{\partial \mu} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

С учетом (3) систему (5) можно записать в виде:

$$\begin{cases} Hs^{(r)} + T^T \mu + A^T \lambda = -H_2(z^{(r)} - \tilde{z}), \\ Ts^{(r)} = h - Tz^{(r)}, \\ As^{(r)} = -g(z^{(r)}), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$H = H_2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}^T \frac{\partial^2 g_{i,j}(z^{(r)})}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Приведем общий алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями.

1. Задание начальных значений следующих параметров:

$$z^{(0)} \in \mathbb{R}^{Nn+p}, \lambda^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^{(N-1)n}, \mu^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^q, \varepsilon > 0, r = 0 — \text{шаг алгоритма.}$$

2. Вычисление матриц Якоби и Гессе. Вычислим матрицы

$$D_l, K_l \in \mathbb{R}^{n \times n}, E_l \in \mathbb{R}^{n \times p}, l = \overline{1, N-1}.$$

и сформируем матрицу Якоби согласно (2)

$$A(z^{(r)}, \theta^{(r)}) = \frac{\partial g(z^{(r)}, \theta^{(r)})}{\partial z}.$$

Вычислим матрицу Гессе согласно (7)

$$H(z^{(r)}, \theta^{(r)}, \lambda^{(r)}) \equiv \frac{\partial^2 L(z^{(r)}, \theta^{(r)}, \lambda^{(r)})}{\partial z^2} = H_2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}^T \frac{\partial^2 g_{i,j}(z^{(r)})}{\partial z^2}.$$

3. Уменьшение размерности системы (6) с использованием метода ортогональной циклической редукции [1].

3.1. Прямой ход метода ортогональной циклической редукции.

Вычислим  $A^{(k)}$  и  $g^{(k)}$ :

$$A^{(k)} = P_k(Q^{(k)} A^{(k-1)}) R_k, \quad k = \overline{1, k_{\max}},$$

где  $A^0 = A$ ,  $Q^{(k)}$  — матрица ортогональных преобразований,  $P_k, R_k$  — матрицы преобразований, действие которых эквивалентно вычеркиванию четных строк и нечетных столбцов соответственно.

$$g^{(k)}(z^{(r)}) = P_k(Q^{(k)} g^{(k-1)}(z^{(r)})), \quad k = \overline{1, k_{\max}},$$

$$\text{где } g^{(0)}(z^{(r)}) = g(z^{(r)}).$$

Тогда третье уравнение системы (10) редуцируется к системе:

$$A^{(k_{\max})} s^{(k_{\max})} = -g^{(k_{\max})}(z^{(k)}),$$

где

$$s = R s^{(k_{\max})}, \quad R = R_1 R_2 \dots R_{k_{\max}},$$

$$\tilde{A} = A^{(k_{\max})} = [D_1^{(k_{\max})} : K_1^{(k_{\max})} : E_1^{(k_{\max})}], \quad s^{(k_{\max})} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_N \\ d\theta \end{pmatrix}.$$

### 3.2. Вычисление матриц

$$\tilde{H} = R^T H R, \quad \tilde{T} = [T_1 : T_N : T_\theta], \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{A} \end{pmatrix},$$

и вектор-функции

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} h - T z^k \\ -g(z^k)^{r_{\max}} \end{pmatrix}.$$

3.3.  $LQ$ -факторизация [3]. Методом  $LQ$ -факторизации находим матрицу  $Z$ , такую что  $\tilde{B}Z = 0$ .

3.4. Нахождение решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$BB^T \tilde{s}_B = \tilde{h}$$

### 3.5. Вычисление матрицы

$$\tilde{H}_z = Z^T \tilde{H} Z,$$

и вектор-функций

$$w^{(r)} = \tilde{B}^T \tilde{s}_B, \quad \tilde{h}_z^{(r)} = Z^T [R^T H_2 (z^{(r)} - \tilde{z}) + \tilde{H} w^{(r)}].$$

3.6. Нахождение решений системы линейных алгебраических уравнений:

$$\tilde{H}_z \tilde{s}_z = -\tilde{h}_z^{(r)}.$$

### 3.7. Вычисление вектор-функции

$$\tilde{s} = w^{(r)} + Z \tilde{s}_z.$$

3.8. Обратный ход метода ортогональной циклической редукции. Восстанавливаем компоненты  $dx_i, i = \overline{2, N-2}$  вектора  $s^{(r)}$  по формуле:

$$dx_i = V_l^{(k)} dx_{m-p} + U_l^{(k)} x_{m+p} + W_l^{(k)} d\theta + q_l^{(k)}, \quad k = k_{\max}, \dots, 1, \quad l = 2, \dots, \frac{N-1}{2^{k-1}},$$

где  $p = 2^{k-1}$ ,  $m = p \cdot (l-1) + 1$ ,  $V_l^{(k)}$ ,  $U_l^{(k)}$ ,  $W_l^{(k)}$ ,  $q_l^{(k)}$  — матрицы и векторы,

получающиеся в результате применения ортогонального преобразования.

4. Вычисление множителей Лагранжа для следующего шага алгоритма.

Множители Лагранжа находим как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} T \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^T & A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{(r+1)} \\ \lambda^{(r+1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Hs^{(r)} - H_2(z^{(r)} - \tilde{z}) \end{bmatrix}.$$

5. Вычисление нового приближенного решения:

$$z^{(r+1)} = z^{(r)} + s^{(r)}.$$

6. Увеличение номера шага алгоритма:  $r=r+1$ .

7. Проверка условия выхода из алгоритма:

Если выполняется условие:

$$\left\| \frac{\partial L(z^{(r)}, \theta^{(r)}, \lambda^{(r)}, \mu^{(r)})}{\partial z} \right\| < \varepsilon,$$

то найденное приближение  $z^{(r+1)}$  на данном шаге алгоритма будем считать приближенным решением задачи (1) с заданной точностью  $\varepsilon$ , иначе переходим к пункту 2 данного алгоритма.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Атряхин В. А., Чельшов М. С., Шаманаев П. А. Применение метода ортогональной циклической редукции для решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицами специального вида [Электронный ресурс] // Огарев-online. Раздел "Физико-математические науки". – 2014. – № 19. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/primenenie-metoda-ortogonalnojj-ciklicheskojj-redukcii-dlya-resheniya-sistem-linejnykh-algebraicheskikh-uravnenijj-s-matricami-specialnogo-vida>.
2. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / пер. с англ. М. Базара. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация / пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
5. Чельшов М. С., Шаманаев П. А. Идентификация параметров динамических систем на основе экспериментальных данных // Актуальные вопросы прикладной математики и информатики: сб. научных трудов. – Саранск: СВМО, 2015. – С. 39–42.
6. Li Zh., Osborne M. R., Prvan T. Parameter estimation of ordinary differential equations // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2005. – No. 25. – P. 264–285.

ТАЛНОВА Е. А., ТАЛНОВА Г. Н.

## ПЛОТНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ РОЛЬ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ<sup>1</sup>

**Аннотация.** В 1930 году советский ученый Л. Г. Шнирельман впервые начал рассматривать плотность последовательности как меру «густоты» числовых последовательностей. Тем самым многие классические задачи теории чисел получили более изящные формулировки и доказательства. В данной работе рассматривается понятие плотности последовательности, доказываются основные его свойства. Также приводятся примеры, которые иллюстрируют вычисление плотности последовательности.

**Ключевые слова:** последовательность, плотность последовательности, теория чисел, простое число.

**TALANOVA E. A., TALANOVA G. N.**

## **SEQUENCE DENSITY AND ITS ROLE IN NUMBER THEORY**

**Abstract.** In 1930 the Soviet scientist L. G. Shnirel'man first began to consider the sequence density a measure of "density" of numerical sequences. Consequently, many of the classic problems of the number theory got more elegant formulations and proofs. This paper considers the concept of sequence density and proves its basic properties. The examples illustrating the sequence density calculation are included.

**Keywords:** sequence, sequence density, number theory, prime number.

**Введение.** Как известно, многие утверждения теории чисел при всей изящности формулировки имеют громоздкое и, зачастую, трудное доказательство. Например, теорема Лагранжа о возможности представить всякое натуральное число в виде суммы четырех квадратов целых чисел, или результат Виноградова о том, что любое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых [1, с. 14]. В 1930 году советский математик Л. Г. Шнирельман впервые связал эти и некоторые другие результаты с так называемой «густотой» последовательности чисел [2, с. 17]. В качестве мерки «густоты» он предложил плотность последовательности. Были описаны ее свойства, выведена связь между плотностью суммы последовательностей и плотностями последовательностей-слагаемых. Новый объект и его интересные свойства позволили более удобно формулировать некоторые классические утверждения теории чисел. В приведенных выше примерах, таким образом, устанавливается, что сумма определенного числа

---

<sup>1</sup> Авторы благодарят О. В. Починку, д.ф.-м.н., профессора, заведующую кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород) за полезные обсуждения.

последовательностей представляет собой последовательность, охватывающую целиком или почти целиком некоторый класс чисел (все натуральные числа, все достаточно большие нечетные числа).

Методы, основанные на понятии плотности последовательности, имеют важное значение в прикладных областях теории чисел, таких как алгоритмической теории чисел и криптографии. В частности, в нахождении всех простых чисел, меньших определенной границы, или построении чисел, не имеющих больших простых факторов. В других приложениях необходимо исследовать время работы нескольких алгоритмов факторизации, которое напрямую зависит от распределения простых чисел вида  $2p + 1$ ,  $p$  – простое число. В этом случае методы, основанные на понятии плотности последовательности, могут уменьшить продолжительность работы этих алгоритмов.

В данной работе доказываются некоторые свойства плотности последовательности и в качестве иллюстрации приводится несколько примеров вычисления плотности числовых последовательностей.

**1. Определение плотности последовательности.** Обозначим  $X \subset \mathbb{R}$  – подмножество действительных чисел,  $x \in X$  – элементы множества  $X$ . Напомним определение точной нижней грани множества.

**Определение 1.** Число  $B$  называется точной нижней гранью множества  $X$ , если:

- 1) для любого  $x \in X$ ,  $x \geq B$ ,
- 2) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $x \in X$  такой, что  $x < B + \varepsilon$  [3, с. 39].

Обозначим  $\inf X$  – точную нижнюю грань множества  $X$ .

Пусть  $0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – числовая последовательность  $(A)$ , в которой все  $a_n \in \mathbb{N}$ , и  $a_n < a_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Обозначим  $A(n)$  – число натуральных чисел последовательности  $(A)$ , непревосходящих  $n$  (нуль при этом не считается), так что  $0 \leq A(n) \leq n$ , вследствие чего  $0 \leq \frac{A(n)}{n} \leq 1$ . Дробь  $\frac{A(n)}{n}$ , которая для разных  $n$  имеет разные значения, рассматривается как средняя плотность последовательности  $(A)$  на отрезке натурального ряда от 1 до  $n$ . Точную нижнюю грань всех значений этой дроби Л.Г. Шнирельман предложил назвать плотностью последовательности  $(A)$ .

**Определение 2.** Плотностью числовой последовательности  $(A)$  называется  $\inf \frac{A(n)}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$  [2, с. 18]. Обозначать эту плотность было предложено  $d(A)$ .

**2. Свойства плотности последовательности.** Приведем основные свойства плотности последовательности и докажем некоторые из них.

**Свойство 1.** Если  $a_1 > 1$ , то  $d(A) = 0$ .

**Свойство 2.** Если последовательность, начиная с  $a_1$ , есть арифметическая прогрессия с первым членом 1 и разностью  $r$ , то  $d(A) = \frac{1}{r}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность  $(A) = \{0; 1; 1+r; 1+2r; \dots; 1+kr; \dots, k \in \mathbb{N}\}$  и последовательность дробей  $(A_n) = \left\{ \frac{A(n)}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ . Последовательность  $(A_n)$  имеет вид  $\left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{r-1}; \frac{1}{r}; \frac{2}{1+r}; \frac{2}{r+2}; \dots; \frac{2}{2r-1}; \frac{1}{r}; \frac{3}{1+2r}; \frac{3}{2r+2}; \dots; \frac{3}{3r-1}; \frac{1}{r}; \dots; \frac{n+1}{1+nr}; \dots \right\}$ .

Докажем по определению, что  $\inf A_n = \frac{1}{r}$ . Для этого сравним члены последовательности  $(A_n)$  с  $\frac{1}{r}$ .  $1 \geq \frac{1}{r}$  для любого  $r \in \mathbb{N}$ ;  $\frac{1}{r-k} \geq \frac{1}{r}$  для  $r \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, r > k$ .

Рассмотрим разность  $\frac{n+1}{1+nr} - \frac{1}{r} = \frac{r(n+1)-(1+nr)}{(1+nr)r} = \frac{r-1}{(1+nr)r} \geq 0$  для  $r \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ .

Значит  $\frac{n+1}{1+nr} \geq \frac{1}{r}$  для  $r \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ . То есть, для любого  $a_n \in A_n$  верно неравенство  $a_n \geq \frac{1}{r}$ .

Условие (1) определения 1 выполнено.

Теперь докажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $n \in \mathbb{N}$  такой, что и для любого  $n_0 > n$ ,  $a_{n_0} < \frac{1}{r} + \varepsilon$ .

Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и выясним, при каких  $n \in \mathbb{N}$  будет выполняться неравенство  $a_n < \frac{1}{r} + \varepsilon$ .

Для  $a_n = \frac{n+1}{1+nr}$ ;  $\frac{n+1}{1+nr} < \frac{1}{r} + \varepsilon$ ;  $\frac{n+1}{1+nr} - \frac{1}{r} < \varepsilon$ ;  $\frac{r-1}{(1+nr)r} < \frac{r-1}{nr^2} < \frac{r}{nr^2}$ ;  $\frac{r}{nr^2} = \frac{1}{nr} < \frac{1}{nr} + \varepsilon$ . Значит,  $n > \frac{1}{r\varepsilon}$ . Возьмем  $n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{r\varepsilon} \right] + 1$ , где  $\left[ \frac{1}{r\varepsilon} \right]$  - целая часть дроби  $\frac{1}{r\varepsilon}$ .

Таким образом, условие (2) определения 1 также выполнено. Следовательно,  $d(A) = \inf A_n = \frac{1}{r}$ .

**Свойство 3.** Плотность всякой геометрической прогрессии равна нулю.

**Доказательство.** Пусть имеется последовательность

$(A) = \{0; b; qb; q^2b; \dots; q^n b; \dots\}$ . Рассмотрим последовательность дробей

$(A_n) = \left\{ \frac{A(n)}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ . При  $b > 1, q > 1$  дробь  $\frac{A(1)}{1} = 0$  и, значит,  $\inf A_n = d(A) = 0$ .

При  $b = 1, q > 1$  последовательность  $(A)$  имеет вид  $\{0; 1; q; q^2; \dots; q^n; \dots\}$ . Тогда  $(A_n)$  имеет вид  $\left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{q-1}; \frac{2}{q}; \frac{2}{q+1}; \dots; \frac{2}{q^2-1}; \frac{3}{q^2}; \frac{3}{q^2+1}; \dots; \frac{n}{q^{n-1}}; \frac{n}{q^{n-1}+1}; \dots; \frac{n}{q^{n-1}+k}; \dots \right\}$ , где  $1 \leq k \leq q^{n-1} - 1$ . Докажем, что  $\inf a_n = 0$ .

Очевидно, что все члены последовательности  $(A_n)$  положительны.

Найдем номер  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такой, что  $a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$ . Рассмотрим неравенство  $a_n < \varepsilon$ .

$$a_n < \frac{n}{q^{n-1}} < \frac{n}{n^2}.$$

$\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}; \frac{1}{n} < \varepsilon$ ; значит  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . В качестве подходящего номера возьмем  $n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ , где  $\left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$  – целая часть дроби  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Итак,  $\inf A_n = d(A) = 0$ .

**Свойство 4.** Плотность ряда последовательных квадратов равна нулю.

**Доказательство.** Ряд последовательных квадратов представляет собой последовательность  $(A) = \{0; 1^2; 2^2; 3^2; \dots; n^2; \dots\}$ . Тогда  $(A_n) = \left\{ \frac{A(n)}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$  имеет вид  $\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{2^2}; \frac{2}{2^2+1} \dots; \frac{2}{3^2-1}; \frac{3}{3^2}; \frac{3}{3^2+1}; \dots; \frac{n-1}{n^2-1}; \frac{n}{n^2}; \dots; \frac{n}{n^2+k}; \dots\}$ , где  $0 \leq k \leq n^2 - 1$ .

Выясним, при каком номере  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  выполняется  $a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$ .

Рассмотрим  $\frac{n}{n^2+k} < \frac{n}{n^2}$ ;  $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ ;  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , значит  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Снова в качестве подходящего номера возьмем  $n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ , где  $\left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$  – целая часть дроби  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Итак,  $\inf A_n = d(A) = 0$ .

**Свойство 5.** Для того, чтобы последовательность  $(A)$  содержала весь натуральный ряд необходимо и достаточно, чтобы  $d(A) = 1$ .

**Свойство 6.** Если  $d(A) = 0$ , и  $(A)$  содержит число 1, то при любом  $\varepsilon > 0$  можно найти сколь угодно большое число  $N$ , для которого  $A(N) < \varepsilon N$ .

**Доказательство.** Пусть последовательность  $(A) = \{0; 1; n_3; n_4; \dots; n_k; \dots\}$  и ее плотность  $d(A) = 0$ . Тогда  $\frac{A(1)}{1} = 1$ ,  $\inf \frac{A(n)}{n} = 0$ , то есть для любого малого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что  $\frac{A(N)}{N} < \varepsilon$ . Откуда  $A(N) < \varepsilon N$  для достаточно больших  $N$ .

**3. Примеры вычисления плотности последовательности.** В качестве иллюстрации определения и свойств плотности последовательности найдем плотность множества пар вида: а)  $(3n-2, 4k-3)$ , б)  $(2^n, 4k-3)$ , где  $n$  и  $k$  независимо пробегают  $\mathbb{N}^2$ .

Решение: а) пары вида  $(3n-2, 4k-3)$  содержат члены арифметических прогрессий, начинающихся с 1. Плотность последовательности с общим членом  $3n-2$ , согласно второму свойству, равна  $\frac{1}{3}$ . Плотность последовательности с общим членом  $4k-3$  равна  $\frac{1}{4}$ . Так как по условию  $n$  и  $k$  независимо пробегают  $\mathbb{N}^2$ , то плотность последовательности пар  $(3n-2, 4k-3)$  равна  $\frac{1}{12}$ ;

б) пары вида  $(2^n, 4k-3)$  содержат члены геометрической прогрессии  $2^n$ , для которой ранее было выяснено, что плотность ее равна 0 (свойство 3). Поэтому плотность последовательности пар  $(2^n, 4k-3)$  также равна 0.

При помощи свойств, доказанных в данной работе, был сделан вывод о том, что плотность суммы любых двух числовых последовательностей не меньше, чем сумма их

плотностей, уменьшенная на произведение этих плотностей. Он носит название леммы Шнирельмана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
2. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. – М.: Наука, 2003. – 64 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах): учебник для студентов университетов и вузов. Т. I. – М.: Высш. школа, 1981. – 687 с.

**КУРЕНКОВ Е. Д., ПОЧИНКА О. В.**  
**ДИНАМИКА ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА РЁЛО<sup>1</sup>**

**Аннотация.** В работе исследовано однопараметрическое семейство траекторий движения точек треугольника Рёло, расположенных на его оси симметрии, при качении его по квадрату. Найдены все бифуркационные значения параметра, при прохождении через которые происходит качественное изменение траектории. Установлены компоненты, из которых состоят траектории, определено их количество и их уравнения. При всех значениях параметра, превышающих первое бифуркационное значение, рассчитано отношение площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой, к площади описанного вокруг фигуры квадрата. Найдено лучшее приближение к квадрату.

**Ключевые слова:** треугольник Рёло, бифуркационные параметры, траектория.

**KURENKOV E. D., POCHINKA O. V.**  
**DYNAMICS OF POINTS IN REULEAUX TRIANGLE**

**Abstract.** The paper studies a one-parametric family of trajectories of points in the Reuleaux triangle formed by its rolling within a square. The bifurcation values that determine the qualitative behavior of the trajectory are found. The trajectory components, their number and equations are determined. For all values that are greater than the first bifurcation value a ratio of an area of a figure's square bounded by the trajectory and its circumscribed square area is calculated. The best approximation to a square is found.

**Keywords:** Reuleaux triangle, bifurcation, trajectory.

### **1. Введение и формулировка результатов.**

Фигуры постоянной ширины – это фигуры, способные вращаться внутри квадрата, одновременно касаясь всех его сторон [1]. Самая известная из таких фигур – треугольник Рёло (см. рис. 1). С помощью треугольника Рёло были созданы механизмы, использующие сложные виды движения, например: дрель Гарри Уаттса, позволяющая сверлить квадратные отверстия; роторно-поршневой двигатель Ванкеля; грейферные механизмы. Отверстия, сделанные сверлом Уаттса, отличаются от квадрата скругленными углами [3].

---

<sup>1</sup> Исследование проведено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект "Топологические методы в динамике", Т3-98) при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-03687-а, грант 16-51-10005-Ко\_а).

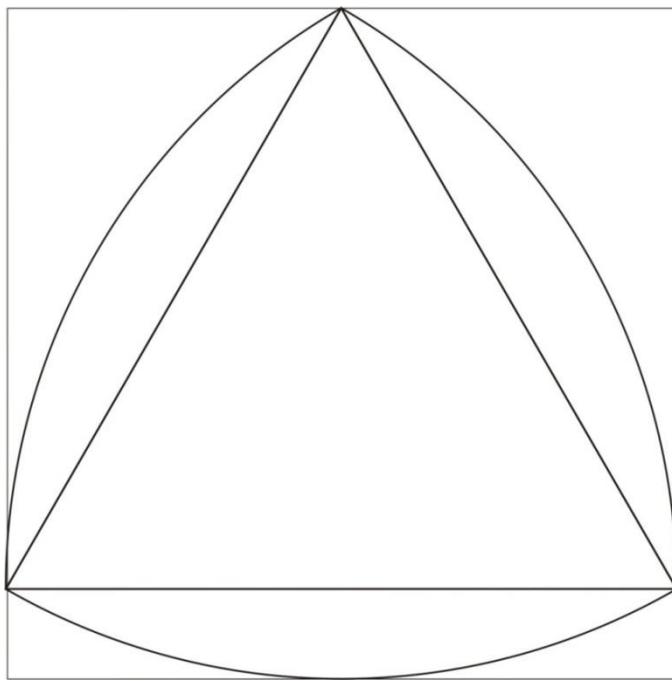


Рис. 1. Треугольник Рёло.

В ходе исследования были получены следующие результаты:

1) Получено уравнение траектории движения точек треугольника Рёло, лежащих на биссектрисе данного треугольника, при качении его по квадрату. А именно, пусть  $t$  – параметр, определяющий положение точки на биссектрисе треугольника Рёло, численно равный отношению расстояния от выбранной точки до цента треугольника к расстоянию от центра треугольника до его вершины. При этом точка может выходить за пределы треугольника. Было установлено, что в рассмотренном семействе существует 5 бифуркационных значений параметра  $t$ , при прохождении через которые качественно меняется форма траектории. При значениях параметра  $t \in (-\infty, t_5] \cup [t_1, +\infty)$  траектория является замкнутой кривой без самопересечений. При значениях  $t \in (t_5, t_4) \cup (t_2, t_1)$  траектория представляет из себя замкнутую кривую с 4 точками самопересечения. При значениях  $t = t_2, t_4$  траектория является замкнутой кривой с единственной точкой самопересечения. При значениях  $t \in (t_4, t_3) \cup (t_3, t_2)$  траектория имеет восемь точек самопересечения, а при  $t = t_3$  траектория точки совпадает с траекторией центра треугольника, которая является замкнутой кривой составленной из четырех дуг эллипсов, где

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, t_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, t_3 = 0, t_4 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}{2}, t_5 = -\frac{1}{2}.$$

2) При значении параметра  $t \geq t_1$  найдена площадь фигуры, ограниченной траекторией точки

$$S_f = t^2 \frac{\pi}{3} - t \left( \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \left( 2\sqrt{3} - \frac{8}{3} - \frac{\pi}{6} \right)$$

и площадь описанного вокруг нее квадрата

$$S_{sq} = 2 \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{t^2 + t + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

## 2. Доказательство основных результатов.

**Теорема 1.** При изменении параметра  $t$ , в рассмотренном семействе существует 5 бифуркационных значений, при прохождении через которые качественно меняется форма траектории.

**Доказательство.** Рассмотрим треугольник Рёло, катящийся в квадрате со стороной 1. Расположим данный квадрат в декартовой системе координат таким образом, чтобы одна из его вершин совпадала с началом координат, а противоположная ей вершина лежала на оси ординат в верхней полуплоскости (см. рис. 1).

Рассмотрим правильный треугольник  $\Delta ABC$ , вершины которого совпадают с вершинами треугольника Рёло. Пусть  $D$  – центр данного треугольника, а  $\alpha$  – угол между осью ординат и биссектрисой  $l$  треугольника  $\Delta ABC$ , проходящей через точку  $C$ .

Пусть  $P$  – точка, лежащая на прямой  $l$ , получаемая из точки  $D$  параллельным переносом на вектор  $t\overrightarrow{DC}$ , где  $t$  – любое действительное число. Найдем координаты точки  $P$ . Из соображений симметрии достаточно ограничиться значениями  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ .

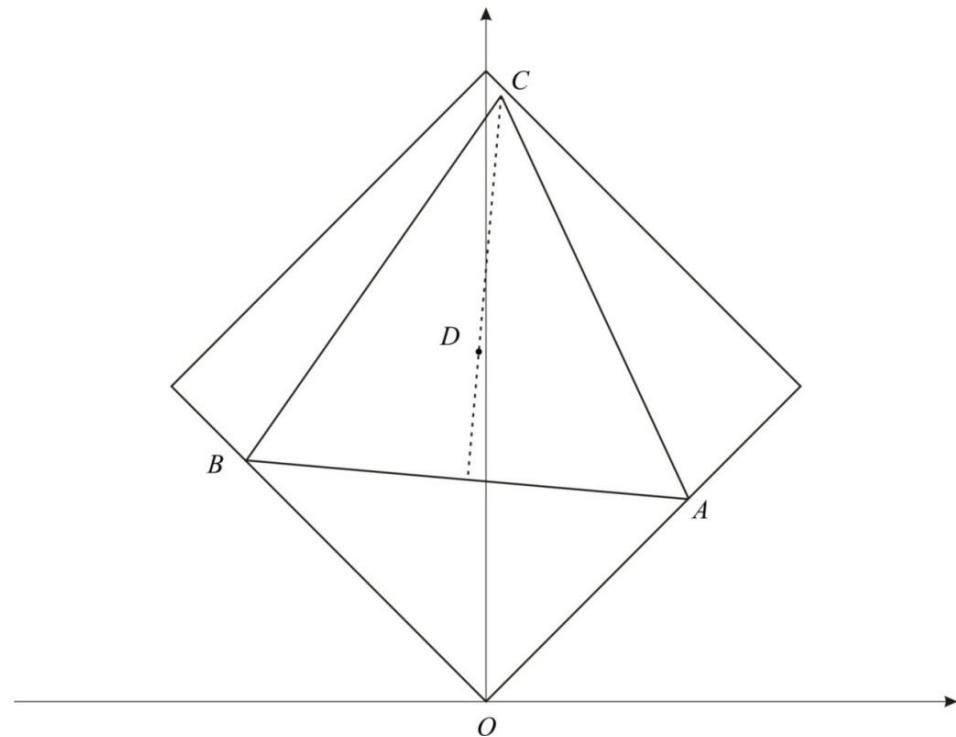


Рис. 2. Вершина  $C$  не касается стороны квадрата, а вершины  $A$  и  $B$  – касаются.

Возможны два случая:

- вершина  $C$  не касается стороны квадрата, а вершины  $A$  и  $B$  – касаются (см. рис. 2);
- вершины  $C$  и  $A$  касаются сторон квадрата, а вершина  $B$  – не касается (см. рис. 3).

Значения  $\alpha$ , при которых имеет тот или иной случай, определим чуть позже.

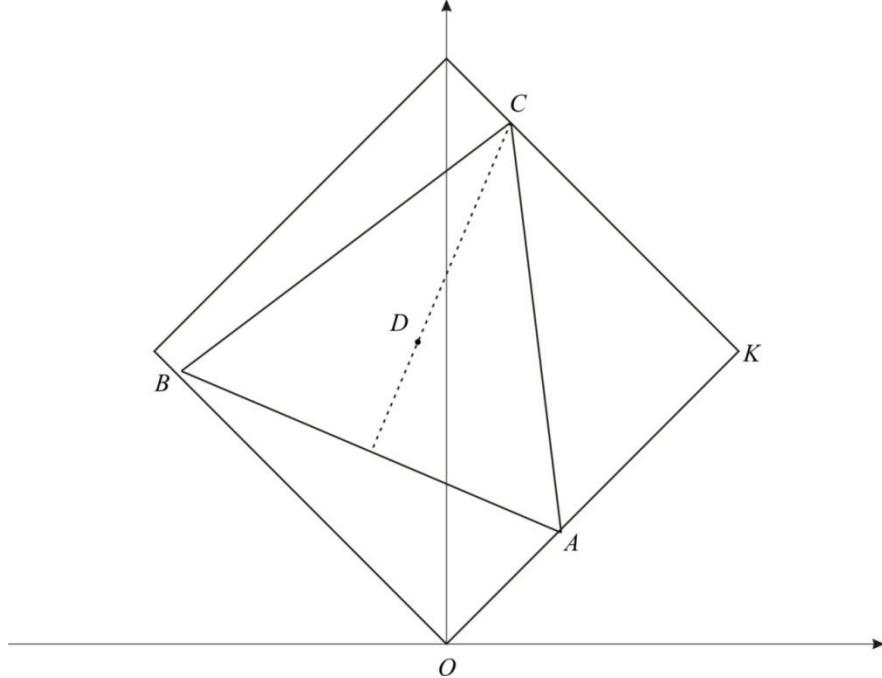


Рис. 3. Вершины  $C$  и  $A$  касаются сторон квадрата, а вершина  $B$  – не касается.

Рассмотрим случай 1. Рассмотрим треугольник  $\Delta OAB$ . Легко видеть, что  $|AB| = 1$ ,  $\angle ABO = \frac{\pi}{4} - \alpha$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ . Отсюда находим  $|OA| = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)$ ,  $|OB| = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)$ .

Теперь легко найти координаты точек  $C$  и  $D$ .

$$C = \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right),$$

$$D = \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, \left( \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right).$$

Тогда координаты точки  $P$  имеют вид:

$$P = \left( \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right).$$

Легко видеть, что при наибольшем значении  $\alpha$ , при котором имеет место случай 1, вершина  $C$  лежит на стороне квадрата. То есть точка  $P$  при значении параметра  $t = 1$  (при  $t = 1$   $P$  совпадает с  $C$ ) должна лежать на прямой  $x + y = \sqrt{2}$ .

Рассмотрим случай 2. Рассмотрим треугольник  $\Delta ACK$ . Легко видеть, что  $|AC| = 1$ ,  $\angle ACK = \frac{\pi}{12} + \alpha$ ,  $\angle CKA = \frac{\pi}{2}$ . Отсюда находим  $|AK| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cos \alpha + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \sin \alpha$ ,  $|CK| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cos \alpha - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \sin \alpha$ . Теперь легко найти координаты точек  $C$  и  $D$ .

$$C = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{12} + \alpha \right) \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{12} + \alpha \right) \right) \right),$$

$$D = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right), \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) \right).$$

Тогда координаты точки  $P$  имеют вид:

$$P = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \sin \alpha, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \cos \alpha \right).$$

Таким образом, уравнение траектории точки, лежащей на биссектрисе треугольника Рёло, имеет вид:

$$x(\alpha) = \begin{cases} \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \right) \sin \alpha, & \text{при } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \sin \alpha, & \text{при } \frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

$$y(\alpha) = \begin{cases} \left( \frac{t\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha, & \text{при } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + \frac{t\sqrt{3}}{3} \cos \alpha, & \text{при } \frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Отметим, что полученные уравнения описывают только одну восьмую всей траектории. Остальные участки траектории можно найти, воспользовавшись симметрией траектории относительно прямых  $x = 0$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y - x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Имея уравнение траектории, несложно найти все бифуркационные значения параметра  $t$ :  $t_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ,  $t_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ,  $t_3 = 0$ ,  $t_4 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}{2}$ ,  $t_5 = -\frac{1}{2}$ .

**Теорема 2.** Наибольшее значение отношения площади фигуры, ограниченной траекторией точки, к площади описанного вокруг нее квадрата при условии  $t_1 \leq t \leq 1$  достигается при значении параметра  $t = 1$ .

**Доказательство.** Площадь фигуры, ограниченной траекторией точки, имеет вид:

$$S_f = 8 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} y(\alpha) x'(\alpha) d\alpha - \int_0^{x(\frac{\pi}{4})} \left( t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dt \right].$$

Проделав необходимые вычисления получаем:

$$S_f = \frac{t^2 \pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} - 3.$$

Для нахождения площади описанного вокруг фигуры квадрата достаточно найти касательную к вышеописанному участку траектории, имеющую вид  $x + y = c$ , где  $c$  – некоторая константа. Тогда площадь квадрата будет иметь вид  $S_{sq} = 2 \left( c - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$ .

Из условия  $\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{dy}{d\alpha}$  находим, что  $c = \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{t^2 + t + 1}$ . Тогда площадь квадрата имеет

вид:

$$S_{sq} = 2 \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{t^2 + t + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2.$$

Теперь легко показать, что отношение  $\frac{S_f}{S_{sq}}$  достигает своего максимума на отрезке  $[t_1, 1]$  при  $t = 1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Радермехер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. – М.: Физматгиз, 1962. – 263 с.
2. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. – М.-Л.: ГТТИ, 1951. – 343 с.
3. Smith S. G. Drilling Square Holes // Mathematics Teacher. – 1993. – Vol. 86, № 7. – P. 579–583.

**ШМЕЛЕВА М. Д., ЕГОРОВА Д. К.**  
**О РЕАЛИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**  
**В СИСТЕМЕ WOLFRAM MATHEMATICA**

**Аннотация.** В статье рассматриваются некоторые вопросы реализации параллельных вычислений в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Проводится сравнительный анализ нескольких последовательных и параллельных алгоритмов, реализованных в Wolfram Mathematica 8.0 и Visual Studio 2010 с поддержкой OpenMP.

**Ключевые слова:** Wolfram Mathematica, последовательный алгоритм, параллельный алгоритм, время, ускорение, эффективность.

**SHMELYOVA M. D., EGOROVA D. K.**  
**ON IMPLEMENTATION OF PARALLEL COMPUTING**  
**IN WOLFRAM MATHEMATICA SYSTEM**

**Abstract.** The article considers some issues of implementation of parallel computing in Wolfram Mathematica. The analysis of several sequential and parallel algorithms implemented in Wolfram Mathematica 8.0 and Visual Studio 2010 with OpenMP support is presented.

**Keywords:** Wolfram Mathematica, sequential algorithm, parallel algorithm, time, acceleration, efficiency.

Система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica является весьма эффективным средством вычислений. На сегодняшний день система содержит порядка 5 000 функций, многие из них написаны изначально в оптимизированном виде (особенно для низкоуровневых вычислений), а большинство операций в Wolfram Mathematica, таких как операции по снижению размерности, обработка статистических данных, обработка изображений и т.п. автоматически распараллеливаются на локальные ядра. Однако существует набор инструментов (например, ParallelSum, Parallelize, ParallelMap, ParallelTable, ParallelArray, ParallelCombine и т.д.) использование которых, при реализации многопоточных задач, призвано значительно ускорить код. Отметим, что в некоторых случаях ускорения может и не быть, или оно есть, но не достаточное по сравнению с применением других средств программирования для той же задачи. Это может быть связано с тем, что применение инструментов параллельного программирования в Wolfram Mathematica, возможно, решает задачи распределения данных и сбора результатов, не учитывая, например, накладные расходы и т.п.

Приведем несколько примеров. Все вычисления проведены на 2-х ядерном Intel Core 2 Duo с установленными лицензионными версиями Wolfram Mathematica 8.0 и Visual Studio 2010 с поддержкой OpenMP.

Проведем последовательное и параллельное вычисление суммы  $\sum_{i=1}^{1\,000\,000} i$  реализованное на Visual Studio 2010. Результаты измерения времени вычисления приведены на рисунках 1 и 2.

Рис. 1. Последовательный алгоритм.

Рис. 2. Параллельный алгоритм.

Теперь произведем эти же вычисления в системе Wolfram Mathematica. Результаты приведены на рисунках 3 и 4.

```
In[11]:= Sum[i, {i, 1000 000}] // Timing
Out[11]= {0.469, 500 000 500 000}
```

Рис. 3. Последовательный алгоритм.

```
In[10]:= ParallelSum[k, {k, 1000 000}] // Timing
Out[10]= {0.047, 500 000 500 000}
```

Рис. 4. Параллельный алгоритм.

Последовательные вычисления произвели с помощью функции `Sum`. `ParallelSum` параллельная версия `Sum`, которая автоматически распределяет частичные сложения между различными ядрами и процессорами. Функция `AbsoluteTiming` возвращает реальное время вычисления своего аргумента в секундах и результат вычисления аргумента. Ее отличие от функции `Timing` заключается в том, что `Timing` измеряет количество процессорного времени, потребляемый ядром для оценки данного выражения. Ее результат лишь приблизителен, так как, в зависимости от базовой платформы, он может включать или не включать в себя процессорное время, используемое для системных вызовов, ошибок страниц и т.д. Она также не включает в себя время центрального процессора, используемого для параллельных процессов и потоков, и на ядра системы Wolfram Mathematica [3; 4].

Вычислим эффективность и ускорение алгоритмов (см. табл. 1).

Таблица 1

**Эффективность и ускорение алгоритмов**

	<b>Visual Studio</b>		<b>Wolfram Mathematica</b>	
	Последователь- ный алгоритм	Параллельный алгоритм	Последователь- ный алгоритм	Параллельный алгоритм
Время, $T$	0,019353	0,002518	0,469	0,047
Ускорение, $S = \frac{T_1}{T_n}$		7,685861795		9,9787234
Эффективность, $E = \frac{S}{p}$		3,84293		4,9893617

Из результатов таблицы 1 видно, что  $E > 1$ , т.е. мы получили суперлинейное ускорение. Это может быть связано с тем, что, например, при реализации вычислений в Visual Studio в качестве последовательного алгоритма был применен не самый оптимальный алгоритм из известных, а при вычислениях реализованных в Wolfram Mathematica увеличение количества вычислений вызвало рост суммарного объема их оперативной и кэш памяти вследствие чего, большая часть данных умещается в кэше.[1]

Рассмотрим задачу вычисления числа  $\pi$ . Результаты замеров времени при параллельной и последовательной реализациях в Visual Studio и Wolfram Mathematica приведены в таблице 2.

Таблица 2

**Сравнительный анализ ускорения и эффективности при параллельной и последовательной реализациях алгоритма вычисления числа  $\pi$   
в Visual Studio и Wolfram Mathematica**

	<b>Visual Studio</b>		<b>Wolfram Mathematica</b>	
	Последователь- ный алгоритм	Параллельный алгоритм	Последователь- ный алгоритм	Параллельный алгоритм
Время, $T$	0,064970	0,063345	126,0468750	96,672
Ускорение, $S = \frac{T_1}{T_n}$		1,025653		1,3038612
Эффективность, $E = \frac{S}{p}$		0,512826		0,65193

Из таблиц 1 и 2 видно, что время вычислений как последовательного, так и параллельного алгоритмов приведенных тестовых задач в Wolfram Mathematica существенно больше времени выполнения тех же задач в Visual Studio. Хотя ускорение, все же, достигает

удовлетворительных значений и в первом, и во втором случае. Следует заметить, что при повторном запуске одних и тех же вычислений в Wolfram Mathematica получаем худший результат при параллельных вычислениях, так как система «запоминает» предыдущие действия и при запуске последовательного алгоритма не тратит время на вычисления, а при запуске параллельных вычислений тратит время на распределение данных по ядрам.

Решение этих проблем [2] при реализации параллельных алгоритмов в системе Wolfram Mathematica может состоять в выполнении следующих действий:

- 1) при контрольных замерах времени загружать данные ядра только один раз;
- 2) избегать необходимости обмена данными между ядрами с помощью совместно используемых данных;
- 3) избегать повторения идентичных вычислений на отдельных ядрах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зюзьков В. М. Компьютерная алгебра. – Томск: Издательство Томского университета, 2014. – 121 с.
2. Mangano S. Mathematica Cookbook. – O'Reilly Media, 2010. – 830 p.
3. Введение в Wolfram Mathematica [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://habrahabr.ru/post/180925/>.
4. Parallel Computing [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica/>.

**ЖАЛНИН Р. В., ПАНЮШКИНА Е. Н.**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЯЗКОГО ГАЗА**  
**С ПЕРЕНОСОМ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПРИ ВЕТРОВОМ ПОДХВАТЕ**

**Аннотация.** Описана модель течения невязкого газа на основе системы уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности для концентрации загрязняющего вещества с граничным условием ветрового подхвата с поверхности земли. Также показаны результаты работы численного алгоритма, основанного на дискретизации полученных уравнений на структурированной сетке методом конечных объемов.

**Ключевые слова:** газовая динамика, уравнения Навье-Стокса, ветровой подхват, метод конечного объема.

**ZHALNIN R. V., PANYUSHKINA E. N.**  
**SIMULATION OF NON-VISCOUS GAS FLOW**  
**WITH POLLUTANT TRANSFER AT WIND GRAB**

**Abstract.** The paper describes a model of non-viscous gas flow through the system of Navier-Stokes equations and the continuity equation for the concentration of the pollutant with the boundary condition of the wind grab from the ground. The study includes the calculation results of a numerical algorithm based on sampling of the obtained equations on structured grid by the finite volume method.

**Keywords:** gas dynamics, Navier-Stokes equations, wind grab, finite volume method.

**Введение.** Для оценки и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций важную роль играет исследование динамики распространения загрязняющих веществ в атмосфере. При значительном загрязнении в большинстве случаев имеет место вторичная миграция примеси в результате ветрового подхвата с поверхности земли. В данной статье описано решение уравнений газовой динамики совместно с уравнением переноса примеси с граничным условием ветрового подхвата.

**1. Математическая модель.** Для описания вязких течений воспользуемся системой уравнений Навье-Стокса [2], которые отражают основные законы сохранения массы, импульса и энергии. В консервативной форме, в декартовых координатах ( $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ) уравнения Навье-Стокса имеют вид:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

уравнения сохранения импульсов

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho v w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E + u p}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E + v p}{\partial y} + \frac{\partial \rho w E + w p}{\partial z} = 0\tag{3}$$

Здесь  $\rho, p, E$  – плотность, давление и полная энергия;  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости. Полную энергию можно выразить через удельную внутреннюю энергию:

$$E = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\tag{4}$$

Система дополняется уравнением состояния:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon\tag{5}$$

Предположим, что распространение примесей происходит только за счет ветрового переноса. Запишем уравнение неразрывности для концентрации загрязнений (смесь однокомпонентная) без учета физико-химических трансформаций [4]:

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \frac{\partial \rho u C}{\partial x} + \frac{\partial \rho v C}{\partial y} + \frac{\partial \rho w C}{\partial z} = 0\tag{6}$$

При моделировании динамики распространения загрязнений рассмотрим ситуацию, когда примесь осела на землю, и ее дальнейшая миграция зависит от ветрового подхвата. Роль источника в этом случае будет выполнять сама поверхность, а ветровой подхват и дальнейший перенос будут в сильной степени зависеть от состояния этой поверхности. В общем случае решение задачи о вторичной миграции примеси невозможно. На практике вводятся такие эмпирические величины, как коэффициент ветрового подхвата, интенсивность ветрового подхвата и скорость сухого осаждения частиц [3].

К уравнению неразрывности для концентрации добавим краевое условие на подстилающей поверхности  $z = 0$ , описывающее изменение поверхностной концентрации за счет осаждения примеси из атмосферы и ветрового подхвата:

$$\frac{\partial C_r}{\partial t} = V_g C|_{z=0} - \alpha C_r\tag{7}$$

Здесь  $C_r$  – поверхностная концентрация примеси,  $\alpha$  – коэффициент ветрового подхвата,  $V_g$  – скорость сухого осаждения частиц. Величины  $V_g$  и  $\alpha$  зависят от свойств

примеси, характера подстилающей поверхности, состояния атмосферы и др. Поэтому их теоретическая и экспериментальная оценки достаточно трудоемки.

На остальных границах ставим условие вытекания. В начальный момент времени зададим поле скоростей  $(u_0, v_0, w_0)$ , давление  $p_0$ , плотность  $\rho_0$  и концентрацию  $C_0$ .

**2. Численный метод и результаты расчетов.** Построение вычислительных алгоритмов основано на конечно-объемном методе. В этом методе исходные дифференциальные уравнения записываются в дивергентном виде в декартовых координатах и преобразуются с использованием формулы Остроградского-Гаусса к интегральному виду. Разностные формулы получаются в результате интегрирования исходных уравнений по контрольному объему. Аппроксимацию будем проводить на структурированной сетке с шагом  $h$  по всем направлениям. Все искомые параметры определяются в центре ячейки.

Исходную систему уравнений представим в векторной форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где вектора  $Q, F_x, F_y, F_z$  имеют вид

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \\ \rho C \end{pmatrix}, F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ \rho u E + u p \\ \rho u C \end{pmatrix}, F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ \rho v E + v p \\ \rho v C \end{pmatrix}, F_z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \\ \rho w E + w p \\ \rho w C \end{pmatrix} \quad (9)$$

Будем считать, что на границе области известны либо потоки, либо значения этих величин.

Проинтегрируем уравнение по объему  $\Delta V_p$  ячейки  $p$ , которая ограничена поверхностью  $\Sigma_p = \bigcup_{f=1}^E \Delta S_f$  ( $\Delta S_f$  – площадь грани  $f$ ). Используя формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\int_{\Delta V_p} \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma_p} (F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z) dS = 0 \quad (10)$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V_p} Q dV + \oint_{\Sigma_p} \Phi dS = 0 \quad (11)$$

Используя квадратурные формулы, заменим интегральные выражения разностными. При интегрировании будем использовать теорему о среднем [1]. В качестве среднего значения функции по объему примем значение ее в центре ячейки, а в качестве среднего

значения функции на грани – значение ее в центре грани. Дискретный аналог уравнения следующий:

$$\frac{d}{dt}(Q\Delta V)_p + \sum_{f=1}^E \Phi \Delta S_f = 0 \quad (12)$$

Для нумерации ячеек будем использовать индексы  $i, j, k$ , грани ячейки обозначим  $i \pm 1/2, j \pm 1/2, k \pm 1/2$  шаги по пространству и по времени обозначим  $h$  и  $\tau$ . При аппроксимации производной разностью вперед получим следующую запись схемы:

$$\frac{Q_{ijk}^{n+1} - Q_{ijk}^n}{\tau} + \frac{1}{V_{ijk}} \left( \Phi_{i+1/2} S - \Phi_{i-1/2} S + \Phi_{j+1/2} S - \Phi_{j-1/2} S + \Phi_{k+1/2} S - \Phi_{k-1/2} S \right) = 0 \quad (13)$$

Численные потоки через грань  $f$  вычисляются по схеме Лакса-Фридрихса-Русанова:

$$\Phi_f = \frac{1}{2} \left( \Phi_f^- + \Phi_f^+ - K(Q_f^+ - Q_f^-) \right),$$

где  $K = \max \left( \sqrt{(u^-)^2 + (v^-)^2 + (w^-)^2} + \sqrt{p^- \gamma / \rho^-}, \sqrt{(u^+)^2 + (v^+)^2 + (w^+)^2} + \sqrt{p^+ \gamma / \rho^+} \right)$ .

Аппроксимация граничного условия, учитывающего ветровой подхват будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{C_{ij0}^{n+1} - C_{ij0}^n}{\tau} = V_g C_{ijk}^n - \alpha C_{ij0}^n \quad (14)$$

В качестве тестовой рассмотрим задачу в области  $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$  со следующими начальными данными (в безразмерных величинах):

$$(u_0, v_0, w_0) = (1.0, 0.0, -0.7), p_0 = 1.0, \rho_0 = 1.0, \gamma = 1.4, \alpha = 0.2e + 1, V_g = 0.7, h = 0.01, \tau = 1.e - 4.$$

Примесь находится на поверхности  $z = 0$ , причем  $C_0 = \begin{cases} 1, & x < 0.5 \\ 0, & x \geq 0.5 \end{cases}$

На рисунках 1 и 2 показано изменение концентрации с течением времени.

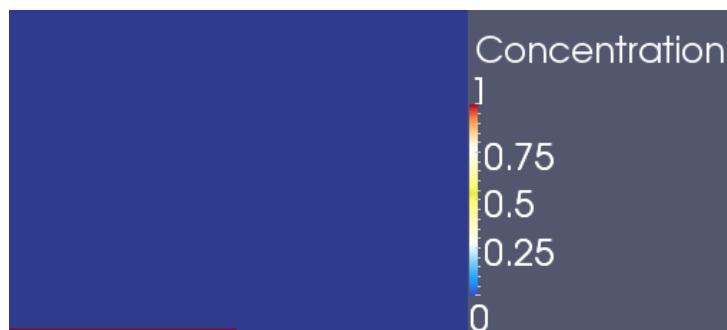


Рис.1. Концентрация примеси при  $t=0$ .

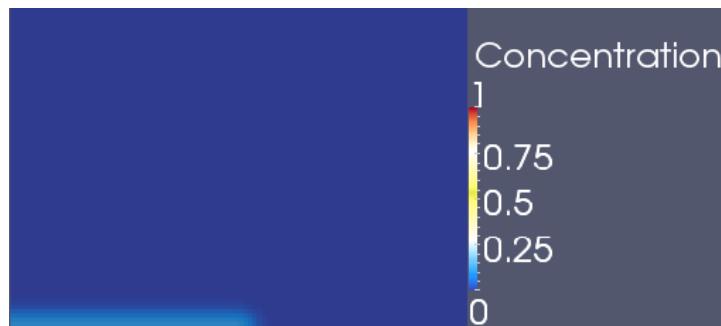


Рис.2. Концентрация примеси при  $t=0.1$ .

**Заключение.** В статье приведен численный расчет задачи распространения примеси с учетом ветрового подхвата на структурированной сетке совместно с решением уравнений Навье-Стокса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Нестеров А. В., Прус Ю. В. Моделирование вторичной миграции загрязнений в атмосфере при ветровом подхвате [Электронный ресурс] // Технологии техносферной безопасности. – 2009. – № 3. – Режим доступа: <http://agps-2006.narod.ru/ttb/2009-3/06-03-09.ttb.pdf>.
4. Панюшкина Е. Н. Описание математической модели переноса радиоактивных примесей по воздуху и подземными водами // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 116–118.

**ПОВЕРИНОВ А. И., КИРЕЙЧЕВА Е. Ю.**  
**ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**  
**ОЦЕНКИ ФИНАНСОВОГО СОСТОЯНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ**

**Аннотация.** Описано построение математической модели оценки финансового состояния предприятия с использованием метода наименьших квадратов. Данная математическая модель позволяет проводить расчеты элементов актива и пассива бухгалтерского баланса. Предложенный подход позволяет выявлять факторы, способствующие повышению эффективности деятельности предприятия.

**Ключевые слова:** математическая модель, балансовые уравнения, финансовая устойчивость, метод наименьших квадратов.

**POVERINOV A. I., KIREYCHEVA E. YU.**  
**FORMATION OF MATH MODEL FOR ASSESSMENT**  
**OF ENTERPRISE FINANCIAL CONDITION**

**Abstract.** The article deals with the formation of a mathematical model for assessment of the financial condition of an enterprise by the least square method. This mathematical model allows to calculate the elements of assets and liabilities of the balance sheet. The suggested approach allows to identify the factors contributing to the increase of efficiency of the enterprise activities.

**Keywords:** mathematical model, balance equation, financial stability, least square method.

В современных условиях развития экономики актуально использование аналитического моделирования финансового состояния организации, которое наиболее полно характеризует финансовое состояние предприятия.

В данной статье рассматриваются аспекты формирования математической модели оценки финансового состояния предприятия с целью определения ликвидности и финансовой устойчивости организации.

Первым этапом комплексной оценки финансового состояния организации является разработка системы экономических показателей.

Разработанные финансовые показатели должны задаваться пользователем на основе определенных критериев, которые необходимы предприятию. Условно этот процесс представлен на рис. 1.



Рис. 1. Процесс формирования активов и пассивов предприятия  
через задаваемые значения финансовых показателей.

Отсюда следует, что, определяя значения финансовых коэффициентов, можно определить значения статей баланса, то есть составить модель бухгалтерского баланса, которая отвечала бы всем требованиям разработанной системы показателей.

Рассмотрим теоретические аспекты разработки данной модели.

Для записи математической модели примем следующие обозначения:

- 1)  $Y_{TA}$  – текущие активы;
- 2)  $Y_{КП}$  – краткосрочные пассивы;
- 3)  $Y_{СОС}$  – собственные оборотные средства;
- 4)  $Y_{ДС}$  – денежные средства;
- 5)  $Y_{ДБ}$  – дебиторская задолженность;
- 6)  $Y_{33}$  – запасы и прочее;
- 7)  $Y_3$  – запасы;
- 8)  $Y_{ПР.ТА}$  – прочие текущие активы;
- 9)  $Y_{ВА}$  – внеоборотные активы;
- 10)  $Y_{ПК}$  – привлеченный капитал;
- 11)  $Y_{ДП}$  – долгосрочные пассивы;
- 12)  $Y_{СК}$  – собственный капитал;
- 13)  $Y_{ФР}$  – фонды и резервы;
- 14)  $Y_{ПР.ВА}$  – прочие внеоборотные активы;
- 15)  $Y_{ОС}$  – основные средства;

В качестве постоянных статей баланса в математической модели будут валюта баланса и уставный капитал.

Помимо этого, в модель необходимо включить некоторые балансовые уравнения, которые выражают связь между основными статьями баланса. В результате получим следующую систему уравнений.

Таблица 1

## Уравнения (ограничения) в математической модели и их экономический смысл

№ п/п	Ограничение	Экономический смысл
1	$Y_{TA} - Y_{КП} = Y_{СОС}$	Определение величины собственных оборотных средств
2	$\frac{Y_{ДС}}{Y_{СОС}} = МФК$	Маневренность функционирующего капитала
3	$\frac{Y_{TA}}{Y_{КП}} = K_{TL}$	Коэффициент текущей ликвидности
4	$\frac{Y_{ДС} + Y_{ДБ}}{Y_{КП}} = K_{BL}$	Коэффициент быстрой ликвидности
5	$\frac{Y_{ДС}}{Y_{КП}} = K_{AL}$	Коэффициент абсолютной ликвидности
6	$Y_{ДС} + Y_{ДБ} + Y_{33} = Y_{TA}$	Балансовое уравнение
7	$\frac{Y_{СОС}}{Y_3} = D_3^{СОС}$	Доля СОС в запасах
8	$Y_{33} - Y_3 = Y_{ПР.TA}$	Балансовое уравнение
9	$Y_{TA} + Y_{BA} = BA$	Балансовое уравнение (размер актива)
10	$Y_{КП} + Y_{ДП} = Y_{ПК}$	Балансовое уравнение
11	$Y_{33} - Y_3 = Y_{ПР.TA}$	Балансовое уравнение
12	$Y_{ПК} + Y_{СК} = БП$	Балансовое уравнение (размер пассива)
13	$\frac{Y_{СК}}{Y_{ПК}} = C_{ПК}^{СК}$	Соотношение собственных и привлеченных средств
14	$\frac{Y_3}{Y_{TA}} = D_3^{TA}$	Доля запасов в текущих активах
15	$\frac{Y_{СОС}}{Y_{СК}} = МСК$	Коэффициент маневренности собственного капитала
16	$\frac{Y_{ДП}}{Y_{BA}} = K_{СДВ}$	Коэффициент структуры долгосрочных вложений
17	$\frac{Y_{ДП}}{Y_{ПК}} = K_{СЗК}$	Коэффициент структуры заемного капитала
18	$Y_{ОС} + Y_{ПР.BA} = Y_{BA}$	Балансовое уравнение
19	$\frac{Y_3 + Y_{ОС}}{BA} = K_{ИПН}$	Коэффициент имущества производственного назначения
20	$Y_{СОС} - Y_{ДС} = ТФП$	Текущие финансовые потребности
21	$\frac{Y_{TA}}{Y_{BA}} = C_{BA}^{TA}$	Соотношение оборотных и внеоборотных активов

Из вышеперечисленных уравнений (ограничений) получается следующая система уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{TA} - Y_{KP} - Y_{COC} = 0 \\ Y_{DC} - MFK(Y_{COC}) = 0 \\ Y_{TA} - (K_{TL})Y_{KP} = 0 \\ Y_{DC} - Y_{DB} - K_{BL}(Y_{KP}) = 0 \\ Y_{DC} - (K_{AL})Y_{KP} = 0 \\ Y_{DC} - Y_{DB} - Y_{33} - Y_{TA} = 0 \\ Y_{COC} - Y_3(D_3^{COC}) = 0 \\ Y_{33} - Y_3 - Y_{PR.TA} = 0 \\ Y_{TA} - Y_{BA} = BA \\ Y_{KP} - Y_{DP} - Y_{PK} = 0 \\ Y_{CK} - Y_{FP} = UK \\ Y_{PK} - Y_{CK} = BP \\ Y_{CK} - C_{PK}^{CK}(Y_{PK}) = 0 \\ Y_3 - D_{TA}^3(Y_{TA}) = 0 \\ Y_{COC} - MCK(Y_{CK}) = 0 \\ Y_{DP} - K_{CDB}(Y_{BA}) = 0 \\ Y_{DP} - K_{C3K}(Y_{PK}) = 0 \\ Y_{OC} - Y_{PR.BA} - Y_{BA} = 0 \\ Y_3 - Y_{OC} - K_{IPN}(BA) = 0 \\ Y_{COC} - Y_{DC} = TFP \\ Y_{BA} - C_{BA}^{TA}(Y_{TA}) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе уравнений (1) имеется 15 неизвестных и 21 уравнение. В этом случае имеем переопределенную систему, то есть такую, в которой количество уравнений больше количества неизвестных. Для ее решения мы будем искать псевдорешение с помощью метода наименьших квадратов:

$$\sum_{j=1}^n b_{jk} y_k = f_k, \quad k = \overline{1, \dots, m}, \quad m > n \quad (2)$$

в матричном виде:

$$Ay = f, \quad (3)$$

где  $A - (m \times n)$  матрица,  $y \in R^n$ ,  $f \in R^m$ ,  $m > n$ .

Так как ранг основной матрицы  $A$  не равен рангу расширенной матрицы  $\bar{A}$ , то по теореме Кронекера-Капелли в обычном смысле система не имеет решений.

Согласно методу наименьших квадратов под обобщенным решением системы (3) понимается набор чисел  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , для которых минимальна сумма минимизируемой функции:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n (b_{ik} y_k - f_i)^2, \quad F \rightarrow \min. \quad (4)$$

Решение задачи (4) находится следующим образом. Запишем необходимые условия минимума:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\delta F}{\delta y_i} = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n b_{ik} y_k - f_i) b_{ij}, j = \overline{1, n}.$$

Меняем порядок суммирования по  $i$  и по  $k$

$$\sum_{k=1}^n (y_k \sum_{i=1}^n b_{ik} b_{ij} - \sum_{i=1}^n b_{ik} f_i) = 0$$

и обозначая

$$x_{jk} = \sum_{i=1}^n b_{ik} b_{ij}, g_k = \sum_{i=1}^n b_{ik} f_i \quad (5)$$

получаем для определения  $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\sum_{i=1}^n b_{jk} y_k = f_j, j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

или в матричном виде:

$$By = g, B = B_{n \times n} = y \in R^n, g \in R^n, \quad (7)$$

из (1) следует:

$$B = A^T \times A, g = A^T \times f, \quad (8)$$

Систему (5) в матричном виде, при условии (7), (8) имеет вид:

$$A^T \times A \times y = A^T \times f \quad (9)$$

Решив уравнение (9), получим *псевдорешение*.

В результате решения системы уравнений (1) определяются значения 15-ти переменных. Полученные значения будут соответствовать такому финансовому состоянию предприятия, при котором оно наиболее полным образом будет удовлетворять необходимым значениям показателей ликвидности и финансовой устойчивости.

Данные значения будем считать оптимальными с точки зрения заданных критериев, и обозначим верхним индексом Р.

Обозначим фактически имеющиеся на данный период времени значения балансовых статей верхним индексом Е.

Сравнивая отклонения фактически имеющихся значений  $DC^E, DB^E, 33^E, OC^E, PR, BA^E, FR^E, UK^E, KP^E, DP^E$ , соответственно со значениями рассчитанного баланса, будем получать отклонения  $\Delta_j$  от рассчитанного состояния по каждому из девяти элементов (статей) бухгалтерского баланса.

Эти отклонения могут быть положительными или отрицательными. Для того, чтобы избавиться от влияния знака, необходимо возвести каждое полученное отклонение в квадрат.

Таким образом, получим суммарное отклонение по девяти статьям бухгалтерского баланса  $\Delta_s$  в общем виде:

$$\Delta_s = \sqrt{\sum_{j=1}^n (Z^P - Z^E)^2},$$

где  $Z^P$  и  $Z^E$  – соответственно рассчитанные и фактические значения показателя баланса.

Из этого следует, что имеется возможность оценки финансового состояния предприятия всего через один показатель –  $\Delta_s$ , что существенно облегчает задачу оценки финансового состояния предприятия.

В дополнение к данному абсолютному показателю необходимо рассчитать величину относительного показателя, который рассчитывается как отношение показателя  $\Delta_s$  к максимально возможному отклонению –  $\Delta_s^{max}$ .

Верна следующая мысль. Максимально возможное отклонение ( $\Delta_s^{max}$ ) от заданного состояния предприятия равно удвоенной валюте баланса предприятия:

$$\Delta_s^{max} = 2 \times \text{ВБ}$$

Тогда в виде относительного показателя оценка финансового состояния предприятия примет вид:

$$\psi = \frac{\Delta_s}{\Delta_s^{max}} = \frac{\Delta_s}{2 \times \text{ВБ}},$$

где показатель  $\psi$  позволяет оценить состояние предприятия с точки зрения ликвидности и финансовой устойчивости.

Для оценки адекватности модели финансового состояния предприятия, то есть проверки адекватности расчетных данных, используем среднее относительное линейное отклонение, которое используется для расчета отклонения фактических значений каких-либо характеристик от значений соответствующих характеристик, рассчитанных на основе данного уравнения регрессии, которое рассчитывается по следующей формуле:

$$\mu = \frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^n \frac{|Y_j - \bar{Y}_j|}{Y_j} \times 100\%,$$

где  $Y_j$  и  $\bar{Y}_j$  – соответственно значения задаваемых финансовых показателей и значения финансовых показателей, рассчитанных по данным рассчитанного баланса.

Считается, что, если среднее относительное линейное отклонение не превышает 15%, построенная модель вполне может быть использована для расчетов. Если же среднее относительное линейное отклонение превысит 15%, потребуется корректировка исходных данных с целью исключения противоречивых результатов. Адекватность модели в данном случае позволит избежать получения противоречивых результатов.

Полученная математическая модель отвечает требованиям показателей ликвидности и финансовой устойчивости. Ее использование является эффективным, так как она позволяет

находить оптимальное финансовое состояние организации и нужные решения для его улучшения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сигидов Ю. И. и др. Методика анализа финансового состояния и оценка потенциальности банкротства сельскохозяйственных организаций: Монография. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 120 с.
2. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Десяев Е. В. Об управлении портфелем ценных бумаг // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сборник статей X Международной научно-технической конференции / Под ред. И. В. Бойкова. – Пенза, 2015. – С. 87–90.
3. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Десяев Е. В. Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 30–36.
4. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – №3 (27). – С. 48–57.
5. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К. Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 55–58.