



eISSN 2311-2468
Том 5, № 13. 2017
Vol. 5, no. 13. 2017

электронное периодическое издание
для студентов и аспирантов

Огарёв-онлайн Ogarev-online

<https://journal.mrsu.ru>



ВОЛКОВ С. Д., ЦАРЕГОРОДЦЕВ А. В., ЦАЦКИНА Е. П.
ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ ОБНАРУЖЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ
АТАК ДЛЯ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ
СИСТЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА ОСНОВЕ
ТЕХНОЛОГИИ ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Аннотация. В статье представлен анализ архитектур систем обнаружения атак на информационно-телекоммуникационные системы. Выявляются недостатки данных архитектур при использовании в информационно-телекоммуникационных системах, функционирующих на основе технологии облачных вычислений. Предлагается решение по созданию нейросетевой системы обнаружения атак, не имеющей недостатков проанализированных систем.

Ключевые слова: информационная безопасность, облачные вычисления, система обнаружения атак, искусственные нейронные сети.

VOLKOV S. D., TSAREGORODTSEV A. V., TSATSKINA E. P.
CONSTRUCTION PECULIARITIES OF INTRUSION DETECTION SYSTEMS FOR
INFORMATION AND TELECOMMUNICATION SYSTEMS
BASED ON CLOUD COMPUTING

Abstract. The article provides an analysis of the intrusion detection systems architectures for information and telecommunication systems. The shortcomings of the architectures in application to the information and telecommunication systems based on cloud computing are identified. As a solution to the problem, the creation of a neural-network-based intrusion detection system is suggested.

Keywords: information security, cloud computing, intrusion detection system, artificial neural networks.

Облачные вычисления (cloud computing) являются сегодня одной из самых активно развиваемых и инновационных сетевых технологий. В соответствии с моделью, рекомендованной Национальным Институтом стандартов и технологий (National Institute of Standards and Technology, NIST) под облачными вычислениями понимается модель предоставления повсеместного, удобного сетевого доступа «по-требованию» к разделяемому пулу конфигурируемых вычислительных ресурсов (например, сети, серверы, память, приложения и сервисы), которые могут быть предоставлены и освобождены в короткие сроки с минимальными усилиями в управлении или с минимальным взаимодействием с поставщиком услуги [1].

В наше время многие компании ограничены в финансовых ресурсах, в результате чего им приходится решать проблему оптимизации затрат. В таких случаях облачные вычисления становятся прекрасным решением этой проблемы: приобретая облачные сервисы, компаниям не обязательно тратить большие средства на создание собственных центров обработки данных, лицензионное программное обеспечение и квалифицированный персонал. Но при всем удобстве, данное преимущество приводит к возникновению новых актуальных угроз информационной безопасности, связанных, прежде всего, с уменьшением возможности контроля процессов обработки информации, а также с динамичностью модели предоставления ресурсов. Таким образом, при внедрении и переходе на использование облачных вычислений возникает противоречие между увеличением эффективности основных производственных процессов в компании – с одной стороны, и возникновением новых угроз информационной безопасности – с другой стороны.

Основная специфика облачных технологий заключается в том, что вместо предоставления «сырых» вычислительных ресурсов и ресурсов хранения, предоставляются более абстрактные ресурсы в виде сервисов [2].

В частности, к особенностям облачных технологий можно отнести следующие моменты.

Во-первых, облачные вычисления фокусируются на подходе «всё как сервис». Причем, исключительно на платном предоставлении вычислительных ресурсов конечному пользователю. Однако ресурсы предоставляются по мере надобности, что позволяет существенно сократить расходы.

Во-вторых, системы, функционирующие на основе облачных вычислений, строятся таким образом, чтобы предоставлять интерфейсы конечным пользователям через веб-доступ или посредством API. Такое повышение уровня абстракции позволяет обеспечить применение облачных вычислений, как на уровне отдельных пользователей, так и на уровне корпоративных клиентов.

В-третьих, технология облачных вычислений построена на базе технологии виртуализации. Она позволяет гибко разделять и гарантировать ресурсы, предоставлять их по требованию и контролировать их использование. С помощью виртуализации возможно создание изолированных виртуальных окружений, которые реализуют определенные сервисы, а также возможно разделение ресурсов (сеть, устройства хранения) на логическом уровне для более гибкого управления.

В последнее время существенный рост количества целенаправленных атак на корпоративные инфраструктуры (в том числе интегрирующие облачные среды) требует четко продуманной стратегии внедрения новых технологий защиты информации. Одним из

действенных подходов является использование средств управления инцидентами и событиями информационной безопасности. В частности, широкое распространение получили автоматизированные системы обнаружения компьютерных атак. Среди них можно выделить такие системы, как Snort, Bro, OSSEC, STAT и Prelude. В общем виде все системы обнаружения атак можно разделить на два класса – network-based (NIDS) и host-based (HIDS).

NIDS-системы (пример, Snort, Bro) основаны на принципе анализа сетевых пакетов данных. Такие системы просматривают сетевой трафик защищаемого сетевого сегмента, защищая тем самым входящие в этот сегмент информационные системы. NIDS-системы, как правило, состоят из декодера пакетов данных, ядра обнаружения атак и подсистемы оповещений. Декодер пакетов отвечает за сбор данных, передаваемых по сети. Ядро обнаружения атак компилирует известные системе сигнатуры и анализирует переданные декодером данные на наличие в них сигнатур атак. При обнаружении атаки создается событие для подсистемы оповещений. На рисунках 1 и 2 приведены обобщенные схемы архитектур сетевых систем обнаружения атак Snort и Bro.

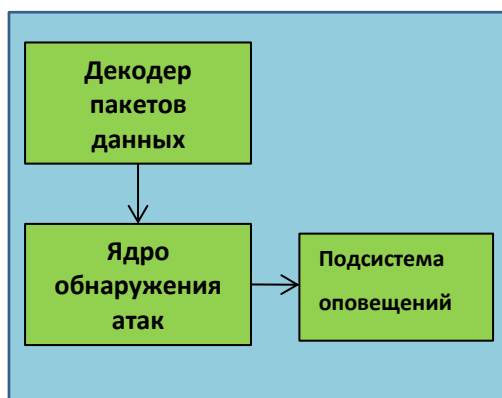


Рис. 1. Обобщенная архитектура системы обнаружения атак Snort.

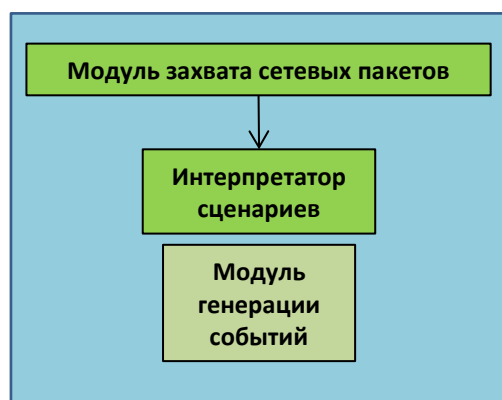


Рис. 2. Обобщенная архитектура системы обнаружения атак Bro.

HIDS-системы (например, OSSEC, STAT) анализируют информацию, расположенную в конкретной информационной системе. Такое расположение позволяет определять только те системные процессы, которые имеют отношение к конкретной атаке, что повышает эффективность работы системы. Системы этого типа, как правило, имеют модульную структуру, состоящую из модулей анализа лог-файлов операционной системы, обнаружения руткитов в системе, контроля целостности системных файлов и т.п. Однако все угрозы HIDS-системы обнаруживают на основе известных им сигнатур, что делает их, с этой точки зрения, похожими на NIDS-системы. На рисунках 2 и 3 приведены обобщенные схемы архитектур сетевых систем обнаружения атак OSSEC и STAT.

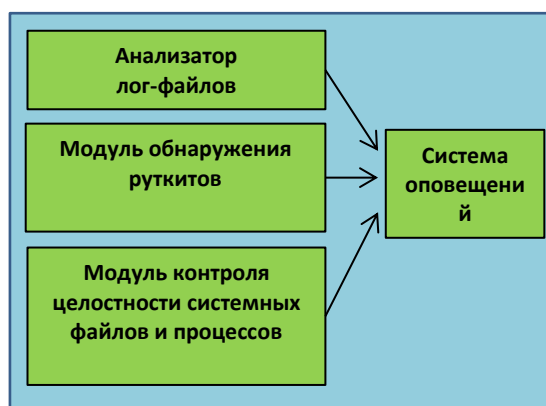


Рис. 3. Обобщенная архитектура системы обнаружения атак OSSEC.

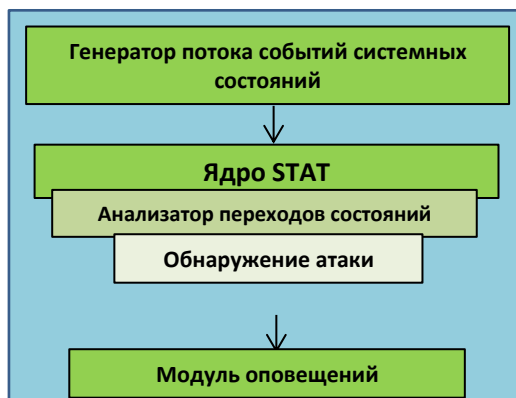


Рис. 4. Обобщенная архитектура системы обнаружения атак STAT.

Кроме того, есть и системы, сочетающие в себе функционал, характерный как для сетевых, так и для узловых систем – гибридные системы обнаружения атак (Hybrid IDS). Примером такой системы является система Prelude. Она позволяет отслеживать активность как на уровне вычислительной сети, так и на уровне отдельных узлов. Система имеет распределенную архитектуру и включает в себя сетевые сенсоры (анализируют данные на уровне сети используя методы сигнатурного анализа) и узловые (анализируют лог-файлы

ОС). Эти сенсоры генерируют сообщения об обнаружении аномалий и отправляют их модулям управления (регистрируют и анализируют сообщения, затем генерируют возможную ответную реакцию системы на атаку). Обобщенная архитектура системы обнаружения атак Prelude представлена на рисунке 5.

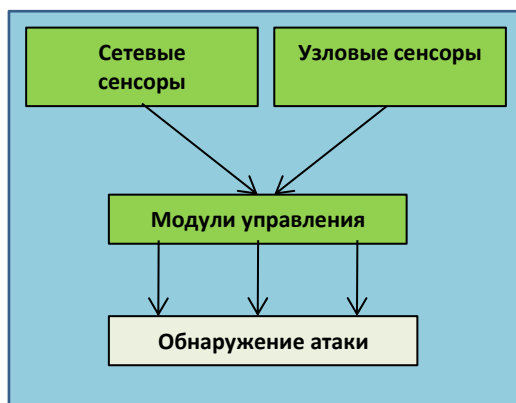


Рис. 5. Обобщенная архитектура системы обнаружения атак Prelude.

Таким образом, можно говорить о том, что оба рассмотренных типа систем, так или иначе, основаны на сигнатурном методе обнаружения атак, а значит, обладают крайне низкой адаптивностью к обнаружению новых (неизвестных системе) атак. Кроме того, принимая во внимание специфику информационно-телекоммуникационных систем, функционирующих на основе технологии облачных вычислений, необходимо учитывать и угрозы целенаправленных атак, которые нарушают функционирование подсистем гипервизора, отвечающие за планирование задач и верификацию команд на их соответствие требованиям информационной безопасности. Такие атаки сложно выявлять и эффективно блокировать используемые ими каналы информационных воздействий, так как эти каналы не доступны для контроля со стороны гостевых операционных систем. Критичность этих атак обуславливается также тем, что их реализация может нанести ущерб не только конкретной гостевой системе, но и всей физической информационно-коммуникационной системе.

Перспективным способом решения данной проблемы является разработка адаптивного метода обнаружения атак, который обеспечит обнаружение не только специфичных для облачных систем атак, но и неизвестных атак. Для создания такого метода можно воспользоваться математической моделью искусственных нейронных сетей. Построенная на их базе нейросетевая система обнаружения атак обучается в течение некоторого периода времени, когда все наблюдаемое поведение считается нормальным. После обучения система запускается в режиме распознавания [3]. В ситуации, когда во входном потоке данных не удастся распознать нормальное поведение, фиксируется факт

атаки. Такой механизм обеспечивает обнаружение не только уже известных угроз, но и ранее неизвестных угроз, направленных, в том числе на гипервизор и иные критичные для системы компоненты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельянова Ю. Г., Фраленко В. П. Анализ проблем и перспективы создания интеллектуальной системы обнаружения и предотвращения сетевых атак на облачные вычисления // Программные системы: теория и приложения. – № 4(8). – 2011. – С. 17–31.
2. Радченко Г. И. Распределенные вычислительные системы: учебное пособие. – Челябинск: Фотохудожник, 2012. – 184 с.
3. Rasool Jalili, Fatemeh Imani-Mehr, Morteza Amini, Hamid Reza Shahriari Detection of Distributed Denial of Service Attacks Using Statistical Pre-Processor and Unsupervised Neural Networks // Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 3439. – pp. 192–203.

КАЗАКОВА И. И., ЦАРЕГОРОДЦЕВ А. В., ЦАЦКИНА Е. П.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ
СЦЕНАРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕЙСТВИЙ ИНСАЙДЕРА

Аннотация. В статье рассмотрено имитационное моделирование в качестве основы при разработке стратегии противодействия инсайдерской угрозе информационной безопасности. Проведен сравнительный анализ существующих программных комплексов, предназначенных для имитационного моделирования, и выявлен программный пакет, лучше других отвечающий требованиям построения модели поведения внутреннего нарушителя. Описываются внутренние угрозы информационной безопасности компании, а также способы их предотвращения.

Ключевые слова: инсайдер, имитационное моделирование, информационная безопасность, iThink.

KAZAKOVA I. I., TSAREGORODTSEV A. V., TSATSKINA E. P.
MATHEMATICAL AND INFORMATION SUPPORT
OF SCENARY MODELING SYSTEM OF INSIDER ACTIONS

Abstract. The article considers the use of simulation modeling as a basis for developing strategies to counter the insider threat to information security. A comparative analysis of the software systems designed for simulation modeling is conducted. The software package which best meets the requirements of constructing a behavior model of insiders is identified. The article also provides a description of internal threats to the information security of a company and ways to prevent them.

Keywords: insider, simulation modeling, information security, iThink.

В наши дни информационные технологии (ИТ) проникли во все сферы общественной деятельности, и конкурентоспособность организации зачастую зависит от того, насколько эффективно она научилась внедрять, поддерживать, развивать и управлять ими. Ключевым нематериальным активом стала информация. Ввиду этого критически важной для выживания организации стала проблема обеспечения защиты информации и ИТ-инфраструктуры от внешних и внутренних угроз информационной безопасности (ИБ).

Исследования в области обеспечения ИБ до недавних пор концентрировались в основном на противодействии внешним угрозам ИБ (нарушений ИБ организации, совершенных вне предоставляемых полномочий). На тему обеспечения ИБ в условиях внешних угроз разработаны стандарты, методы и средства, претерпевшие несколько циклов совершенствования и в достаточной мере обеспечивающие защиту при правильном внедрении.

Вопрос защиты информационных активов и ИТ-инфраструктуры организации от внутренних угроз ИБ (нарушений ИБ организации, совершенных в рамках предоставляемых полномочий), поднялся не так давно, ввиду этого на данный момент не существует общепринятых подходов защиты информационных активов и ИТ-инфраструктуры от инсайдерской угрозы ИБ.

Инсайдер – это человек, имеющий легальный доступ к информационной системе, и выполняющий неправомерные действия в ней. Инсайдеры могут иметь пароли, которые дают им законный доступ к компьютерным системам. Пароли необходимы для выполнения своих обязанностей. Но такие разрешения могут быть использованы для нанесения вреда организации. Инсайдеры часто знакомятся с данными и интеллектуальной собственностью организации, а также с методами, которые применяются для защиты этих данных. Это помогает инсайдеру обходить известные ему средства и системы контроля доступа. Если инсайдер имеет физический доступ к данным, то ему не нужно взламывать организационную сеть через внешний периметр путем обхода брандмауэров. Вероятнее всего, что они уже находятся в здании, имея прямой доступ к внутренней сети организации. От внутренних угроз защищаться труднее, чем от внешних, так как инсайдер имеет законный доступ к информации и различным активам организации.

Инсайдер может попытаться украсть информацию и имущество в интересах другой организации или страны или в личных интересах. Осуществление угроз и атак может также проводиться с помощью вредоносных программ, которые бывшие сотрудники могли оставить в компьютерных системах. Инсайдерские угрозы – это угрозы, которые наносят существенный вред организации. Классификация этих угроз приведена в таблице 1.

Для предотвращения нарушений ИБ организациям необходимо принимать защитные меры по борьбе с инсайдерами. Для создания эффективных контрмер необходимо иметь больше данных о случаях шпионажа. Организации должны обмениваться этими данными, для того чтобы проводить анализ нарушений и выявлять причины шпионажа. В результате, можно собрать статистику по инцидентам нарушения ИБ и разработать методы борьбы с инсайдерами.

Внутренний нарушитель ИБ лучше понимает ИТ-инфраструктуру и внутреннюю организацию компании, а также действует в рамках предоставленных ему полномочий, ввиду чего его возможности по нанесению ущерба гораздо выше по сравнению с нарушителем внешним

Классификация инсайдерских угроз

Тип угрозы	Описание
Угроза утечки конфиденциальной информации	Информация, несущая определенную ценность для организации, выносится за ее пределы и может попасть к лицам, которые не имеют прав доступа к этим данным и прав на их использование
Обход средств защиты от утечки конфиденциальной информации	Обман системы защиты путем обхода средств фильтрации почтовых сообщений и веб-трафика
Кража конфиденциальной информации по неосторожности	Подвергание риску секретной информации организации непреднамеренно
Нарушение авторских прав на информацию	Копировать определенные части документа одного автора в документ другого автора, а также в сообщения, передаваемые по почте, и в другие формы передачи информации
Мошенничество	Искажение документации организации, модификация и удаление секретной и важной информации, а также в превышение полномочий доступа к базе данных
Нецелевое использование информационных ресурсов компании	Злоупотребление сетевыми ресурсами
Саботаж ИТ-инфраструктуры	Нанесение существенного вреда организации по личным (чаще всего бескорыстным) мотивам – любой из описанных выше сценариев

Ключевым моментом в решении проблем, препятствующих эффективному решению проблемы инсайдеров, является построение модели внутреннего нарушителя.

Имитационное моделирование – это разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих посредством процессов-аналогов провести целенаправленное исследование структуры и функций реального сложного процесса в памяти компьютера в режиме «имитации» и выполнить оптимизацию некоторых его параметров

При достаточном понимании поведения инсайдера и правильном представлении исходной информации имитационные модели характеризуются большей близостью к реальной системе, чем аналитические и численные модели. С помощью имитационного моделирования действий инсайдера и соответствующих современных программных средств можно создавать даже те модели, которые невозможно сформулировать традиционными методами. Кроме того, имитационное моделирование позволяет создавать модели тех

систем, с которыми нельзя провести эксперимент, что позволяет упростить и усовершенствовать управление ими.

Существует два подхода к имитационному моделированию – статический и динамический. Статические модели представляют собой системы уравнений, которые решаются один раз. Динамические модели включают в себя еще одну переменную - время. Модель поведения инсайдера является динамической моделью, так как математические расчеты параметров модели инсайдера выполняются на различных временных интервалах, позволяя тем самым исследовать развитие системы во времени.

На данный момент, существует множество инструментальных средств для моделирования динамики систем, например, iThink, Vensim, Powersim, Process charter и др. Эти продукты более всего различаются стилем моделирования, т. е. средой, посредством которой создаются модели. Например, в пакете Process Charter модель строится с помощью блок-схемы, а Powersim и iThink используют системную динамику. Сравнение пакетов имитационного моделирования представлено в таблице 2.

Таблица 2

Сравнение пакетов имитационного моделирования

Система моделирования	Производитель	Моделирующая среда и поддержка			
		Графическая конструкция ИМ	Авторское моделирование, программирование моделей	Анимация (в реальном времени)	Поддержка анализа результатов
iThink	High Performance System, Inc	CASE-средства, потоковые диаграммы	+	+	Анализ чувствительности
Vensim	Ventana Systems	Потоковые диаграммы	-	+	-
Powersim	Powersim Co.	Потоковые диаграммы	-	+	-
Process charter	Scitor	Блок-схемы	-	+	-

Как видно из таблицы 2, не все данные программные инструменты позволяют смоделировать поведение внутреннего нарушителя. К примеру, анализ чувствительности поддерживает лишь программный пакет iThink. Анализ чувствительности является одним из важнейших характеристик модели инсайдера, так как это дает возможность многократно исполнять модель с различными входными параметрами, чтобы сравнить результаты

нескольких прогонов. Кроме того, iThink использует CASE-средства, в состав которых входят графические средства анализа и проектирования, обеспечивающие создание и редактирование иерархически связанных диаграмм, образующих модель прогнозирования действий инсайдера. Также важной отличительной чертой iThink от других программных пакетов для имитационного моделирования является авторское моделирование, иными словами есть функция создания авторских моделей, с помощью которых разработчик включает в окно модели текст, геометрические изображения и управляющие блоки, чтобы пользователи могли самостоятельно модифицировать модель. На основании данных фактов можно сделать вывод, что для математического обеспечения системы сценарного прогнозирования действий инсайдера лучше всего подходит именно программный комплекс iThink.

Имитационная модель инсайдера разрабатывается для:

- 1) наглядного отображения влияния различных факторов шпионажа друг на друга (взаимосвязь этих факторов);
- 2) проведения анализа взаимодействий этих факторов;
- 3) получения результатов на основе анализа.

Данный подход и инструментальная среда позволяют смоделировать и спрогнозировать поведение инсайдеров. Кроме того, имитационная модель помогает:

- Лучше понимать и обобщать ключевые аспекты шпионажа.
- Обосновывать рекомендации исследования.
- Облегчать идентификацию эффективных контрмер.
- Анализировать поведение инсайдера.
- Исследовать трудные управленческие ситуации.
- Понять природу проблемного поведения нарушителя.
- Увидеть факторы, предшествующие угрозам со стороны инсайдера.
- Принять меры для смягчения или предотвращения преступления.
- Разработать стратегию поведения и тактику противодействия угрозам.
- Проанализировать изменения системы за длительный срок.
- Показать преимущества и недостатки системы.

В модель можно включить различные факторы: политические, административные, культурные, психологические и другие. Исключение этих факторов из модели не даст полного представления об описываемой ситуации. Таким образом, многие проблемы упускают из виду, что отчасти объясняется узкой направленностью в решении проблем.

Кроме того, имитационное моделирование сможет помочь решить следующие вопросы:

- Когда и где будет совершено нападение?
 - Какой ущерб оно может нанести организации?
 - Можно ли избежать угрозы нападения, если принимать контрмеры?
 - Как повлияют современные тенденции в шпионаже на национальную безопасность через несколько лет?
- Какие еще факторы могут повлиять на риск шпионажа (в государственном масштабе)?

Анализ системно-динамической модели привел к таким основным наблюдениям, как:

- 1) личная предрасположенность и стрессовые события, включая организационные санкции, способствуют увеличению риска совершения правонарушений;
- 2) подозрительное поведение и технические действия инсайдера предшествуют совершению нарушений или происходят во время проведения шпионажа;
- 3) организации игнорируют (не реагируют) или не обнаруживают нарушения правил;
- 4) отсутствие или недостаток физических и электронных средств управления контролем доступа облегчают совершение шпионажа;
- 5) удачно совершенное преступление и получение вознаграждения за него приводит к увеличению совершения нарушений правил;
- 6) чрезмерное доверие к сотрудникам приводит к уменьшению проведения аудита и мониторинга;
- 7) наложение организационных санкций на сотрудника может привести и к уменьшению, и к увеличению совершения шпионских действий.

Имитационная модель поведения внутреннего нарушителя ИБ позволяет провести анализ инсайдерских угроз ИБ в организации и принять соответствующие меры по их минимизации. Она принципиально отличается по сложности, точности и подробности от неформального субъективного объяснения или «вербальной» модели, которую человек обычно формирует для достижения поставленной цели. Кроме того, она помогает выявить слабые места безопасности и предположить стратегию нарушителя. Основываясь на личных склонностях и интересах, профессиональных стрессах, которые приводят к неадекватным поведенческим реакциям и выражаются в совершении нарушений, поощренных недостаточным или несоответствующим вмешательством со стороны руководства, она описывает варианты действий нарушителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Ю. А., Перова В. И., Мичасова О. В. Работа с программным пакетом ITNINK. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2007. – 72 с.
2. Принципы и аксиомы анализа системной динамики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://all-politologija.ru/knigi/modelirovanie-i-analiz-politicheskix-processov-ozhiganov/principi-i-aksiomi-analiza-sistemnoj-dinamiki>.
3. Steven R. et al Band Comparing Insider IT Sabotage and Espionage: A Model-Based Analysis: Technical Report. – Software Engineering Institute, 2006.
4. Обоснование структуры и содержания плана защиты информации с разработкой модели нарушителя [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://savestud.su/freework/4/Obosnovanie-strukturi-i-soderzhaniya-plana-zashchiti-informatsii-s-razrabotkoy-modeli-narushitelya-CHast-1.html>.
5. Описание возможных нарушителей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ms.znate.ru/docs/151/index-64933.html?page=3>.

ЕРЕМКИНА Н. В.

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ СФЕРАМИ, ОКРУЖЕННЫМИ ДВОЙНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Аннотация. В начальном приближении получено выражение для силы, действующей между двумя одинаковыми сферическими частицами, окруженными двойным электрическим слоем. Данный результат согласуется с законом Кулона.

Ключевые слова: суспензия, двойной электрический слой, уравнение Пуассона-Больцмана, мультиполь, закон Кулона.

EREMKINA N. V.

FORCES OPERATING BETWEEN TWO IDENTICAL SPHERES SURROUNDED BY ELECTRICAL DOUBLE LAYER

Abstract. The expression of initial-order accuracy is obtained for the force operating between two identical spherical particles surrounded by a double electric layer. This result agrees with the Coulomb's law.

Keywords: suspension, double electric layer, Poisson-Boltzmann equation, multipole, Coulomb's law.

Введение. Электростатическое взаимодействие между частицами взвеси может происходить при перекрытии двойных электрических слоев (ДЭС) их окружающих. ДЭС – это поверхностные слои пространственно разделенных электрических зарядов противоположного знака, образующихся на границе раздела «твердое тело – электролит» [1].

Толщина ДЭС определяет дальность электростатических взаимодействий в растворе и характеризуется величиной κ^{-1} [1; 2].

При описании таких взаимодействий особый интерес представляют силы, которые возникают между частицами с перекрывающимися ДЭС. Вычислению сил, возникающих между двумя одинаковыми частицами посвящена данная работа.

Математическая модель. В неподвижной сплошной среде расположены две неподвижные сферические частицы $\Omega(1)$ и $\Omega(2)$ радиуса a . Для простоты введем декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом O в центре первой частицы. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задает положение произвольной точки пространства относительно центра первой частицы, а вектор $\vec{x} - \vec{r}$ – относительно центра второй, который находится на оси x_3 на расстоянии r от начала координат.

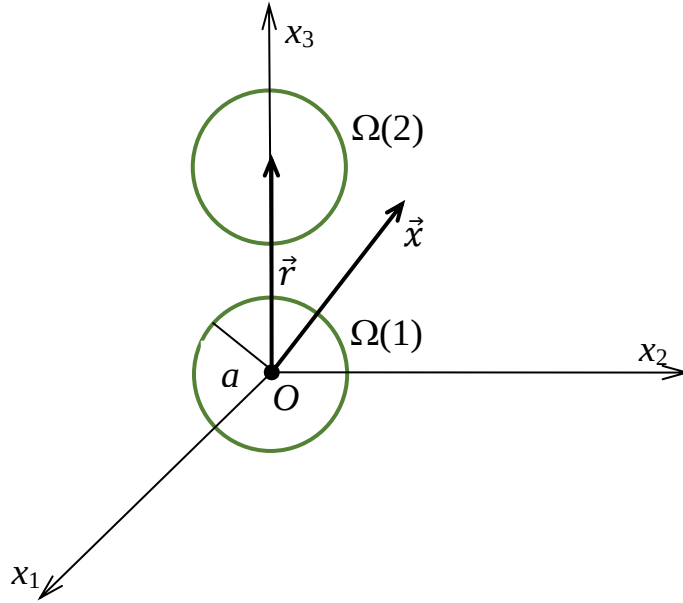


Рис. 1.

В данном случае для описания поля нам достаточно указать его потенциал ψ . Вне частиц он удовлетворяет уравнению Пуассона – Больцмана:

$$\Delta\psi = \kappa^2\psi, \quad (1)$$

где Δ – это оператор Лапласа.

На поверхности частиц потенциал постоянен, а вдали от частиц равен 0:

$$\begin{aligned} \psi|_{\partial\Omega(1)} = \psi|_{\partial\Omega(2)} = \psi_a, \\ \psi|_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На произвольную частицу Ω действует сила с компонентами

$$F_i = \oint_{\partial\Omega} p_{ij} n_j dS. \quad (3)$$

В среде с неоднородным распределением потенциала компоненты тензора напряжений p_{ij} вычисляются по формуле:

$$p_{ij} = -\frac{\varepsilon_F}{8\pi} \frac{\partial\psi}{\partial x_s} \frac{\partial\psi}{\partial x_s} \delta_{ij} + \frac{\varepsilon_F}{4\pi} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_j}; \quad (4)$$

δ_{ij} есть символ Кронекера, ε_F – диэлектрическая проницаемость среды, по повторяющимся индексам идет суммирование в пределах от 1 до 3 [3].

Наша задача – из уравнений (3) и (4) вычислить силу F_i , действующую на частицу $\Omega(1)$, а для этого необходимо найти функцию ψ , удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям (2).

Решение задачи. В [4] распределение потенциала было найдено в виде разложения по мультиполям:

$$\begin{aligned} \psi = & C_0(1)\Lambda_0(\vec{x}) + C_j(1)\Lambda_j(\vec{x}) + C_{jk}(1)\Lambda_{jk}(\vec{x}) + C_0(2)\Lambda_0(\vec{x} - \vec{r}) + \\ & + C_{jkl}(1)\Lambda_{jkl}(\vec{x}) + C_{jklm}(1)\Lambda_{jklm}(\vec{x}) + \dots + C_j(2)\Lambda_j(\vec{x} - \vec{r}) + C_{jk}(2)\Lambda_{jk}(\vec{x} - \vec{r}) + \\ & + C_{jkl}(2)\Lambda_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}) + C_{jklm}(2)\Lambda_{jklm}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Функция Λ_0 определяется следующим образом:

$$\Lambda_0(\vec{x}) = \frac{\exp(-\kappa|\vec{x}|)}{|\vec{x}|},$$

а мультиполи более высокого порядка суть частные производные Λ_0 :

$$\Lambda_{j\dots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} \Lambda_0(\vec{x}).$$

Искомые величинами служат тензорные коэффициенты $C_0(N)$, $C_j(N)$, $C_{jk}(N)$,... в этом разложении. Номер $N = 1, 2$ указывает на частицу, к которой относится тот или иной коэффициент.

Принцип построения общего решения (5) является достаточно общим и может быть применен для моделирования ДЭС в системах с произвольным количеством и конфигурацией частиц. Эти частицы могут, например, образовать бесконечную трехмерную периодическую решетку [5]. В любом случае структура коэффициентов определяется группой симметрии, которую имеют граничные условия исходного уравнения в частных производных.

В нашей работе конфигурация частиц имеет осевую симметрию, поэтому

$$C_i = CB \cdot b_i, C_{ij} = CC \cdot b_i b_j, C_{ijkl} = CD \cdot b_i b_j b_k b_l, \dots,$$

где b_i – компоненты единичного направляющего вектора оси симметрии Ox_3 .

Чтобы найти коэффициенты C_0 , CB , CC , CD и им подобные, вводятся малые безразмерные параметры, характеризующие расстояние между частицами и толщину ДЭС по сравнению с их радиусами:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \quad \delta = \kappa r = \frac{r}{\kappa^{-1}}.$$

В работе [4] коэффициенты разложения были найдены с точностью до восьмой степени малых параметров.

Пользуясь этим решением, мы в начальном приближении нашли силу, действующую на частицу с центром в начале координат.

С точностью до второй степени малых параметров коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} C_0(1) = C_0(2) &= \Psi - \varepsilon\Psi + \delta\varepsilon\Psi, \\ CB(1) = -CB(2) &= a\varepsilon^2\Psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Остальные коэффициенты имеют более высокий порядок малости и потому считаются равными нулю. Здесь и далее $\Psi = a\psi_a / e^{ka}$.

Подставив (5) и выражения для коэффициентов (6) в (4) и (3), получим:

$$F_i = -\Psi^2 \frac{\varepsilon_F \varepsilon^2}{a^2} b_i,$$

что равносильно

$$F_i = -\Psi^2 \frac{\varepsilon_F}{r^2} b_i. \quad (7)$$

Анализ решения. Можно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ заряд Q , сосредоточенный на поверхности частицы $\Omega(1)$, равен

$$Q = \varepsilon_F \Psi.$$

Поскольку частицы одинаковы, на поверхности $\Omega(2)$ сосредоточен такой же заряд.

Выражая отсюда Ψ и подставляя в (7), получаем известный закон Кулона:

$$F_i = -\frac{Q^2}{\varepsilon_F r^2} b_i.$$

Это означает, что выражение (7) верно. В пределе, когда сферы, окруженные ДЭС, расположены далеко друг от друга, их можно считать точечными зарядами.

Так как вектор $\vec{b}$ сонаправлен с осью Ox_3 , то знак « $-$ » в выражении (7) говорит о том, что сила действует со стороны частицы $\Omega(2)$ на частицу $\Omega(1)$ в направлении $(-x_3)$, а значит, является силой отталкивания. Именно такие силы должны действовать между частицами с одноименными зарядами.

Заключение. Итак, полученный результат согласуется с законом Кулона. В пределе при $r \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ частицы, окруженные ДЭС, ведут себя как точечные заряды. Так как распределение ψ симметрично, заряды частиц равны; поэтому они должны отталкиваться.

Выражение (7), полученное вручную, можно использовать в качестве теста при проведении более сложных расчетов на ЭВМ, например, в системе Wolfram Mathematica. Результаты, найденные с более высокой степенью точности, в пределе должны переходить в формулу (7).

Саму найденную силу F_i можно применять для детального описания суспензии, например, исследовать движение частиц и жидкости под действием такой силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридрихсберг Д. А. Курс коллоидной химии: учебник для вузов. – СПб: Химия, 1995. – 400 с.
2. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 532 с.
4. Сыромясов А. О., Еремкина Н. В. Математическое моделирование электростатического взаимодействия двух одинаковых сфер, окруженных ДЭС // Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 100–108.
5. Сыромясов А. О. Электрогидродинамика структурированной суспензии // Труды Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8, № 1. – С. 301–306.

КОЗЛОВ М. В., МАРТЫНОВ В. А.

АНАЛИЗ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ ФОРМ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Аннотация. Проведено исследование алгоритма анализа знакоопределенности полиномов четной степени путем сведения их к квадратичным формам. Приводится формализация алгоритма, а также простейший анализ сложности в наихудшем случае.

Ключевые слова: квадратичная форма, полином, однородная форма, знакоопределенность.

KOZLOV M. V., MARTYNOV V. A.

ANALYSIS OF FIXED SIGN PROPERTY OF EVEN DEGREE FORMS

Abstract. The article investigates the algorithm for analyzing the property of having fixed sign of polynomials of even degree by reducing them to quadratic forms. The formalization of the algorithm is described, as well as the simplest complexity analysis in the worst case is provided.

Keywords: quadratic form, polynomial, homogeneous form, property of having fixed sign.

Введение. В теории устойчивости движения по Ляпунову активно применяются два метода, предложенные самим А. М. Ляпуновым [1]. Первый метод основывается на анализе линейного приближения и использует алгебраический аппарат. Второй метод основан на применении специальных функций (так называемых «функций Ляпунова»), удовлетворяющих условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. В контексте второго метода очень важными становятся свойства знакопостоянности и знакоопределенности, которыми должны обладать как сама функция Ляпунова, так и ее производная на решениях исследуемой системы дифференциальных уравнений.

Приведем необходимые определения. Пусть $D \subset R^n$ n -мерная область, содержащая начало координат, $x = (x_1, \dots, x_n)$ - вектор из D .

Определение 1. [1] Непрерывная на D функция $f(x)$ называется *знако- постоянной положительной*, если $f(0) = 0$ и $f(x) \geq 0$ при $x \in D$ ($f(x) \leq 0$ для *знакопостоянных отрицательных функций*).

Определение 2. [1] Непрерывная на D функция $f(x)$ называется *знакоопределенной положительной* (или просто *положительно определенной*), если $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \in D, x \neq 0$ ($f(x) < 0$ для *знакоопределенных отрицательных функций*).

Поскольку основной сферой применения второго метода является изучение нелинейных систем, то проверка знакоопределенности (или знакопостоянности) получаемых функций часто вызывает затруднения и в общем случае является нерешаемой задачей. Для облегчения ситуации в рамках второго метода Ляпунова принято использовать функции

специальных классов, для которых разработаны методы такого анализа. Базовым является класс квадратичных форм вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

где $a_{ij} \in R$ — постоянные коэффициенты, причем $a_{ij} = a_{ji}$ (принято для удобства). Очевидно, что квадратичная форма однозначно задается своей матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, которая, как указано выше, симметрична. Для однозначного определения, является ли квадратичная форма знакоопределенной, служит следующий критерий.

Теорема 1 (Критерий Сильвестра). *Квадратичная форма $f(x)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны:*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Для отрицательной определенности необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

Квадратичные формы применяются для исследования линейных дифференциальных систем, но для нелинейных систем они в общем случае не подходят. В теории выделен очень важный класс так называемых однородных систем, правая часть которых является однородным отображением [2]. Самым распространенным их примером являются системы с полиномиальной правой частью. Для таких систем функция Ляпунова может быть построена в виде однородного полинома четной степени. В настоящий момент критерий знакоопределенности четных полиномов отсутствует, поэтому их исследование проводится различными путями. Одним из таких является сведение полинома к квадратичной форме, предложенный в работе [3]. Данная работа посвящена построению и анализу описанного в этой работе алгоритма.

Постановка задачи. Рассмотрим упорядоченный набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, состоящий из целых неотрицательных компонентов $\alpha_i, i = \overline{1, n}$. Обозначим через $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Будем использовать подобные наборы для укороченной записи слагаемых в сложных выражениях по следующим правилам:

- Запись $\alpha + \alpha'$ означает покомпонентную сумму $\alpha + \alpha' = (\alpha_1 + \alpha_1', \dots, \alpha_n + \alpha_n')$.
- Запись a_α означает, что переменная a имеет n целочисленных неотрицательных индексов, т.е. $a_\alpha = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.

- Запись x^α для вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ означает моном вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Рассмотрим полином четной степени $2m$

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha x^\alpha, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, a_α — вещественные коэффициенты, суммирование проводится по всем возможным различным α , таким, что $|\alpha| = 2m$. Целью данной работы является построение алгоритма, который позволил бы определить, является ли полином вида (1) знакоопределенной функцией. Для этого, согласно методу, предложенному в работе [3], преобразуем полином $f(x)$ в квадратичную форму. Введем новые переменные

$$y_1 = x_1^m, y_2 = x_1^{m-1} x_2, \dots, y_{N-1} = x_{n-1} x_n^{m-1}, y_N = x_n^m, \quad (2)$$

так, что y_i пробегают все возможные мономы x^β при $|\beta| = m$. В результате, полином $f(x)$ преобразуется в квадратичную форму

$$g(y) = \sum_{i,j=1}^N g_{ij} y_i y_j, \quad (3)$$

которую можно исследовать на знакоопределенность критерием Сильвестра. Преобразование такое в общем случае неоднозначно, поэтому в контексте решаемой задачи выбирать нужно только те квадратичные формы, которые содержат все квадраты x_i^2 (иначе, критерий Сильвестра заведомо не выполняется). Реализация данного подхода наталкивается на две проблемы:

1. Как сказано выше, преобразование полинома в квадратичную форму является неоднозначным, т.к. некоторые мономы x^α нельзя однозначно разбить на произведение двух мономов вида x^β . Однако, число таких вариантов конечно.

2. Сложность алгоритма оценивается как, что при большой размерности вектора x требует огромного количества вычислительных операций.

Обе проблемы могут быть решены применением современной вычислительной техники и языков программирования. Это требует четкой формализации алгоритма, которая приводится далее.

Формализация алгоритма. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i — целые неотрицательные числа, $i = \overline{1, n}$.

Определение 3. Будем говорить, что набор α старше набора α' , если существует номер $k \in \{1, \dots, n\}$, такой, что $\alpha_k > \alpha'_k$ и $\alpha_i = \alpha'_i$ при $i < k$.

Рассмотрим множество $\Omega_{2m} = \{\alpha : |\alpha| = 2m\}$ и множество натуральных чисел $\mathbb{E}_{2m} = \{1, \dots, |\Omega_{2m}|\}$. Очевидно, что $|\Omega_{2m}| = |\mathbb{E}_{2m}| = C_{2m+n-1}^{2m}$. Пусть $p : \mathbb{E}_{2m} \rightarrow \Omega_{2m}$ есть взаимно однозначное отображение, такое, что $p(i)$ старше $p(j)$ при $i < j$. Будем говорить,

что такое отображение p упорядочивает множество Ω_{2m} в лексикографическом порядке. Теперь полином (1) можно записать в строго упорядоченном виде

$$f(x) = \sum_{s=1}^{|\Omega_{2m}|} a_{p(s)} x^{p(s)}. \quad (4)$$

Рассмотрим множества $\Omega_m = \{\alpha : |\alpha| = m\}$, $\Xi_m = \{1, \dots, |\Omega_m|\}$ и отображение $q : \Xi_m \rightarrow \Omega_m$, которое упорядочивает множество Ω_m в лексикографическом порядке. Заметим, что $|\Omega_m| = |\Xi_m| = C_{m+n-1}^m$. Теперь замену (2) тоже можно записать в строго упорядоченном виде

$$y_i = x^{q(i)}, i \in \Xi_m. \quad (5)$$

Обозначим через Ξ_m^2 множество, состоящее из всевозможных неупорядоченных пар элементов множества Ξ_m . Очевидно, что $|\Xi_m^2| = C_{|\Omega_m|}^2$. Рассмотрим отображение $\Phi : \Xi_m^2 \rightarrow \Xi_{2m}$, действующее по следующему правилу:

$$(i, j) \xrightarrow{\Phi} p^{-1}(q(i) + q(j)), (i, j) \in \Xi_m^2. \quad (6)$$

Отображение Φ является сюръективным, но не инъективным, потому что некоторые наборы $\alpha \in \Omega_{2m}$ неоднозначно раскладываются в сумму $\beta + \beta', \beta, \beta' \in \Omega_m$. Применяя замену (5) и отображение Φ , каждое слагаемое вида $a_{p(s)} x^{p(s)}$ из полинома (4) можно представить в виде

$$a_{p(s)} x^{p(s)} = a_{q(i)+q(j)} y_i y_j \quad (7)$$

где $(i, j) \in \Phi^{-1}(s)$, $\bar{a}_{ij} = a_{p(s)}$. В результате получаем семейство квадратичных форм, соответствующих записи (3),

$$g(y) = \sum_{s=1}^{|\Omega_{2m}|} a_{q(i)+q(j)} y_i y_j. \quad (8)$$

В выражении (8) пара индексов (i, j) выбирается из множества $\Phi^{-1}(s)$ для каждого значения s . Матрица G соответствующей квадратичной формы строится по правилу

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{q(i)+q(j)}, i \neq j, \\ a_{q(i)+q(j)}, i = j. \end{cases}$$

После того, как матрица G построена, необходимо определить, не пропадают ли в соответствующей квадратичной форме некоторые переменные y_i , и какие из переменных y_i в ней остаются. Для того, чтобы наглядно пояснить ситуацию, рассмотрим пример. Пусть дана положительно определенная форма четвертого порядка

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4.$$

После замены

$$y_1 = x_1^2, y_2 = x_1 x_2, y_3 = x_2^2 \quad (9)$$

получаем квадратичную форму

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_3^2.$$

Матрица данной квадратичной формы имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, очевидно, не удовлетворяет критерию Сильвестра. Все дело в том, что в квадратичной форме просто отсутствует переменная y_2 . Для того, чтобы решить эту проблему, необходимо удалить из матрицы G вторую строку и второй столбец, которые являются нулевыми.

Рассмотрим другой пример. Пусть дана знакопостоянная форма

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1^2 x_2^2.$$

Замена (9) приводит к квадратичной форме

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2.$$

с матрицей

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После удаления третьей строки и третьего столбца получаем положительно определенную матрицу, хотя исходная форма $f(x_1, x_2) =$ является лишь знакопостоянной. Такой эффект получается в силу того, что замены $y_1 = x_1^2$ и $y_2 = x_1 x_2$ содержат общий множитель x_1 . Следовательно, исследовать матрицу G после удаления нулевых строк и столбцов следует только тогда, когда оставшиеся переменные y_i не имеют общего множителя.

Обобщая все проведенные рассуждения, получаем следующий алгоритм:

1. Исходные данные: числа n , $2m$, массив коэффициентов a_α , упорядоченный по α . Если коэффициент в полиноме отсутствует, то соответствующий элемент массива равен нулю.
2. По числам n , m строятся упорядоченные массивы Ω_{2m} , Ω_m .
3. Строится массив Φ длины $|\Omega_{2m}|$, состоящий из списков. В списке с номером s содержатся пары (i, j) , такие, что $\Omega_m[i] + \Omega_m[j] = \Omega_{2m}[s]$.
4. Строится матрица G квадратичной формы $g(y)$ размерности $|\Omega_m| \times |\Omega_m|$. Для этого необходимо пройти по массиву списков Φ и из каждого списка $\Phi[s]$ выбрать одну пару (i, j) . Тогда

$$G[i][j] = g[j][i] = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{\Omega_{2m}[s]}, & i \neq j, \\ a_{\Omega_{2m}[s]}, & i = j. \end{cases}$$

5. Пусть $s_1, s_2, \dots, s_k$ – номера ненулевых строк в матрице G . Если $\Omega_m[s_1], \dots, \Omega_m[s_k]$ не имеют общей компоненты, отличной от нуля, то матрица G после удаления нулевых строк и столбцов исследуется на критерий Сильвестра, иначе данная матрица пропускается.

6. Этапы 4, 5 повторяются до тех пор, пока не будут перебраны все возможные матрицы G либо пока какая-либо из этих матриц не будет удовлетворять критерию Сильвестра.

Оценка сложности и способ реализации. Время выполнения алгоритма зависит от способа его реализации, и его оптимизация является отдельной темой. Поэтому ограничимся простой оценкой числа получаемых квадратичных форм.

Общее количество получаемых квадратичных форм (т.е. матриц G) вычисляется по формуле

$$N_q = \prod_{s=1}^{|\Xi_{2m}|} |\Phi^{-1}(s)|. \quad (10)$$

Для нахождения верхней оценки правой части выражения (10) решим следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} h(z_1, \dots, z_{|\Xi_{2m}|}) &= \prod_{s=1}^{|\Xi_{2m}|} z_s \rightarrow \max, \\ z_1 + \dots + z_{|\Xi_{2m}|} &= |\Xi_m^2|, \\ z_1 > 0, \dots, z_{|\Xi_{2m}|} &> 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Методами математического анализа несложно установить, что решение задачи (11) достигается при значениях $z_1 = \dots = z_{|\Xi_{2m}|} = |\Xi_m^2|/|\Xi_{2m}|$ и равно $h_{\max} = (|\Xi_m^2|/|\Xi_{2m}|)^{|\Xi_{2m}|}$. Следовательно, величина N_q должна удовлетворять неравенству

$$N_q \leq \left(\frac{|\Xi_m^2|}{|\Xi_{2m}|}\right)^{|\Xi_{2m}|} = \left(\frac{|\Xi_m|^2 + |\Xi_m|}{2|\Xi_{2m}|}\right)^{|\Xi_{2m}|}. \quad (12)$$

Для продолжения оценки (12) воспользуемся соотношением

$$\frac{|\Xi_m|}{|\Xi_{2m}|} = \frac{C_{m+n-1}^m}{C_{2m+n-1}^{2m}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{m+k}{2m+k} \leq \frac{2}{3}.$$

Действительно, каждый множитель вида $(m+k)/(2m+k)$ строго меньше единицы и убывает при возрастании m , поэтому наибольшее свое значение произведение $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{m+k}{2m+k}$ принимает при $n=2$ и $m=1$. Теперь, учитывая неравенство (12) и $|\Xi_m| \leq 2/3|\Xi_{2m}|$, получаем

$$N_q \leq \left(\frac{2}{9}|\Xi_{2m}| + \frac{1}{3}\right)^{|\Xi_{2m}|}, \quad (13)$$

где $|\Xi_{2m}| = C_{2m+n-1}^{2m}$.

Пример.

Рассмотрим полином четвертой степени

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - 3x_1 x_2^3 + 3x_2^4.$$

Опишем работу алгоритма по этапам.

1. Исходные данные: $n = 2$, $2m = 4 \Rightarrow m = 2$, упорядоченный массив коэффициентов $[2, 0, 1, -3, 1]$.

2. $\Omega_4 = [(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)]$, $\Omega_2 = [(2, 0), (1, 1), (0, 2)]$.

3. $\Phi = [[(1, 1)], [(1, 2)], [(1, 3), (2, 2)], [(2, 3)], [(3, 3)]]$.

4. В данном случае имеем две матрицы

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что матрица G_2 удовлетворяет критерию Сильвестра о положительной определенности (все ее главные диагональные миноры строго положительны).

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: МГУ, 1998. – 480 с.
2. Зубов В. И. Устойчивость движения. – М.: Высшая школа, 1973. – 271 с.
3. Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К. Условия знакоопределенности четных форм и устойчивости в целом нелинейных систем // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 5. – С. 707–713.

ЧЕБОКСАРОВ В. В., МАМЕДОВА Т. Ф.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ДОХОДОВ В ЗАМКНУТОЙ
СИСТЕМЕ С УЧЕТОМ ТЕНЕВОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ**

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель, заданная нелинейной системой дифференциальных уравнений для исследования динамики доходов экономических агентов в замкнутой экономической системе с учетом теневой экономической деятельности. Освещается взаимосвязь официальной и теневой экономики. Оценивается роль налоговой политики в росте или снижении теневых процессов, а также ущерб, наносимый теневой экономикой социально-экономическому положению общества.

Ключевые слова: математическая модель, налоги, система дифференциальных уравнений, бюджет, экономический рост, теневая экономическая активность, экономические агенты.

CHEBOKSAROV V. V., MAMEDOVA T. F.

**MATHEMATICAL MODEL OF INCOME DYNAMICS IN A CLOSED SYSTEM
CONSIDERING INFORMAL ECONOMIC ACTIVITIES**

Abstract. The article considers a mathematical model of non-linear system of differential equations to study the dynamics of income of economic agents in a closed economic system with different types of taxation, taking into account informal economic activities. The study highlights the relationship between the official and shadow economy, assesses the role of tax policy in the growth or reduction of shadow processes and the damage done by the shadow economy to the socioeconomic status of society.

Keywords: mathematical model, taxes, system of differential equations, budget, economic growth, informal economic activities, economic agents.

Введение. Теневая экономика является одной из важнейших проблем, стоящих перед любым государством. Она является одной из внутренних угроз для экономической безопасности общества, выводя огромное количество ресурсов из официальной экономики, нарушая целостность производственных процессов, а также сокращая поступления в бюджеты регионов и страны в целом.

Хотя теневые экономические процессы и могут сглаживать негативные социальные процессы, вызванные непродуманным реформированием, например, предоставлением дополнительных рабочих мест, и, как следствие, дополнительных доходов населению, страдающему от безработицы или, например, снабжением продукцией потребителей с небольшими доходами, что может быть хорошо для населения в долгосрочной перспективе, они лишают экономику ресурсов, необходимых для ее восстановления и последующего

подъема. Если же ресурсы, заключенные в теневой экономике перевести в официальную экономику, то они станут дополнительным подспорьем для экономического роста.

В связи с этим предлагается математическая модель для оценки влияния, которое оказывают теневые процессы в замкнутой экономической системе на рост доходов, входящих в нее экономических агентов.

Постановка задачи. Рассмотрим замкнутую экономическую систему, состоящую из следующих агентов: Производственный сектор, Домохозяйства, Государство [1; 2]. Сделаем следующие предположения:

1. Производственный сектор производит ровно столько, сколько могут потребить Домохозяйства. Будем считать что закон, по которому Производственный сектор выпускает свою продукцию, задается функцией Потребления $C(w_2)$. Домохозяйства в свою очередь предлагают рабочую силу и потребляют конечную продукцию Производственного сектора. Будем считать, что в начальный период Производственный сектор имеет первоначальный доход C_0 , а Домохозяйства – C_1 .

2. Государство собирает налог с Производственного сектора и налог с Домохозяйств, а также направляет инвестиции в Производственный сектор и социальные выплаты Домохозяйствам.

3. Домохозяйства потребляют как официальный, так и теневой продукт. Домохозяйства формируют свой бюджет за счет доходов от социальных выплат от Государства и доходов, как официальных, облагаемых налогом, так и теневых, налогом не облагаемых, от Производственного сектора. При этом бюджет расходуется на выплату налога с официальной части дохода.

4. В Производственном секторе производимый продукт делится на официальный, выручка за который налогом облагается, и неофициальный, выручка с которого налогом не облагается, но может попасть под штрафные санкции. Официальная выручка образуется за счет реализации официального продукта. Теневая выручка образуется за счет реализации теневого продукта. Официальная прибыль формируется из официальной Выручки за вычетом налога и оплаты официального труда Домохозяйствам. Теневая прибыль формируется из теневой выручки за вычетом штрафных санкций, а также оплаты теневого труда Домохозяйствам. Доход Производственного сектора растет за счет официальной и теневой прибыли и инвестиций, а уменьшается за счет прочих расходов ΔK .

5. Государство формирует бюджет из налогов с Производственного сектора и Домохозяйств, а также из теневой выручки, попавшей под штрафы. Весь бюджет делится на инвестиции Производственному сектору и социальные выплаты Домохозяйствам.

Требуется исследовать зависимость роста доходов экономических агентов с учетом их теневой активности, выраженной в сокрытии части доходов от налогообложения.

Математическая модель задачи. Введем следующие обозначения:

w_1 – доход Производственного сектора;

w_2 – доход Домохозяйств;

α – доля 1 рабочего в производстве;

L – количество рабочих;

τ_1 – налог на прибыль;

γ – доля теневого сектора;

p – цена ед. продукции;

β – штрафные санкции;

I – инвестиции;

ΔK – прочие расходы;

τ_2 – налог на доходы Физических Лиц;

s – субсидии;

ε – доля Бюджета, которая идет на Инвестиции;

Математическая модель задачи, учитывая все вышеуказанные условия и предположения, будет иметь вид [3–6]:

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = (1 - \alpha L)((1 - \tau_1)(1 - \gamma) * pC(w_2) + (1 - \beta)\gamma * pC(w_2)) + I - \Delta K, \\ \frac{dw_2}{dt} = (1 - \tau_2)\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma) * pC(w_2) + \alpha L(1 - \beta)\gamma * pC(w_2) + s, \\ I = \varepsilon(\tau_1(1 - \gamma) * pC(w_2) + \beta\gamma * pC(w_2) + \tau_2\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma) * pC(w_2)), \\ s = (1 - \varepsilon)(\tau_1(1 - \gamma) * pC(w_2) + \beta\gamma * pC(w_2) + \tau_2\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma) * pC(w_2)). \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = ((1 - \alpha L)((1 - \tau_1)(1 - \gamma) + (1 - \beta)\gamma) + \varepsilon(\tau_1(1 - \gamma) + \beta\gamma + \tau_2\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma))) * pC(w_2) - \Delta K, \\ \frac{dw_2}{dt} = ((1 - \tau_2)\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma) + \alpha L(1 - \beta)\gamma + (1 - \varepsilon)(\tau_1(1 - \gamma) + \beta\gamma + \tau_2\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma))) * pC(w_2). \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$a_1 = ((1 - \alpha L)((1 - \tau_1)(1 - \gamma) + (1 - \beta)\gamma) + \varepsilon(\tau_1(1 - \gamma) + \beta\gamma + \tau_2\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma)))p.$$

$$b_1 = ((1 - \tau_2)\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma) + \alpha L(1 - \beta)\gamma + (1 - \varepsilon)(\tau_1(1 - \gamma) + \beta\gamma + \tau_2\alpha L(1 - \tau_1)(1 - \gamma))) - 1)p.$$

Получим,

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = a_1 * C(w_2) - \Delta K, \\ \frac{dw_2}{dt} = b_1 * C(w_2). \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что функция потребления имеет вид простейшей кейнсианской линейной функции потребления [1] $C(w_2)=a+b \cdot w_2$, где $b \in [0,1]$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = a_1(a + bw_2) - \Delta K, \\ \frac{dw_2}{dt} = b_1(a + bw_2). \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (2), с начальными условиями $w_1(t) = C_0, w_2(t) = C_1$, имеет вид:

$$\begin{cases} w_1 = \frac{-aa_1 + C_0bb_1 - a_1bC_1 + aa_1e^{bb_1t} + a_1bC_1e^{bb_1t} - bb_1\Delta Kt}{bb_1}, \\ w_2 = \frac{-a + ae^{bb_1t} + bC_1e^{bb_1t}}{b}. \end{cases} \quad (3)$$

Численное моделирование динамики изменения доходов в замкнутой экономической системе. Рассмотрим несколько вариантов возможных ситуаций динамики изменения доходов в замкнутой экономической системе в зависимости от доли теневых процессов и при различных налоговых ставках.

1. Пусть, в системе заданы высокие налоговые ставки $\tau_1 = 0.8, \tau_2 = 0.9$, доходы от которых формируют бюджет w_3 , который полностью перераспределяется в пользу Домохозяйств ($\varepsilon = 0$), при этом весь доход попадает под обложение налогом со стороны Государства ($\gamma = 0$). Тогда решение (3) исследуемой системы (2) при значениях $a = 1, b = 0.68, \alpha = 0.001, \beta = 0.1, p = 5, L = 900, \varepsilon = 0, \Delta K = 1, C_0 = 0, C_1 = 0$ будет иметь вид, изображенный на рис. 1.

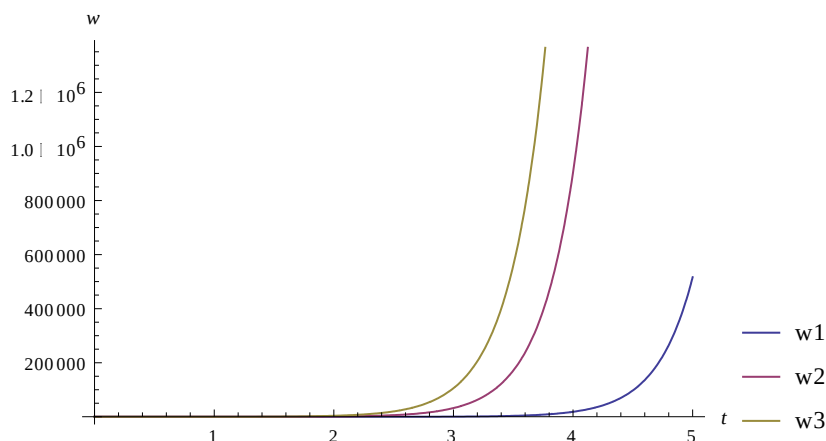


Рис. 1. График зависимости изменения доходов при высоких налоговых ставках и отсутствии теневых процессов.

Высокие налоговые ставки и отсутствие теневых процессов обуславливают резкий рост доходов Домохозяйств с 2 по 3 год до 1,2 млн., но это же и тормозит рост доходов Производственного сектора, которые только к 5 году достигают 500 000.

2. Если же половина доходов Производственного сектора получена за счет теневых процессов ($\gamma = 0.5$) и может облагаться только штрафными санкциями ($\beta = 0.1$), то решение (3) исследуемой системы (2) при значениях $a = 1, b = 0.68, \alpha = 0.001, \beta = 0.1, \tau_1 = 0.8, \tau_2 = 0.9, p = 5, L = 900, \varepsilon = 0, \Delta K = 1, C_0 = 0, C_1 = 0$ будет иметь вид, изображенный на рис. 2.

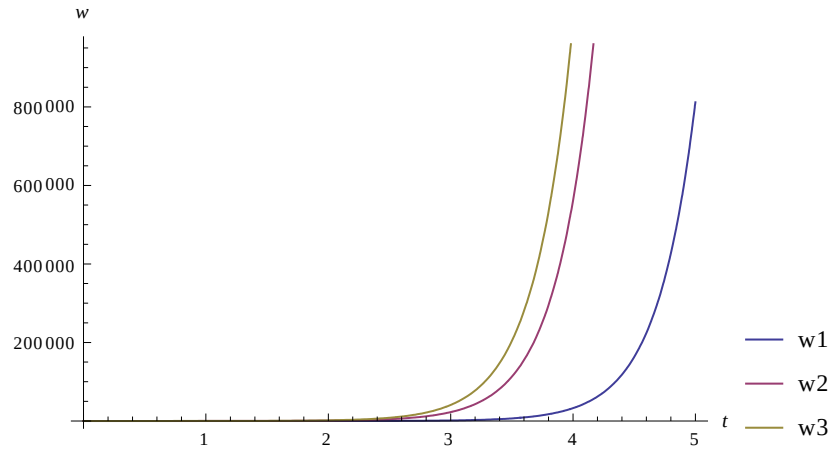


Рис. 2. График зависимости изменения доходов при высоких налоговых ставках и равной доле официальных и теневых процессов.

Как видно из рисунка 2, рост размеров бюджета и, как следствие, рост размеров доходов Домохозяйств замедлится, например, к концу 4 года составит немногим более 800 000, а рост размеров доходов Производственного сектора наоборот увеличится, например, к концу 5 года он составит 800 000 вместо 500 000 при отсутствии теневых процессов.

3. Решение (3) исследуемой системы (2) при значениях $a = 1, b = 0.68, \alpha = 0.001, \beta = 0.1, p = 5, \gamma = 0, L = 900, \varepsilon = 0, \Delta K = 1, \tau_1 = 0.8, \tau_2 = 0.9, C_0 = 0, C_1 = 0$ будет иметь вид, изображенный на рис. 3.

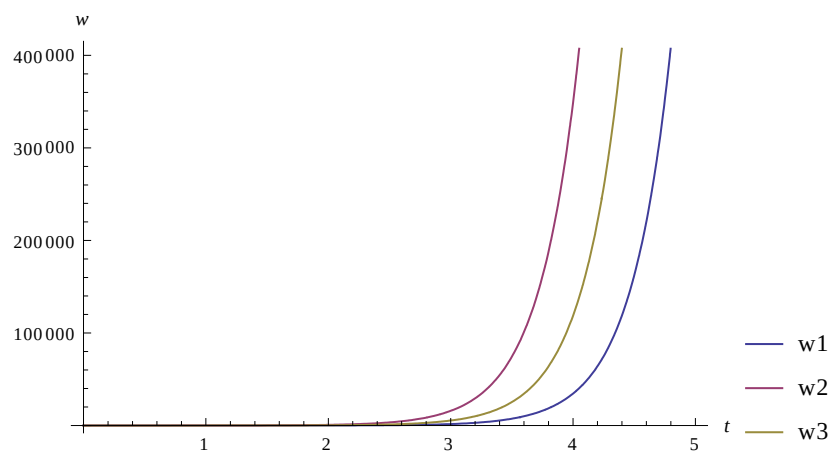


Рис. 3. График зависимости изменения доходов при высоких налоговых ставках и отсутствии официальных процессов.

Поскольку весь доход производственного сектора будет получен за счет теневых процессов, то бюджет Государства будет формироваться только из поступлений от штрафных санкций на теневой доход, а т.к. бюджет полностью перераспределяется на доходы Домохозяйств, то это значительно замедлит их рост, и к концу 4 года размер доходов Домохозяйств может составить немногим более 400 000. Так как объем продукции, которую выпускает Производственный сектор зависит от размера дохода Домохозяйств, то вместо ожидаемого увеличения, по сравнению с предыдущим случаем, будет наблюдаться снижение роста размера доходов, и к концу 5 года он составит около 400 000, что является наименьшим показателем из всех рассмотренных примеров.

4. Теперь рассмотрим влияние теневых процессов на размер доходов Производственного сектора при небольших налоговых ставках. ($\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.2$). Будем считать, что все собранные налоги перераспределяются в пользу Домохозяйств. Теневые процессы отсутствуют. Тогда решение (3) исследуемой системы (2) при значениях $a = 1, b = 0.68, \alpha = 0.001, \beta = 0.1, p = 5, L = 900, \varepsilon = 0, \Delta K = 1, C_0 = 0, C_1 =$ будет иметь вид, изображенный на рис. 4.

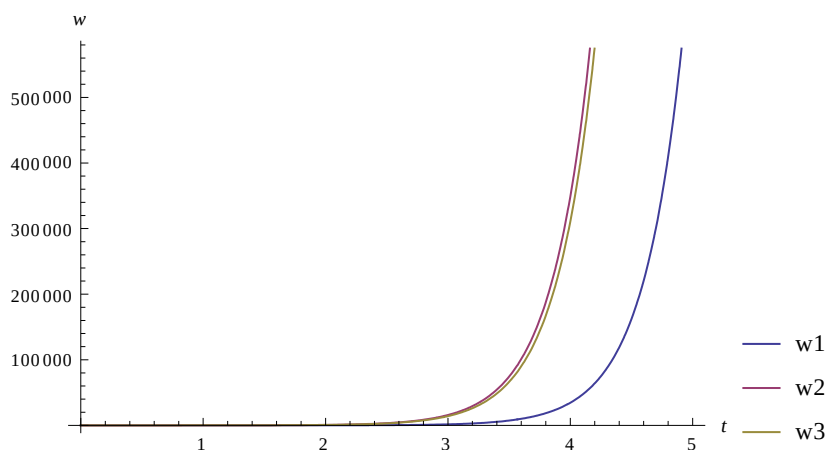


Рис. 4. График зависимости изменения доходов при низких налоговых ставках и отсутствии теневых процессов.

Так как бюджет Государства полностью перераспределяется в пользу Домохозяйств, а налоговые сборы небольшие, то, по сравнению с графиком 1, рост доходов небольшой и составляет немного больше 500 000. Кривая доходов Производственного сектора в этом случае совпадает с аналогичной кривой из графика 1.

5. Теперь рассмотрим ситуацию, когда доля теневых процессов в экономике составляет ровно половину ($\gamma = 0.5$). Тогда решение (3) исследуемой системы (2) при значениях $a = 1, b = 0.68, \alpha = 0.001, \beta = 0.1, \tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0.2, p = 5, L = 900, \varepsilon = 0, \Delta K = 1, C_0 = 0, C_1 = 0$ будет иметь вид, изображенный на рис. 5.

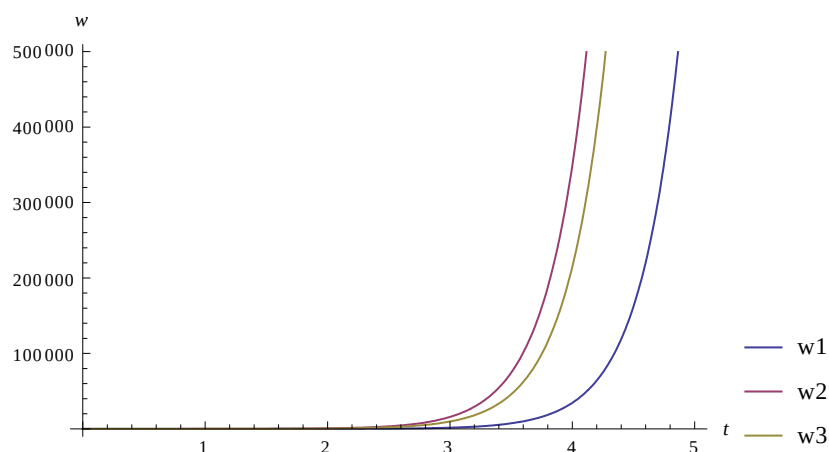


Рис. 5. График зависимости изменения доходов при низких налоговых ставках и равной доле официальных и теневых процессов.

Из решения получим, что в отличие от аналогичной ситуации, но при высоких налоговых ставках, кривая доходов Производственного сектора покажет менее значительный рост, в размере 500 000 к середине 5 года, что обуславливается снижением размеров дохода Домохозяйств вследствие снижения размера поступлений со стороны Государства.

Вывод. В результате проведенных исследований выявлена следующая зависимость. Наиболее значительный рост кривой доходов Производственного сектора наблюдался при высоких налоговых ставках $\tau_1 = 0.8, \tau_2 = 0.9$, и при равной доле официальных и теневых процессов в замкнутой экономической системе. Полученная математическая модель может выступать как основа для дальнейшего изучения взаимосвязи теневых экономических процессов и налоговой политики, их влияния на развитие экономической сферы Государства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: учеб. / под общ. ред. А.В. Сидоровича; МГУ им. М.В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. – М.: Дело и Сервис, 2001. – 365 с.
2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория; пер. с англ. – М.: Прогресс, 1975. – 606 с.
3. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Десяев Е. В. Об управлении портфелем ценных бумаг // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сборник статей X Международной научно-технической конференции / под ред. И. В. Бойкова. – Пенза, 2015. – С. 87–90.

4. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Десяев Е. В. Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 30–36.
5. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 48–57.
6. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К. Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 55–58.

НАЗАРОВ В. И., ПЕСКОВА Е. Е., ЯЗОВЦЕВА О. С.
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ (4,2)-МЕТОДА

Аннотация. Описано применение (4,2)-метода к численному решению задачи Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей математической модели брутто-реакции пиролиза этана. Проведен сравнительный анализ (4,2)-метода и явного метода Эйлера, показана эффективность (4,2)-метода.

Ключевые слова: химическая кинетика, жесткие системы дифференциальных уравнений, явный метод Эйлера, пиролиз этана.

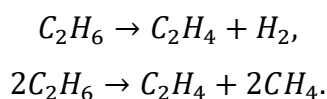
NAZAROV V. I., PESKOVA E. E., YAZOVTSEVA O. S.
NUMERICAL MODELING OF HARD SYSTEMS BY (4,2)-METHOD

Abstract. The article deals with the use of the (4,2)-method for a numerical solution of the Cauchy problem for the nonlinear system of ordinary differential equations, which corresponds to the mathematical model of the ethane pyrolysis brutto-reaction. A comparative analysis of the (4,2)-method and the explicit Euler method is carried out. The efficiency of the (4,2)-method is shown.

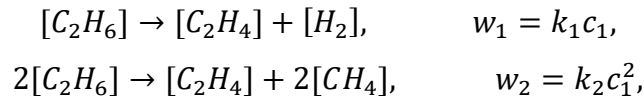
Keyword: chemical kinetics, hard systems of differential equations, explicit Euler method, ethane pyrolysis.

Моделирование процесса термического пиролиза этана для получения этилена является актуальной задачей. При решении таких задач требуется найти решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, составленных на основе схемы реакций. Большая часть этих систем является жесткой по части фазовых переменных. Выполнение свойств жесткой системы влечет за собой большое различие в величине коэффициентов, что, в свою очередь, не позволяет применить к решению задачи Коши стандартные явные методы. В работах [1; 2] подробно описано построение (m, k) -методов для решения жестких систем дифференциальных уравнений, основанных на методах типа Розенброка. В данной работе описан (4,2)-метод, примененный к решению задачи Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей математической модели брутто-реакции пиролиза этана.

Рассмотрим брутто-реакцию пиролиза этана [3; 4]:



Соответствующие кинетические уравнения имеют вид



где c_i — концентрация i -того вещества, k_j — константа скорости j -той прямой стадии, которые вычисляются согласно выражениям Аррениуса при температуре 800 К, таким образом $k_1 = 0.051, k_2 = 0.7$.

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой фазовые переменные соответствуют концентрациям веществ, участвующих в реакции:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -k_1 c_1 - 2k_2 c_1^2 \\ \dot{c}_2 = k_1 c_1 + k_2 c_1^2 \\ \dot{c}_3 = k_1 c_1 \\ \dot{c}_4 = 2k_2 c_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку начальный момент реакции присутствует только этан, то начальные условия будут иметь вид:

$$c_1(0) = 1, c_2(0) = 0, c_3(0) = 0, c_4(0) = 0. \quad (2)$$

Для нахождения изменений количественных характеристик реакции численно решим задачу Коши (1)-(2) (m, k) -методом и проведем сравнительную характеристику со способом решения методом Эйлера.

Используя (4,2)-метод четвертого порядка точности, разностную схему для каждого компонента вектора решения построенной модели можно представить в виде [1; 2]:

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + \sum_{i=1}^4 p_i q_i, D_n = E - \alpha \tau f'_n, \\ D_n q_1 &= \tau f(y_n), \\ D_n q_2 &= q_1, \\ D_n q_3 &= \tau f(y_n + \beta_{31} q_1 + \beta_{32} q_2) + \alpha_{32} q_2, \\ D_n q_4 &= q_3 + \alpha_{42} q_2, \end{aligned}$$

где τ — шаг интегрирования решаемой задачи, E — единичная матрица размерности (4×4) , $y \in R^4, q_i \in R^4, y_0 = (1, 0, 0, 0)$.

Вещественные коэффициенты, при которых схема обладает устойчивостью и 4-м порядком точности, $a, p_i, \alpha_{j2}, \beta_{3k}, 1 \leq i \leq 4, 3 \leq j \leq 4, 1 \leq k \leq 2$, имеют следующие значения [1; 2]:

$$\begin{aligned} a &= 0.57281606248213, p_i = 1.27836939012447, \\ p_2 &= -1.00738680980438, p_3 = 0.9265539109350, \\ p_4 &= -0.33396131834691, \beta_{31} = 1.00900469029922, \\ \beta_{32} &= -0.25900469029921, \alpha_{32} = -0.49552206416578, \\ \alpha_{42} &= -1.28777648233922. \end{aligned}$$

Для системы (1) $f(y)$ и f'_n имеют вид

$$f(y) = \begin{pmatrix} -k_1 y_1 - 2k_2 y_1^2 \\ k_1 y_1 + k_2 y_1^2 \\ k_1 y_1 \\ 2k_2 y_1^2 \end{pmatrix},$$

$$f'_n = \frac{\partial f(y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} -k_1 - 4k_2 y_1 & k_1 + 2k_2 y_1 & k_1 y_1 & 4k_2 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основе построенной схемы был разработан программный комплекс для решения системы уравнений (1) с начальными данными (2). На рисунке представлены изменения концентраций веществ во времени при температуре 800 К. Для оценки эффективности (4,2)-метода эта же система была решена явным методом Эйлера, разностная схема для которого имеет вид [5]:

$$y^{n+1} = y^n + \tau f(y^n).$$

Сравнительные результаты испытаний представлены в таблице 1, за опорное было принято решение, полученное с помощью системы Wolfram Mathematica с шагом $\tau = 0.1$.

Таблица 1

Результаты работы методов

Число итераций	Время выполнения		Точность, ε	
	Явный метод Эйлера	(4,2) – метод	Явный метод Эйлера	(4,2) – метод
10	6 мс	7 мс	0.034	0.001
50	59 мс	49 мс	0.00762	0.00055
93	105 мс	98 мс	0.0043	0.0001

Из таблицы 1 видно, что многостадийный метод имеет преимущество по времени выполнения, точности и корректности по отношению к явному методу.

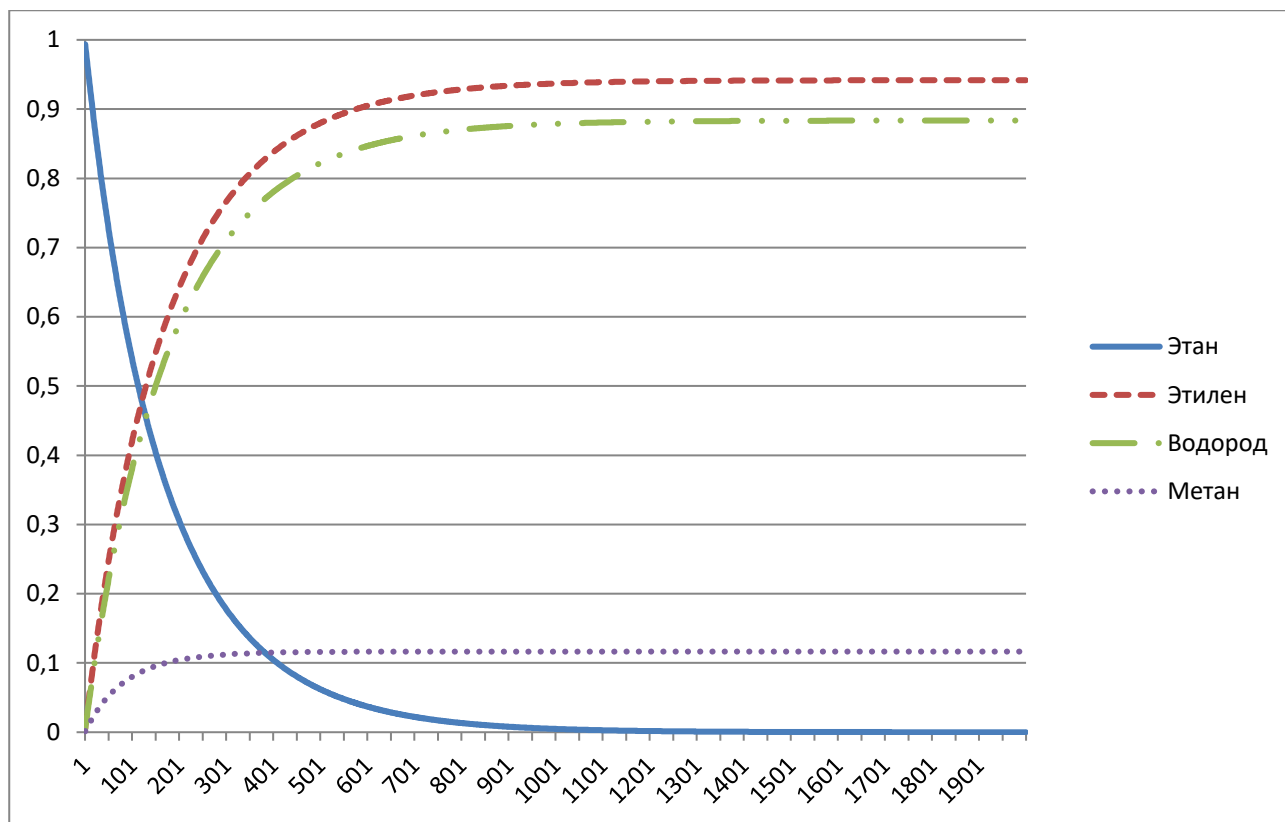


Рис. 1. Изменение концентраций веществ при 800 К.

Таким образом, сравнительный анализ показал эффективность (m, k) -метода для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей математической модели брутто-реакции пиролиза этана, поскольку заданная точность достигается за меньшее количество итераций по сравнению с методом Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Е. А. Исследование $(m, 2)$ -методов решения жестких систем // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12. – № 5. – С. 103–115.
2. Галанин М. П., Ходжаева С. Р. Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2013. – № 98. – 29 с.
3. Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С. Математическая модель динамики многокомпонентного газа на примере брутто-реакции пиролиза этана [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2016. – №20. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/matematiceskaya-model-dinamiki-mnogokomponentnogo-gaza-na-primere-brutto-reakcii-piroliza-etana>.

4. Мухина Т. Н., Барабанов Н. Л., Бабаш С. Е., Меньщиков В. А., Аврех Г. Л. Пиролиз углеводородного сырья. – М.: Химия, 1987. – 240 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

ЯЗОВЦЕВА О. С.

**ЛОКАЛЬНАЯ ПОКОМПОНЕНТНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ
УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ**

Аннотация. В статье вводится понятие локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно некоторых функций. Приведены достаточные условия, при выполнении которых у эквивалентных систем сохраняются свойства устойчивости, асимптотической устойчивости и асимптотического равновесия покомпонентно. В качестве примера рассмотрена математическая модель брутто-реакции пиролиза этана. Для нее построены взаимно-однозначные отображения, устанавливающие локальную покомпонентную асимптотическую эквивалентность решений исследуемой системы и ее линейного приближения. На основании построенных взаимно-однозначных отображений ненулевое положение равновесия системы исследовано на устойчивость по части переменных, а также найдены асимптотики решений.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауеру и Левинсону, устойчивость по части переменных, пиролиз этана, химическая кинетика.

YAZOVTSEVA O. S.

**LOCAL COMPONENT-WISE ASYMPTOTIC EQUIVALENCE
AND ITS APPLICATION TO INVESTIGATE STABILITY
WITH RESPECT TO A PART OF VARIABLES**

Abstract. The article introduces the notion of local component-wise asymptotic equivalence of systems of ordinary differential equations in relation to some functions. The sufficient conditions of component-wise stability, asymptotic stability and asymptotic equilibrium are received. The mathematical model of the ethane pyrolysis brutto-reaction is considered. The one-to-one mapping of the model established the local component-wise asymptotic equivalence of solutions of the researched system and its linear approximation. A nontrivial equilibrium of the system was investigated for stability with respect to a part of variables based on the constructed one-to-one mapping. The asymptotics of the solutions were found.

Keywords: nonlinear ordinary differential equations, local component-wise Brauer and Levinson asymptotic equivalence, stability with respect to a part of variables, ethane pyrolysis, chemical kinetics.

Введение. Классификация множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее применение к исследованию устойчивости решений восходит к А. М. Ляпунову [1]. В случае, когда исследуется асимптотическое поведение решений при $t \rightarrow +\infty$, классификация носит название асимптотической эквивалентности [2–4]. Основные результаты исследования подобных отношений отражены в работах [2–18]. В работах [11–13] для классификации нелинейных систем введены понятия покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых функций.

В настоящей работе продолжается развитие идей Е. В. Воскресенского [13] о покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых функций нелинейных систем в некоторой области фазового пространства. Показано, что введенные определения позволяют исследовать устойчивость по части переменных и асимптотику решений более широкого класса нелинейных систем, чем в работах [11–13].

В качестве приложения рассмотрена математическая модель брутто-реакции пиролиза этана. Положение равновесия исследуемой системы исследовано на устойчивость по части переменных, а также найдена асимптотика решений в окрестности положения равновесия.

Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауэру и Левинсону. Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $T \geq 0$, $f(t, 0) \equiv 0$.

Будем считать, что у системы вида (1) существует совокупность решений $x(t; t_0, x^{(0)})$, определенных при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$, где D – некоторая область пространства R^n , содержащая окрестность нуля.

Обозначим через $x(t; t_0, x^{(0)})$ и $y(t; t_0, y^{(0)})$ решения с начальными данными $(t_0, x^{(0)})$ и $(t_0, y^{(0)})$ соответственно системы дифференциальных уравнений (1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad (2)$$

принадлежащей множеству Ξ .

Следующие определения развивают идеи Е. В. Воскресенского о покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру относительно функций $\mu_i(t)$ из работ [11–13].

Определение 1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и (2) назовем локально асимптотически эквивалентными по Брауэру относительно функции $\mu_i(t)$, если при фиксированном $t_0 \geq T$ существуют два отображения $P^{(1)} : V \rightarrow U$ и $P^{(2)} : U \rightarrow V$ такие, что

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)} x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \quad (3)$$

$$y_i(t : t_0, y^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)} y^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \quad (4)$$

при $t \rightarrow \infty$ для всех $i \in M_0 \subseteq \{1, \dots, n\}$. Здесь $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ – i -ые компоненты решений, для которых $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, $U, V \subseteq D$ – некоторые области, содержащие окрестность нуля, $\mu_i : [T, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

Определение 2. Если в определении 1 положить $M_0 = \{1, \dots, n\}$, то системы (1) и (2) будем называть локально асимптотически эквивалентными по Брауэру относительно функций $\mu_i(t)$.

Замечание 1. Определение 2 обобщает определение локально асимптотически эквивалентных систем по Брауэру относительно функции $\mu(t)$ из работы [13]. Для этого достаточно в определении 2 положить $\mu_i(t) \equiv \mu(t), i = \overline{1, n}$.

Определение 3. Если в определении 1 положить $P^{(2)} = P^{(1)^{-1}}$, то системы (1) и (2) назовем локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функций $\mu_i(t)$. Если же кроме этого $M_0 = \{1, \dots, n\}$, то системы (1) и (2) назовем локально асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функций $\mu_i(t)$.

Определение 4. Будем говорить, что система (1) имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0 \subseteq \{1, \dots, n\}$, если каждое ее решение $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U \subseteq R^n$, обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i < \infty, i \in M_0, \quad (5)$$

и, наоборот, для любых чисел $b_i, i \in M_0$, таких, что $b = colon(b_1, \dots, b_n) \in V \subseteq D$, существует решение $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U \subseteq D$, системы (1) такое, что справедливо равенство (5).

Определение 5. Если в определении 4 положить $M_0 = \{1, \dots, n\}$, то будем говорить, что система (1) имеет локальное асимптотическое равновесие.

Сформулируем достаточные условия, когда локальные покомпонентные асимптотически эквивалентные по Брауэру системы сохраняют свойства устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных.

Теорема 1. Пусть системы (1) и (2) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауэру относительно функций $\mu_i(t)$, причем отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ являются непрерывными в нуле и справедливы равенства

$$x_i(t:t_0, x^{(0)}) = y_i(t:t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t:t_0, x^{(0)}), \quad (6)$$

$$y_i(t:t_0, y^{(0)}) = x_i(t:t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t:t_0, y^{(0)}), \quad (7)$$

где $\delta_i(t:t_0, x^{(0)})$ и $\gamma_i(t:t_0, y^{(0)})$ стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, соответственно. Тогда, если у одной системы существует устойчивое (асимптотически устойчивое) тривиальное решение по компонентам $i \in M_0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_i = d_i, d_i \in R^1$ ($\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_i = 0$), то вторая система имеет также устойчивое (асимптотически устойчивое) тривиальное решение по компонентам $i \in M_0$; кроме того, если одна система имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_i = d_i, d_i \in R^1$ то этим же свойством будут обладать и решения другой системы.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству 1.6.6 из работы [13, с. 50].

Пусть система (2) обладает устойчивым (асимптотически устойчивым) тривиальным решением по компонентам $i \in M_0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_i = d_i, d_i \in R^1$ ($\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_i = 0$). Сопоставим начальным значениям $\tilde{y} \in V$ решений системы (2) начальные значения $\tilde{x} = P^{(1)}\tilde{y}$ соответствующих решений системы (1).

Тогда, учитывая равенства (6), получим

$$\|x_i(t:t_0, \tilde{x})\| \leq \|y_i(t:t_0, \tilde{y})\| + \mu_i(t)\delta_i(t:t_0, \tilde{x}), \quad (8)$$

где $\tilde{y} = P^{(2)}\tilde{x}$.

Пусть $\|\tilde{y}\| < \delta_1$. Тогда из непрерывности отображения $P^{(1)}$ в нуле следует

$$\|\tilde{x}\| = \|P^{(1)}\tilde{y}\| < \delta.$$

С учетом оценки (8) из устойчивости тривиального решения системы (2) по компонентам $i \in M_0$ и того, что $\delta_i(t:t_0, \tilde{x}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $\tilde{x}$ следует устойчивость тривиального решения системы (1) по компонентам $i \in M_0$, а из

асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2) по компонентам $i \in M_0$ следует асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (1) по компонентам $i \in M_0$.

Пусть решения системы (2) при $y^{(0)} \in V$ имеют асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0$. Это означает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_i(t; t_0, y^{(0)}) \equiv b_i, \quad b_i \in R^1. \quad (9)$$

Из оценки (8) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_i(t; t_0, x^{(0)}) - y_i(t; t_0, P^{(2)} x^{(0)})}{\mu_i(t)} = 0, \quad i \in M_0, \quad (10)$$

и, следовательно, справедливы равенства (5).

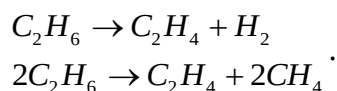
Покажем теперь, для любых чисел $b_i, i \in M_0$, таких, что $b = colon(b_1, \dots, b_n) \in V \subseteq D$, существует решение $x_i(t; t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U \subseteq D$, системы (1) такое, что справедливо равенство (5). Для фиксированных чисел $b_i, i \in M_0$, $b = colon(b_1, \dots, b_n) \in V \subseteq D$, найдем компоненты $y_i(t; t_0, y^{(0)})$ решения системы (2) такие, что справедливы пределы (9). Учитывая (10), получаем справедливость равенств (5), и, следовательно, система (1) имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам $i \in M_0$.

Доказательство устойчивости (асимптотической устойчивости) тривиального решения системы (2), когда известно, что тривиальное решение системы (1) – устойчиво (асимптотически устойчиво), проводится аналогично на основании равенства (7).

Доказательство завершено.

Исследование асимптотики поведения решений системы дифференциальных уравнений математической модели брутто-реакции пиролиза этана.

Рассмотрим брутто-реакцию пиролиза этана [19–21]:



Математическая модель реакции имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -k_1 c_1 - 2k_2 c_1^2 \\ \dot{c}_2 = k_1 c_1 + k_2 c_1^2 \\ \dot{c}_3 = k_1 c_1 \\ \dot{c}_4 = 2k_2 c_1^2 \end{cases}, \quad (11)$$

здесь $t \geq 0$, $c_i (i = 1, \dots, 4)$, – концентрации веществ $C_2H_6, C_2H_4, H_2, CH_4$ соответственно, $k_1 > 0, k_2 > 0$ – константы скоростей химических реакций. Так как концентрации c_i

представляют собой неотрицательные величины, то поведение решений системы достаточно рассматривать при $c_i \geq 0$. Для системы (11) ставится задача определения положения равновесия по заданным начальным концентрациям

$$c_1(0) = c_1^{(0)}, c_2(0) = c_2^{(0)}, c_3(0) = c_3^{(0)}, c_4(0) = c_4^{(0)}.$$

Приравнивая правую часть системы (8) к нулю, находим, что положения равновесия образуют множество векторов вида

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \text{ где } c_i \in R_+^1, i = 2, 3, 4. \quad (12)$$

Фиксируя некоторые $c_i \neq 0, (i = 2, 3, 4)$ и используя определения локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности, исследуем на устойчивость по части переменных ненулевое положение равновесия $c^* = \text{colon}(0, c_2^*, c_3^*, c_4^*)$, а также асимптотику решений системы (11) в окрестности этого положения равновесия.

Для этого в системе (11) сделаем замену переменных

$$c = x + c^*. \quad (13)$$

Тогда система (11) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 - 2k_2 x_1^2 \\ \dot{x}_2 = k_1 x_1 + k_2 x_1^2 \\ \dot{x}_3 = k_1 x_1 \\ \dot{x}_4 = 2k_2 x_1^2 \end{cases}. \quad (14)$$

Заметим, что вид систем (11) и (14) совпадает. Таким образом, задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального решения $x \equiv 0$ системы (14).

Так как матрица линейного приближения

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -k_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = k_1 y_1 \\ \dot{y}_3 = k_1 y_1 \\ \dot{y}_4 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

системы (14) имеет одно отрицательное и три нулевых собственных значений кратности 1, то нулевое решение системы (15) является устойчивым. Вместе с тем согласно [22] имеет место критический случай, и, следовательно, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [1] неприменима.

Исследуем устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия системы (14) на основании локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру.

Используя определение 3, установим соответствие между начальными значениями $x_1(0) = x_1^{(0)}$, $x_2(0) = x_2^{(0)}$, $x_3(0) = x_3^{(0)}$, $x_4(0) = x_4^{(0)}$ решений

$$\begin{aligned} x_1(t:0, x^{(0)}) &= \frac{k_1 x_1^{(0)} e^{-k_1 t}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})}, \\ x_2(t:0, x^{(0)}) &= x_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln \left(1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}) \right) + \frac{x_1^{(0)}}{2} \left(\frac{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})} \right), \\ x_3(t:0, x^{(0)}) &= x_3^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln \left(1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}) \right), \\ x_4(t:0, x^{(0)}) &= x_4^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln \left(1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}) \right) + x_1^{(0)} \left(\frac{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

нелинейной системы (14) и начальными значениями $y_1(0) = y_1^{(0)}$, $y_2(0) = y_2^{(0)}$, $y_3(0) = y_3^{(0)}$, $y_4(0) = y_4^{(0)}$ решений

$$\begin{aligned} y_1(t:0, y^{(0)}) &= y_1^{(0)} e^{-k_1 t} \\ y_2(t:0, y^{(0)}) &= y_2^{(0)} + y_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}) \\ y_3(t:0, y^{(0)}) &= y_3^{(0)} + y_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}) \\ y_4(t:0, y^{(0)}) &= y_4^{(0)} \end{aligned} \quad (17)$$

линейной системы (15).

Для этого определим отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ из условий

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_i(t) - y_i(t)}{\mu_i(t)} = 0, \quad i = \overline{1, 4},$$

где в качестве функций $\mu_i(t)$ выбраны следующие:

$$\mu_1(t) = e^{-k_1 t}, \quad \mu_2(t) = \mu_3(t) = \mu_4(t) = 1 - e^{-k_1 t}. \quad (18)$$

Имеем

$$y_1^{(0)} = P_1^{(2)} x_1^{(0)} \equiv \frac{k_1 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}},$$

$$y_2^{(0)} = P_2^{(2)} x_1^{(0)} \equiv x_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln \left(1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} \right) - \frac{x_1^{(0)}}{2} \left(\frac{k_1 - 2k_2 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}} \right), \quad (19)$$

$$y_3^{(0)} = P_3^{(2)} x_1^{(0)} \equiv x_3^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln \left(1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} \right) - \left(\frac{k_1 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}} \right),$$

$$y_4^{(0)} = P_4^{(2)} x_1^{(0)} \equiv x_4^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln \left(1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} \right) + x_1^{(0)},$$

$$P^{(2)} = colon(P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, P_4^{(2)}) .$$

Обратное отображение $P^{(1)^{-1}}$ имеет вид

$$x_1^{(0)} = P_1^{(1)} y_1^{(0)} \equiv \frac{k_1 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}},$$

$$x_2^{(0)} = P_2^{(1)} y_2^{(0)} \equiv y_2^{(0)} + \frac{k_1}{4k_2} \ln \left(1 - 2 \frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)} \right) + y_1^{(0)} \left(\frac{k_2 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}} \right), \quad (20)$$

$$x_3^{(0)} = P_3^{(1)} y_3^{(0)} \equiv y_3^{(0)} + y_1^{(0)} + \frac{k_1}{2k_2} \ln \left(1 - 2 \frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)} \right),$$

$$x_4^{(0)} = P_4^{(1)} y_4^{(0)} \equiv y_4^{(0)} + 2y_1^{(0)} - \frac{k_1}{2k_2} \ln \left(1 - 2 \frac{k_2}{k_1} y_1^{(0)} \right) - \frac{k_1 y_1^{(0)}}{k_1 - 2k_2 y_1^{(0)}},$$

$$P^{(1)} = colon(P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, P_4^{(1)}).$$

Тогда, области V и U могут быть построены следующим образом:

$$V = V_1 \times V_3 \times V_3 \times V_4, \quad V_1 = \left(-\infty, \frac{k_1}{2k_2} \right), \quad V_i = (0, +\infty), \quad i = \overline{2, 4},$$

$$U = U_1 \times U_3 \times U_3 \times U_4, \quad U_1 = \left(-\frac{k_1}{2k_2}, +\infty \right), \quad U_i = \left(-\frac{k_1}{2k_2}, +\infty \right), \quad i = \overline{2, 4}.$$

Величины $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$, $i = \overline{1, 4}$, имеют вид

$$\delta_1(t : t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1 x_1^{(0)} e^{-k_1 t}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})};$$

$$\delta_2(t : t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1}{4k_2 (1 - e^{-k_1 t})} \ln \left[\frac{1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})}{1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}} \right] +$$

$$+ \frac{x_1^{(0)}}{2} \left(\frac{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})^2 + (k_1 - 2k_2 x_1^{(0)})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}))}{(1 - e^{-k_1 t})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t}))} \right);$$

$$\delta_3(t : t_0, x^{(0)}) = \frac{k_1}{2k_2(1 - e^{-k_1 t})} \ln \left[\frac{1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})}{1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}} \right] + \frac{k_1 x_1^{(0)} e^{-k_1 t}}{(k_1 + 2k_2 x_1^{(0)})(1 - e^{-k_1 t})};$$

$$\delta_4(t : t_0, x^{(0)}) = -\frac{k_1}{2k_2(1 - e^{-k_1 t})} \ln \left[\frac{1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)} (1 - e^{-k_1 t})}{1 + 2 \frac{k_2}{k_1} x_1^{(0)}} \right] + x_1^{(0)} \left(\frac{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}}{k_1 + 2k_2 x_1^{(0)}(1 - e^{-k_1 t})} - \frac{1}{1 - e^{-k_1 t}} \right),$$

и удовлетворяют условиям (6) теоремы (1).

Заметим, что системы (14) и (15) не удовлетворяют определению асимптотической эквивалентности в смысле работ [11–13], так как области определения отображений $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ не совпадают со всем пространством R^n , и, следовательно, во всем пространстве R^n не существует отображений, переводящих начальные данные одной системы в начальные данные другой, так чтобы норма разности соответствующих решений стремилась к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Так как $P^{(1)} = P^{(2)^{-1}}$, то системы (14) и (15) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Левинсону в смысле определения 3.

Учитывая, что отображения $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ непрерывны в нуле, получаем, что все условия теоремы 1 выполнены.

Так как нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво по первой компоненте, а ненулевые решения имеют асимптотическое равновесие по остальным компонентам, то на основании теоремы 1 можно сделать вывод, что этими же свойствами обладают решения системы (14) в окрестности нулевого положения равновесия.

Учитывая замену переменных (13), можно сделать следующие выводы об асимптотическом поведении решений системы (11) в окрестности положения равновесия c^* :

- 1) каждое положение равновесия c^* системы (11) является асимптотически устойчивым по компоненте c_1 ;
- 2) решения системы (8), начинающиеся в окрестности положения равновесия c^* , имеют асимптотическое равновесие по компонентам c_2, c_3, c_4 , причем при $t \rightarrow +\infty$ эти решения стремятся к нему.

Поведение решений асимптотически эквивалентных систем в окрестности положения равновесия. Так как правые части систем (11) и (14) совпадают, то из асимптотической эквивалентности систем (14) и (15) следует асимптотическая эквивалентность систем (11) и (15). Тогда формулы (19) и (20) остаются справедливыми, если $x_i^{(0)}$ заменить на $c_i^{(0)}$.

Построим графики решений для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных по Левинсону систем (11) и (15) относительно некоторых функций (18), с начальными данными, связанными отображениями $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ согласно формулам (16) и (17), где $x_i^{(0)}$ заменены на $c_i^{(0)}$. В качестве начальных значений решений выбраны $c_1^{(0)} = 1, c_2^{(0)} = c_3^{(0)} = c_4^{(0)} = 0$ и $y_1^{(0)} \approx 0.78, y_2^{(0)} \approx 0.16, y_3^{(0)} \approx 0.1, y_4^{(0)} \approx 0.12$. Графики построены для $k_1 = 0.51, k_2 = 0.07$, что соответствует протеканию брутто-реакции пиролиза этана при постоянной температуре 800K.

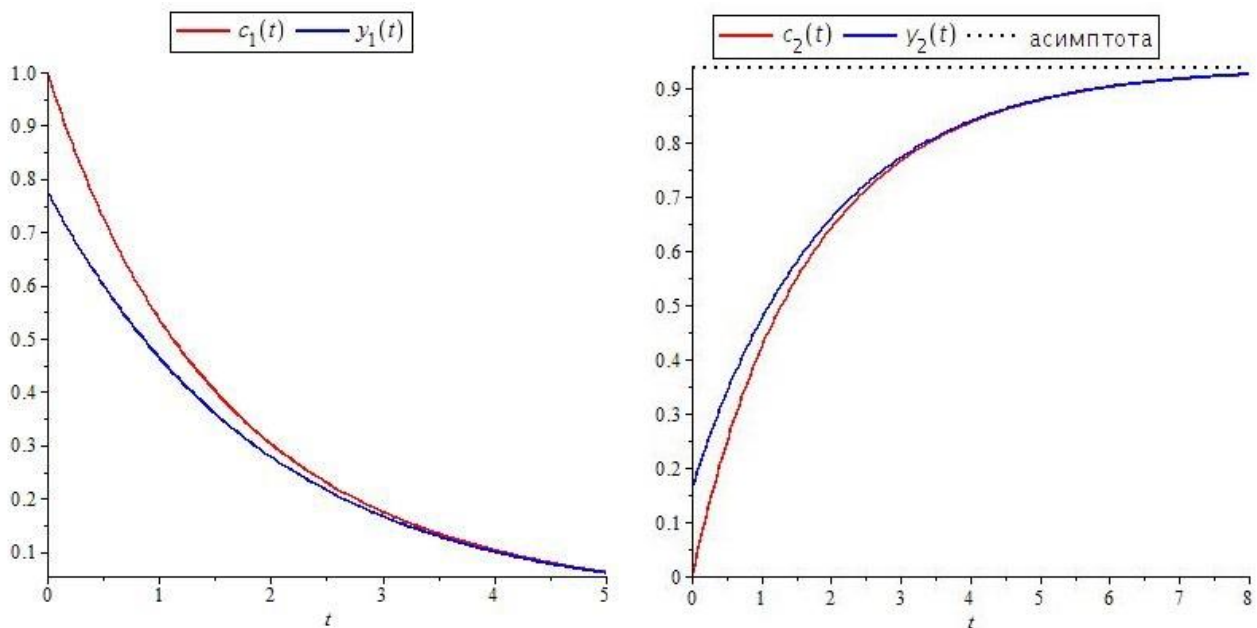


Рис. 1. Графики решений c_i и $x_i, i = \overline{1,2}$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

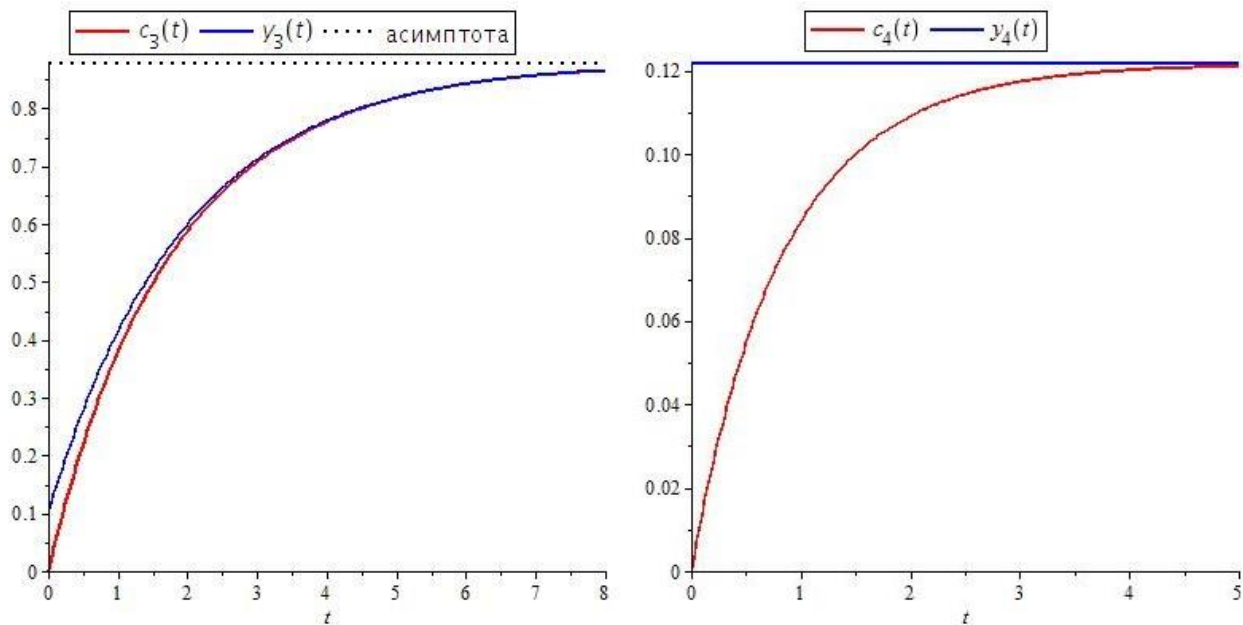


Рис. 2. Графики решений c_i и x_i , $i = \overline{3,4}$, между начальными значениями которых установлено взаимно-однозначное соответствие.

Положения равновесия для решений с вышеприведенными начальными значениями систем (11) и (15) совпадают и находятся по формулам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t; 0, x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t; 0, y^{(0)}) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t; 0, x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t; 0, y^{(0)}) \approx 0.94,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_3(t; 0, x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_3(t; 0, y^{(0)}) \approx 0.88,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_4(t; 0, x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_4(t; 0, y^{(0)}) \approx 0.12.$$

Заключение. Таким образом, на основании локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности для системы (11) определено положение асимптотического равновесия по заданным начальным концентрациям и исследована асимптотика поведения решений в его окрестности. Из проведенных исследований можно сделать вывод, что исследуемая система обладает свойством полиустойчивости по части переменных [23; 24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.

2. Brauer F. Asymptotic equivalence and asymptotic behavior of linear systems // Michigan Math. J. – 1962. – Vol. 9. – pp. 33-43.
3. Levinson N. The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations // Amer. J. Math. – 1946. – Vol. 63. – pp. 1–6.
4. Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. – 1948. – Vol. 15. – pp. 111–126.
5. Wintner A. Linear variation of constants // Am. J. Math. – 1946. – Vol. 68. – pp. 417–430.
6. Brauer F., Nohel J. A. The qualitative theory of ordinary differential equations. – New York: W. A. Benjamin, 1969. – 313 p.
7. Onuchic N. Relationship among the solutions of two systems of ordinary differential equations// Michigan Math. J. – 1963. – Vol. 10. – P. 129-139.
8. Onuchic N. Nonlinear perturbation of a linear system of ordinary differential equations // Michigan Math. J. – 1964. – Vol. 11. – pp. 237–242.
9. Onuchic N. Asymptotic relationship at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations // J. Differential Eqs. 3. – 1967. – pp. 47–58.
10. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
11. Качественные и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений / Воскресенский Е. В., Артемьева Е. Н., Белоглазов В. А., Мурюмин С. М.; под ред. Н.А. Лукашевича. – Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, Саран. фил., 1988. – 188 с.
12. Воскресенский Е. В. Методы сравнения в нелинейном анализе. – Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 224 с.
13. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: теория и приложения. – Саранск: СВМО, 2000. – 300 с.
14. Мамедова Т. Ф. Асимптотические методы для части компонент решений дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Н. Новгород, 1993. –14 с.
15. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Об исследовании динамических моделей социально-экономических систем на устойчивость по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 152–157.

16. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Десяев Е. В. Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 30–36.
17. Язовцева О. С., Мамедова Т. Ф., Губайдуллин И. М. Исследование устойчивости некоторого решения системы кинетических уравнений химической реакции // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 152–158.
18. Якубович В. А. Об асимптотическом поведении решений системы дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1951. – Т. 28(70), № 1. – С. 217–240.
19. Мухина Т. Н., Барабанов Н. Л., Бабаш С. Е. и др. Пиролиз углеводородного сырья. – М.: Химия, 1987. – 240 с.
20. Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С. Математическая модель динамики многокомпонентного газа на примере брутто-реакции пиролиза этана [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2016. – № 20. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/matematiceskaya-model-dinamiki-mnogokomponentnogo-gaza-na-primere-brutto-reakcii-piroliza-etana>.
21. Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф. Математическое моделирование динамики многокомпонентного газа с использованием WENO схем на примере пиролиза этана // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 98–106.
22. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 533 с.
23. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 253 с.
24. Воротников В. В. Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // Автомат. и телемех. – 1993. – № 3. – С. 3–62.

КАДРЯКОВА М. Р., ШАМАНАЕВ П. А., ЛОГИНОВ Б. В.

**О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ
НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ**

Аннотация. Методами теории ветвления найдены периодические решения одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае. Построены графики периодических траекторий возмущенной и невозмущенных систем при различных значениях резонансного параметра.

Ключевые слова: линейные неоднородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, малый параметр, методы теории ветвления, периодические решения, резонансный случай.

KADRYAKOVA M. R., SHAMANAEV P. A., LOGINOV B. V.

**ON PERIODIC SOLUTIONS FOR A CLASS OF LINEAR INHOMOGENEOUS
SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH SMALL PARAMETER IN RESONANCE CASE**

Abstract. By methods of branching theory, the authors find periodic solutions for a class of linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations with a small parameter in the resonance case. Graphs of periodic trajectories of perturbed and unperturbed systems for different values of the resonance parameter are constructed.

Keywords: linear inhomogeneous systems of ordinary differential equations, small parameter, methods of branching theory, periodic solutions, resonance case.

В работах [1–3] рассмотрена задача о ветвлении периодических решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого. В работе [4] приведен пример одной линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым линейным возмущением, для которой справедливы результаты работы [3]. Расширим класс линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых справедливы результаты работы [3].

Для этого рассмотрим класс возмущенных линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \sin(\omega t) \\ b \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $x_i \in R$, ε – малый вещественный параметр, $a, b, \alpha, \omega \in R$ – фиксированные параметры, для которого параметры α и ω связаны соотношениями $\alpha = k \omega, k = 2, 3, \dots$.

В обозначениях работы [3] найдем

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} a \sin(\omega t) \\ b \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

и, следовательно, $f(t)$ – периодическая вектор-функция с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Найдем собственные значения матрицы B_0 :

$$L_0(\lambda) \equiv B_0 - \lambda A = \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\alpha & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \det L_0(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\alpha.$$

Следовательно, имеется только одна пара чисто мнимых собственных значений матрицы B_0 и ей соответствует пара периодических решений с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$ линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = B_0 y, \quad (3)$$

где $y \in R^2$.

Так как собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы B_0 и период T функции $f(t)$ связаны соотношениями

$$\lambda_{1,2} = \pm i \frac{2\pi k}{T},$$

то для линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t), \quad (4)$$

где $z \in R^2$, согласно [5], имеет место резонансный случай.

Ставится задача [3; 6]: при достаточно малых вещественных ε найти все T -периодические решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1), удовлетворяющих условию $x(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ – T -периодические решения уравнения (4).

Для решения поставленной задачи применим методы теории ветвления, основанные на построении обобщенных жордановых наборов и исследовании разрешающих систем Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве [1–3; 6].

Найдем элементы B_1 -жордановой цепочки оператора B_0

$$B_0 \varphi_k^1 = 0, \quad B_0 \equiv \left[B_0 - A \frac{d}{dt} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right]. \quad (5)$$

Будем искать $\varphi_k^{(1)}$ в виде $\varphi_k^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{iat}$. Подставляя в уравнение (5) получим

$$\varphi_1^{(1)} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{iat}, \quad \text{где } a_1 \in C. \quad (6)$$

Найдем $\varphi_k^{(2)}$ как решение уравнения

$$\mathcal{B}_0 \varphi_1^2 = B_1 \varphi_1^{(1)},$$

где B_1 и $\mathcal{B}_0$ определяются по формуле (2) и (5) соответственно.

Имеем

$$\varphi_1^{(2)} = a_1 \left(\begin{array}{c} a_2 \\ ia_2 + \frac{2}{\alpha} \end{array} \right) e^{iat}, a_2 \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Так как уравнение $\mathcal{B}_0 \varphi_1^{(3)} = B_1 \varphi_1^{(2)}$ не имеет решений, то длина B_1 -жордановой цепочки оператора $\mathcal{B}_0$ равна $p_1 = 2$.

Аналогично, найдем B_1^* - жорданову цепочку оператора

$$\mathcal{B}_0^* \equiv \mathcal{B}_0^* + A^* \frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \quad (8)$$

$$\psi_1^{(1)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{iat}, \quad \psi_1^{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} c_2 \\ ic_2 - \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} e^{iat}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Найдем элементы $z_1^{(j)} \in E_{2,n}$ и $\gamma_1^{(l)} \in E_{1,n}$ согласно работы [1]

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} &\equiv B_1 \varphi_1^{(2)} = 2a_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ -ia_2 - \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} e^{iat}, & z_1^{(2)} &\equiv B_1 \varphi_1^{(1)} = 2a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{iat} \\ \gamma_1^{(1)} &\equiv B_1^* \psi_1^{(2)} = 2c_1 \begin{pmatrix} c_2 \\ -ic_2 - \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} e^{iat}, & \gamma_1^{(2)} &\equiv B_1^* \psi_1^{(1)} = 2c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{iat} \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты a_i, c_i ($i = \overline{1, r}$) подбираем из условий биортогональности [3].

Вычислим

$$\begin{aligned} \langle\langle \varphi_1^{(1)}, \gamma_1^{(1)} \rangle\rangle &= \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha}; & \langle\langle z_1^{(1)}, \psi_1^{(1)} \rangle\rangle &= \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha}; \\ \langle\langle \varphi_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)} \rangle\rangle &= 0; & \langle\langle z_1^{(1)}, \psi_1^{(2)} \rangle\rangle &= \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha} \left[a_2 + \bar{c}_2 - \frac{2i}{\alpha} \right]; \\ \langle\langle \varphi_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)} \rangle\rangle &= \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha} \left[a_2 + \bar{c}_2 - \frac{2i}{\alpha} \right]; & \langle\langle z_1^{(2)}, \psi_1^{(1)} \rangle\rangle &= 0; \\ \langle\langle \varphi_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)} \rangle\rangle &= \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha}; & \langle\langle z_1^{(2)}, \psi_1^{(2)} \rangle\rangle &= \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha}; \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle f, g \rangle dt$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha} = 1 \\ \frac{4a_1 \bar{c}_1 i}{\alpha} \left[a_2 + \bar{c}_2 - \frac{2i}{\alpha} \right] = 0. \end{cases}$$

Представим вектор функции $f(t)$ в экспоненциальной форме

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} \begin{pmatrix} -ai \\ b \end{pmatrix} + e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} ai \\ b \end{pmatrix} \right)$$

и вычислим

$$\begin{aligned} \ll f, \psi_1^{(1)} \gg &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle f, \psi_1^{(1)} \rangle dt = \\ &= \frac{\bar{c}_1(a+b)}{4\pi(k-1)} (e^{-i2\pi(k-1)} - 1) - \frac{\bar{c}_1(a-b)}{4\pi(k+1)} (e^{-i2\pi(k+1)} - 1) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично вычислим

$$\begin{aligned} \ll f, \psi_1^{(2)} \gg &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle f, \psi_1^{(2)} \rangle dt = \\ &= \frac{\bar{c}_1(\bar{c}_2 k \omega(a+b) - 2bi)}{4\pi k \omega(k-1)} (e^{-i2\pi(k-1)} - 1) - \frac{\bar{c}_1(\bar{c}_2 k \omega(a-b) + 2bi)}{4\pi k \omega(k+1)} (e^{-i2\pi(k+1)} - 1) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая (12) и (13), найдем

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{1}{1-\varepsilon^2} (\psi_1^{(1)} + \varepsilon \psi_1^{(2)}) \\ \xi_{11} &= -\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \ll f, h_{11} \gg = -\frac{1}{\varepsilon^2} [\ll f, \psi_1^{(1)} \gg + \varepsilon \ll f, \psi_1^{(2)} \gg] = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\bar{\xi}_{11} = 0$.

Тогда согласно работы [3] система (1) имеет аналитическое по ε единственное T -периодическое решение

$$x(t, \varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon} [\xi_{11} \varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{11} \bar{\varphi}_k^{(1)}] + \frac{1}{1-\varepsilon^2} [\xi_{11} \varphi_k^{(2)} + \bar{\xi}_{11} \bar{\varphi}_k^{(2)}] + y(t) = y(t), \quad (14)$$

где

$$y(t) = [I - \varepsilon \Gamma_0 B_1]^{-1} \Gamma_0 f(t). \quad (15)$$

Здесь $\Gamma_0^{-1} = \tilde{B}_0$, $\tilde{B}_0 \equiv B_0 + \ll \cdot, \gamma_1^{(1)} \gg z_1^{(1)} + \ll \cdot, \bar{\gamma}_1^{(1)} \gg \bar{z}_1^{(1)}$.

Преобразовывая уравнение (15), получим

$$\tilde{B}_0 y = \varepsilon B_1 y + f(t). \quad (16)$$

Решение уравнения (16) ищем в виде

$$y(t) = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix},$$

где $d_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$.

Подставив $y(t)$ в уравнение (16), получим

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} - i\omega - \varepsilon \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + \ll e^{i\omega t} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \gamma_k^{(1)} \gg z_k^{(1)} + \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& + \ll e^{i\omega t} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \bar{\gamma}_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)} + \left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} + i\omega - \varepsilon \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + \\
& + \ll e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}, \gamma_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)} + \ll e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}, \bar{\gamma}_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)} = \\
& = \frac{1}{2} \left[e^{i\omega t} \begin{pmatrix} -ai \\ b \end{pmatrix} + e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} ai \\ b \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$ в левой и правой частях уравнения (17), получим следующую систему уравнений:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} + i\omega - \varepsilon \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ai \\ b \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Выделяя вещественную и мнимую часть $d_j = d_j^{(1)} + id_j^{(2)}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} -2\varepsilon & \alpha & \omega & 0 \\ -\alpha & 2\varepsilon & 0 & \omega \\ -\omega & 0 & -2\varepsilon & \alpha \\ 0 & -\omega & -\alpha & 2\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \\ d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Так как при $\varepsilon < \frac{\omega^2}{2} \sqrt{(k^2 - 1)}$, то определитель матрицы системы (19)

$$\Delta = 16\varepsilon^4 - 8\varepsilon^2 k^2 \omega^2 + 8\varepsilon^2 \omega^2 - 2k^2 \omega^4 + k^4 \omega^8 \neq 0,$$

И, следовательно, система (19) имеет единственное решение. Решая ее при $\alpha = k\omega$ получим:

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\omega(\alpha + kb)}{2 \cdot 4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2 - 1)} \\ \frac{\varepsilon b}{4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2 - 1)} \\ \frac{\varepsilon a}{4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2 - 1)} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\omega(k\alpha + b)}{2 \cdot 4\varepsilon^2 - \omega^2(k^2 - 1)} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Следовательно, T -периодическое решение системы (1) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(t, \varepsilon) \\ x_2(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon b}{\omega^2(k^2 - 1) - 4\varepsilon^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega(\alpha + kb)}{\omega^2(k^2 - 1) - 4\varepsilon^2} \cos(\omega t) \\ \frac{\omega(k\alpha + b)}{\omega^2(k^2 - 1) - 4\varepsilon^2} \sin(\omega t) - \frac{\varepsilon a}{\omega^2(k^2 - 1) - 4\varepsilon^2} 2\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (1) и (4) совпадают, находим, что их однопараметрическое семейство вещественных T -периодических решений представимы в виде [3]

$$x(t, 0) \equiv z(t) = c \left[\varphi_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1^{(1)} \right] + \Gamma_0 f,$$

где $c \in R$.

Найдем $u = \Gamma_0 f(t)$. Представим это уравнение в виде

$$\tilde{B}_0 u = f(t),$$

или

$$B_0 u + \ll u, \gamma_1^{(1)} \gg z_1^{(1)} + \ll u, \bar{\gamma}_1^{(1)} \gg \bar{z}_1^{(1)} = f. \quad (21)$$

Представляя решение в виде

$$u = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix},$$

и подставляя в систему (21) получим

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2k\omega} \\ 1 \\ 1 \\ a \\ \frac{1}{2k\omega} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$z(t) = \begin{pmatrix} x_1(t, 0) \\ x_2(t, 0) \end{pmatrix} = c \left[\varphi_1^{(1)} + \bar{\varphi}_1^{(1)} \right] + \begin{pmatrix} -\frac{b}{2k\omega} \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) - \frac{a}{2k\omega} \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Параметр a_1 в формуле (6) подберем из условия, что $\|\varphi_1^{(1)}\| = 1$. Этому условию удовлетворяет $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно,

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{ik\omega}, \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) получим, что однопараметрическое семейство вещественных T -периодических решений системы (1) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$z(t) = c\sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(k\omega t) \\ \sin(k\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{b}{2k\omega} \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) - \frac{a}{2k\omega} \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Построим графики компонент решений систем (1) и (4).

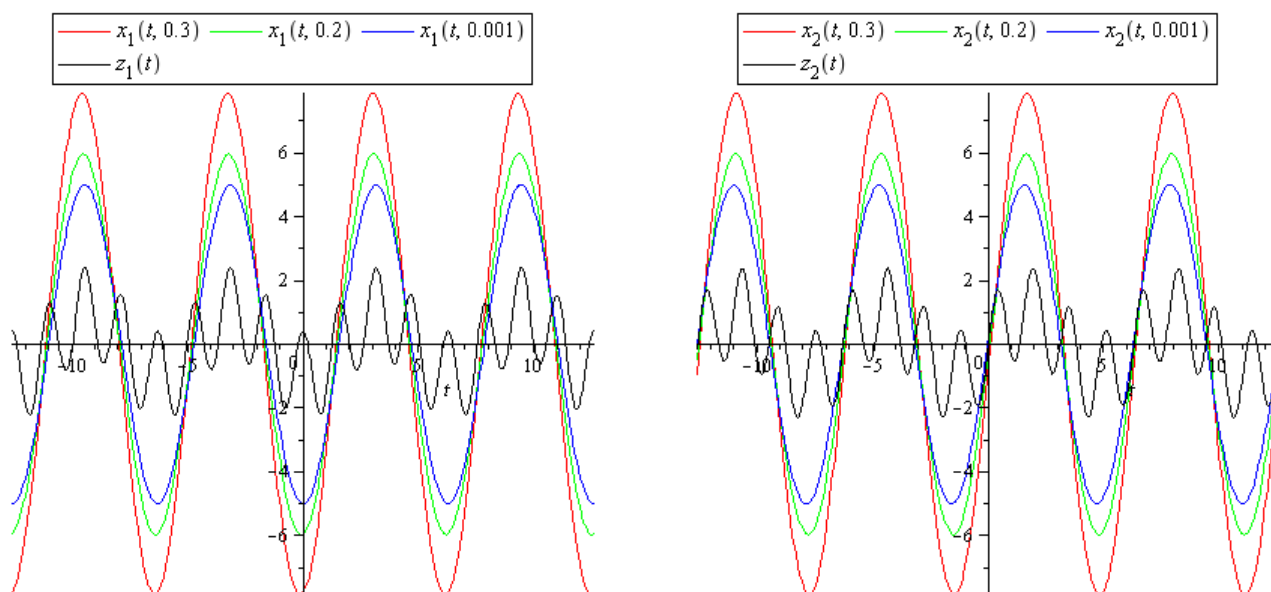


Рис. 1. Графики компонент $x_1(t, \varepsilon)$ и $x_2(t, \varepsilon)$ решения системы (1) при различных ε и компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ решения системы (4) при $c = 4$.

На рисунке 2 представлены графики $z(t)$ при разных значениях c .

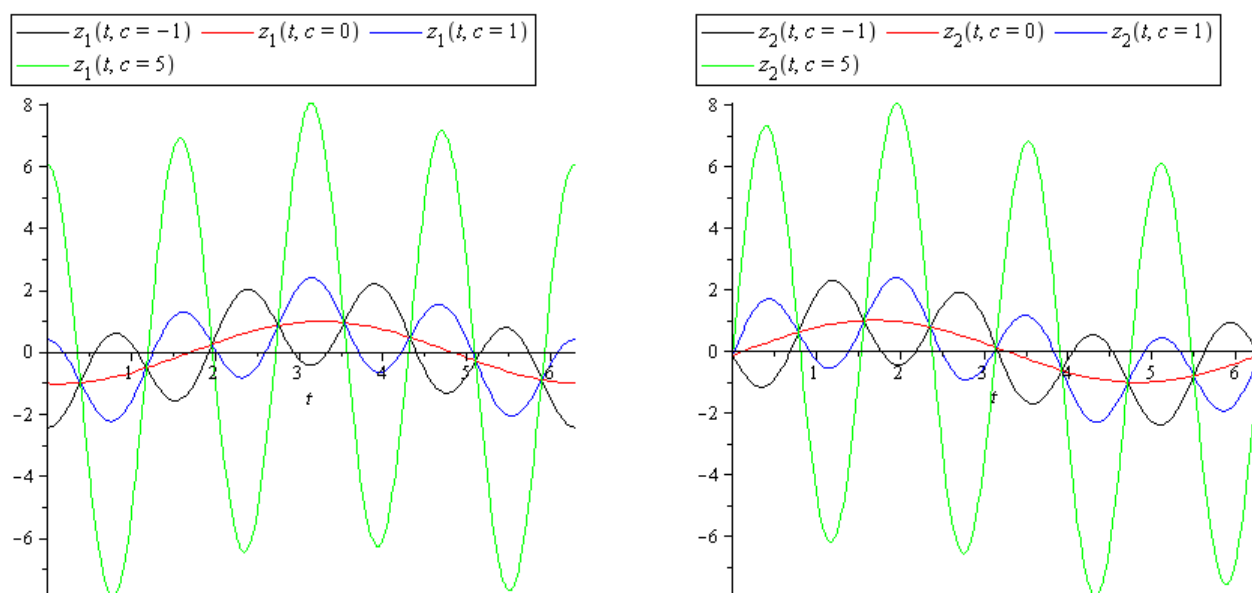


Рис. 2. Графики компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ решения системы (4) при различных c .

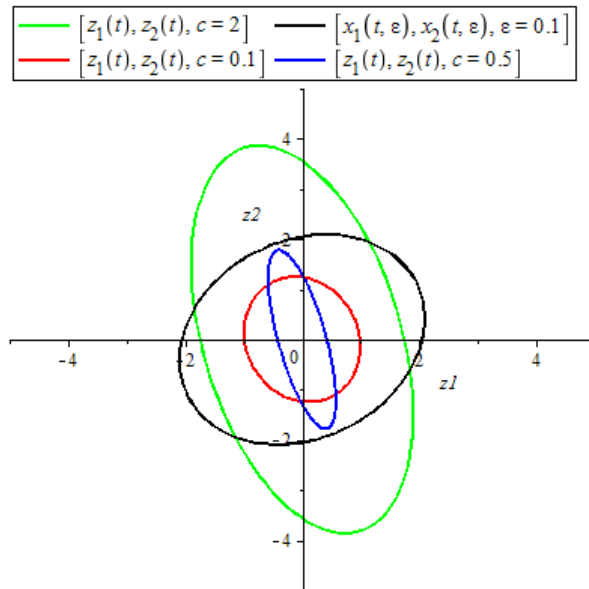


Рис. 3. $k = 1$: графики периодических траекторий системы (1) при $\varepsilon = 0,1$ и системы (4) при различных c .

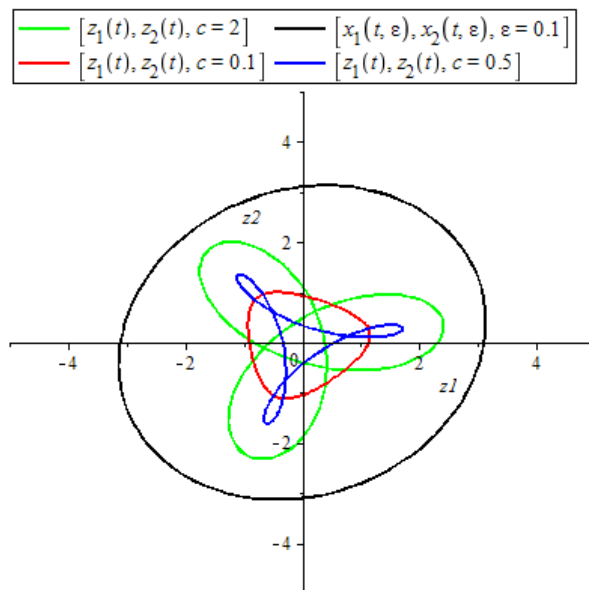


Рис. 4. $k = 2$: графики периодических траекторий системы (1) при $\varepsilon = 0,1$ и системы (4) при различных c .

Таким образом, для класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) с малым линейным возмущением построены периодические решения в резонансном случае. Показано, что в случае, когда малый параметр равен нулю, появляется однопараметрическое семейство периодических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 3. – С. 100–107.
2. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 33–40.
3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 45–53.
4. Шаманаев П. А., Логинов Б. В., Кадрякова М. Р. О периодическом решении одной линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости с малым параметром // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2016. – С. 3–7.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1996. – 532 с.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 524 с.

ЖАЛНИН Р. В., ЛЕЩАНКИНА Т. М.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA**

Аннотация. В статье описан численный алгоритм решения уравнений газовой динамики с использованием технологии CUDA. Для численного эксперимента были смоделированы условия развития неустойчивости при многократном прохождении ударной волны через контактный разрыв с начальными данными Погги. Результаты численного исследования демонстрируют возможности разработанной параллельной версии программы.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, параллельный алгоритм, технология CUDA.

ZHALNIN R. V., LESCHANKINA T. M.

MODELING OF GAS DYNAMIC FLOWS USING CUDA TECHNOLOGY

Abstract. This article describes a numerical algorithm for solving equations of gas dynamics using CUDA technology. The Poggie's conditions of instability by repeated passage of a shock wave through a contact discontinuity were simulated for the numerical experiment. The experiment results demonstrate the capabilities of the developed parallel version of the program.

Keywords: gas dynamics equations, parallel algorithm, CUDA technology.

Введение. В настоящее время большой практический интерес представляют решения задач газовой динамики. Данного вида задачи используются при проектировании самолетов и автомобилей, предсказании погоды, моделировании климата и т. п. Из-за нелинейности уравнений газовой динамики, для их решения необходимо использовать численные методы, которые на данный момент являются универсальными методами решения этих уравнений. В последние годы было проведено множество исследований в сфере разработки эффективных разностных схем высокого разрешения, которые позволяли бы осуществить математическое моделирование вышеуказанных процессов. Реализация данного рода задач на подобных сетках подразумевает использование больших вычислительных ресурсов. И появление новых технологий, ориентированных на использование в своей разработке графических ускорителей в дополнение к уже существующим позволяет использовать новые возможности для проведения интенсивных вычислений. Увеличение производительности видеокарт привело к тому, что количество вычислительных ядер в них достигло нескольких сотен. На сегодняшний день ведущей технологией разработки для работы на GPU (Graphical Processor Unit) является технология CUDA.

CUDA (Compute Unified Device Architecture) – это программная модель, включающая описание вычислительного параллелизма и иерархичной структуры памяти непосредственно в языке программирования [1]. Эта технология позволяет работать с языками программирования C и FORTRAN. С точки зрения программного обеспечения, реализация CUDA представляет собой кроссплатформенную систему компиляции и исполнения программ, части которых работают на CPU и GPU. CUDA предназначена для разработки GPGPU-приложений без привязки к графическим API и поддерживается всеми GPU NVIDIA.

1. Математическая модель и численная схема. Систему уравнений газовой динамики, записанную в переменных Эйлера, можно представить в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \frac{\partial((\rho e + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho e + p)v)}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (1)$$

За уравнение состояния принимается уравнение состояния идеального газа с показателем адиабаты γ : $p = (\gamma - 1)\varepsilon\rho$. В приведенной выше системе уравнений (1) $\rho = \rho(x, t)$ – плотность газа, $\vec{v} = (u, v)$ – вектор скорости частиц, $p = p(x, t)$ – давление, ε – удельная внутренняя энергия на единицу массы, $e = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}$ – полная энергия, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты, c_p, c_v – теплоёмкость при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

В векторной форме система уравнений, принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для аппроксимации системы уравнений газовой динамики (2) использовалась нелинейная консервативная квазимоноотонная дифференциально-разностная схема [3–5]:

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1/2j} - F_{i-1/2j}}{h_x} + \frac{G_{ij+1/2} - G_{ij-1/2}}{h_y} = 0, \quad (4)$$

где $F_{i+1/2j}, G_{ij+1/2}$ – дискретные потоки.

Дискретные потоки на гранях между ячейками вычислялись как функции двух переменных по интерполированным значениям газодинамических параметров на гранях между ячейками [4; 5]:

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}j} &= F\left(U_{i+\frac{1}{2}j}^l, U_{i+\frac{1}{2}j}^r\right), \\ G_{ij+\frac{1}{2}} &= Y\left(U_{ij+\frac{1}{2}}^l, U_{ij+\frac{1}{2}}^r\right), \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $U_{ij+1/2}^l, U_{ij+1/2}^r$ – "левые" и "правые" значения вектора U на грани между i и $i + 1$ ячейками, для которой вычисляется поток $F_{i+1/2j}$, $U_{ij+1/2}^a$, ($a = r, l$) "левые" и "правые" значения вектора U на грани между j и $j + 1$ ячейками соответственно. Для того чтобы вычислить значения вектора U , на указанных гранях между ячейками введем новый вектор переменных $Y = Y(U)$. Проведем его интерполяцию на грань между ячейками i , затем, пересчитаем искомое значение вектора $U = U(Y)$ на данной грани. В расчетах полагалось $Y = (\rho, p, u, v)$, потоки вычислялись по схеме Лакса-Фридрихса-Русанова:

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}j} &= \frac{1}{2} \left[\left(F\left(U_{i+\frac{1}{2}j}^r\right) + F\left(U_{i+\frac{1}{2}j}^l\right) \right) - \alpha_1 \left(U_{i+\frac{1}{2}j}^r - U_{i+\frac{1}{2}j}^l \right) \right], \\ G_{ij+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left[\left(G\left(U_{ij+\frac{1}{2}}^r\right) + G\left(U_{ij+\frac{1}{2}}^l\right) \right) - \alpha_2 \left(U_{ij+\frac{1}{2}}^r - U_{ij+\frac{1}{2}}^l \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max\{|u_{ij}| + c_{ij}, |u_{i+1j}| + c_{i+1j}\}, \\ \alpha_2 &= \max\{|v_{ij}| + c_{ij}, |v_{ij+1}| + c_{ij+1}\}, \end{aligned} \quad (7)$$

2. Реализация алгоритма на языке CUDA C. Графический ускоритель использовался для проведения расчетов численных потоков на границах ячеек и вычисления ограничителей.

Для проведения расчетов на GPU необходимо выполнить следующие действия:

1. Выделить память для данных и потоков на GPU. Пример: выделяется память под газодинамические параметры:

```
cudaMalloc((void**)&r_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&p_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&u_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&v_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float));
```

где первым параметром идет указатель, в который записывается адрес выделенной памяти, а вторым – размер выделяемой памяти в байтах.

2. Скопировать данные на GPU. Пример: газодинамические параметры (r,p,u,v) копируем на GPU по средствам использования функции:

```
cudaMemcpy(r_dev, r, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyHostToDevice);
cudaMemcpy(p_dev, p, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyHostToDevice);
cudaMemcpy(u_dev, u, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyHostToDevice);
cudaMemcpy(v_dev, v, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyHostToDevice);
```

где первым параметром идет указатель, содержащий адрес места-назначения копирования; вторым – указатель, содержащий адрес источника копирования; следом – размер копируемого ресурса в байтах; далее – параметр, указывающий направление копирования.

3. Распределить ядра для вычисления.

Расчет газодинамических параметров состоит из последовательности вызываемых процедур, запускаемых на GPU на каждом шаге по времени:

```
while (t <= tmax) {
    boundcond<<<blocks, threads>>> (r_dev, p_dev, u_dev, v_dev,
        d1_dev, d2_dev, d3_dev, d4_dev, d5_dev, d6_dev,
        otr_u_dev, otr_u1_dev, otr_v_dev, otr_v1_dev,
        alpha1_dev, alpha2_dev, sootv_dev, cm);
    calcU<<<blocks, threads>>>(r_dev, p_dev, u_dev, v_dev,
        ro_dev, ru_dev, rv_dev, en_dev, ntri_dev);
    ENO_mass<<<blocks, threads>>>(ux_m_dev, uy_m_dev, vx_m_dev, vy_m_dev,
        rx_m_dev, ry_m_dev, px_m_dev, py_m_dev,
        ntri_dev, tri_neigh1_dev, cm_dev,
        r_dev, u_dev, v_dev, p_dev, ntri_new_dev);
    calcFluxes<<<blocks, threads>>>(r_dev, p_dev, u_dev, v_dev,
        rtmp_dev, utmp_dev, vtmp_dev, etmp_dev,
        ux_m_dev, uy_m_dev, vx_m_dev, vy_m_dev,
        rx_m_dev, ry_m_dev, px_m_dev, py_m_dev,
        x1_dev, tri_neigh1_dev, tri_v1_dev,
        cm_dev, ntri_dev, ntri_new_dev, nx_new_dev);
    gasDinStep<<<blocks, threads>>>(rn_dev, pn_dev, un_dev, vn_dev,
        ro_dev, ru_dev, rv_dev, en_dev,
        rtmp_dev, utmp_dev,
        vtmp_dev, etmp_dev, s_dev, ntri_dev);
    t = t+tau;
    step++;
}
```

Процедура `boundcond<<<blocks, threads>>>()` определяет граничные условия.

Процедура $calcU<<<blocks, threads>>>()$ вычисляет консервативные переменные в соответствии с формулой (3).

В процедуре $ENO_mass<<<blocks, threads>>>()$ реализован алгоритм реконструкции газодинамических параметров на границе ячеек.

В процедуре $calcFluxes<<<blocks, threads>>>()$ рассчитываем дискретные потоки по схеме Лакса-Фридрихса в соответствии с формулой (8).

Процедура $gasDinStep<<<blocks, threads>>>()$ рассчитывает значения консервативных, а затем примитивных переменных на каждом шаге по времени.

4. Скопировать полученные данные обратно в CPU. Пример: газодинамические параметры (r,p,u,v) копируем на CPU

```
cudaMemcpy(r, rn_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyDeviceToHost);  
cudaMemcpy(p, pn_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyDeviceToHost);  
cudaMemcpy(u, un_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyDeviceToHost);  
cudaMemcpy(v, vn_dev, (ntri_new_m[0])*sizeof(float), cudaMemcpyDeviceToHost);
```

5. Освободить память GPU.

```
cudaFree(r_dev);  
cudaFree(p_dev);  
cudaFree(u_dev);  
cudaFree(v_dev);
```

где единственным параметром функции является указатель освобождаемой памяти.

3. Вычислительный эксперимент. Большой интерес с практической точки зрения представляет задача взаимодействия ударной волны с зоной турбулентного перемешивания. Такие виды задач являются хорошими тестовыми примерами для проверки различных алгоритмов, методов и программ. На практике такие задачи позволяют изучить ход образования вихрей при контактном взаимодействии нескольких газов с разными плотностями и уравнениями состояний [6].

Выполнено численное исследование динамики развития газодинамической неустойчивости в контактной границе элегаз-воздух для условий эксперимента на ударной трубе [7]. Параметры ударной трубы следующие: длина равна 0,4 м, а ширина равна 0,04 м. Труба разделена на три области:

1. область длиной 0,08 м, заполнена элегазом с высоким давлением (SF_6_HI);
2. область длиной 0,02 м, заполнена элегазом с низким давлением (SF_6_LO);
3. область длиной 0,03 м, заполнена воздухом (AIR).

В качестве расчетных данных была принята следующая физическая постановка задачи: начальная температура 291 К в камере низкого давления давление составляет 10^{-4}

ГПа = 1 бар. Непосредственно за ударной волной в элегазе давление составляет 2,152 бар, плотность – $1,209 \cdot 10^{-2}$ г/см³, скорость ударной волны – 195,2 м/с, скорость течения за ударной волной – 97,76 м/с. Начальные плотности элегаза и воздуха в камере низкого давления равны $6,037 \cdot 10^{-3}$ и $1,198 \cdot 10^{-3}$ г/см³ соответственно. Физические свойства элегаза и воздуха следующие: оба вещества являются невязкими, нетеплопроводными и идеальными газами с показателями адиабаты $\gamma = 1,094$ (SF_6) и $\gamma = 1.4$ (воздух), отношение молекулярных масс (SF_6 /воздух) принято равным 5,04.

Необходимо смоделировать развитие неустойчивости при многократном прохождении ударной волны через контактный разрыв.

На рисунке 1 приведен график плотности в начальный момент времени. На рисунках 2 и 3 представлены изменения плотности при первом и повторном прохождении ударной волны через контактную границу.

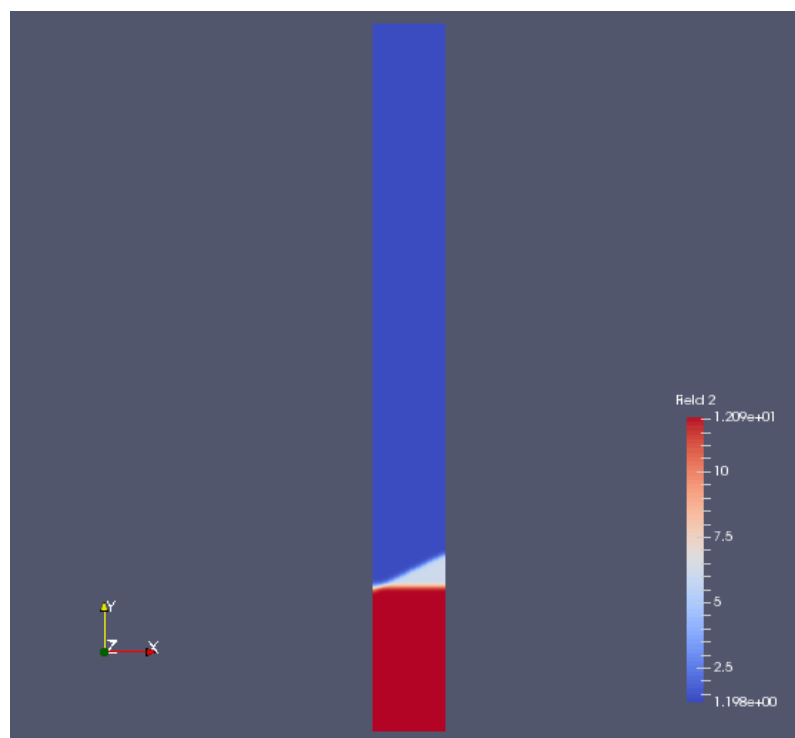


Рис. 1. Изменение плотности в начальный момент времени.

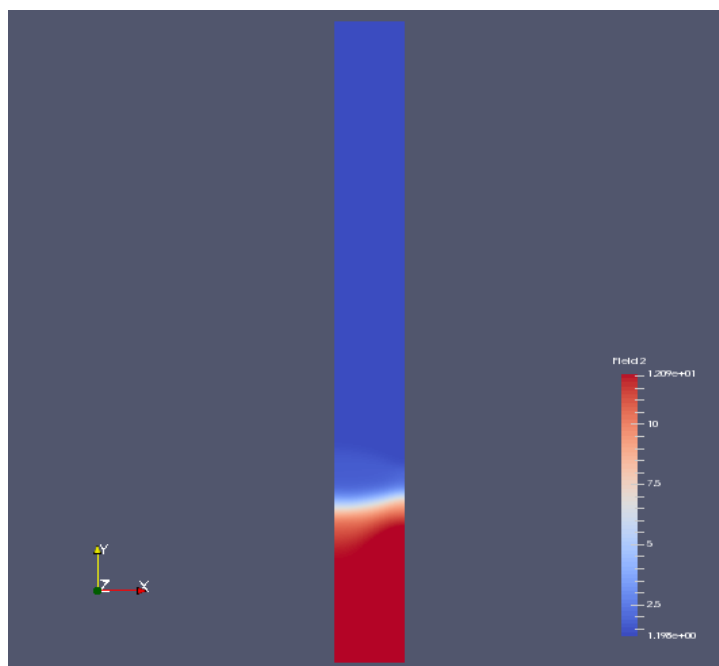


Рис. 2. Изменение плотности при первом прохождении ударной волны через контактную границу.

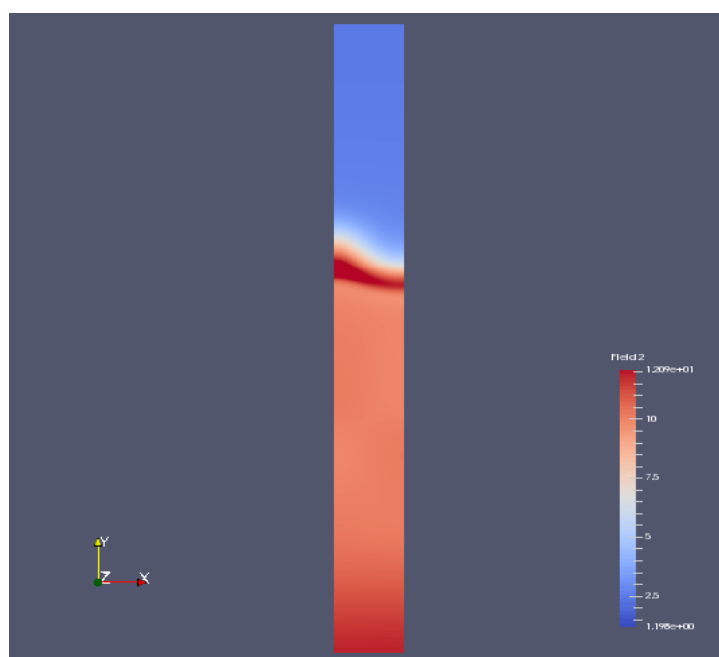


Рис. 3. Изменение плотности при втором прохождении ударной волны через контактную границу.

Заключение. Разностная схема и программа расчета были протестированы на задаче с известными экспериментальными данными [7]. Результаты численных расчетов показали соответствие теоретическим предположениям и экспериментальным данным. Таким образом, проведенное тестирование предложенной схемы и программы моделирования

гидродинамических течений показывает, что данную схему можно использовать при решении задач нестационарной газовой динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. NVIDIA CUDA. Programming Guide [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://developer.nvidia.com/cuda-toolkit-40>.
2. Kurganov A., Chi-Tien L. On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes // Commun. Comput. Phys. February. – 2007. – Vol. 2, No. 1. – pp. 141–163.
3. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма высокого порядка точности для гиперболических систем уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, № 1. – С. 145–153.
4. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 10. – С. 61–66.
5. Ладонкина М. Е. Численное моделирование турбулентного перемешивания с использованием высокопроизводительных систем: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 2005. – 157 с.
6. Lebo I. G., Nikishin V. V., Rozanov V. B., Tishkin V. F. On the development of instability near the contact boundary between two equal-density gases in passage of a shock wave // Bulletin of the Lebedev Physics Institute (Kratkie Soobsheniya po Fizike). – New York: Allerton Press, Inc, 1997.
7. Poggi F., Thorembe M.-H., Rodriguez G. Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer-Meshkov instability // Physics of Fluids. – 1998. – Vol. 10, No. 11. – P. 2698–2700.

СТЕНИН И. В., ШАМАНАЕВ П. А.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Аннотация. В статье описан алгоритм решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений большой размерности специального вида с использованием метода сопряженных градиентов. Приведены результаты вычислительного эксперимента при различных значениях входных данных.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений большой размерности, разреженная матрица, метод сопряженных градиентов, пространства Крылова, биортогонализация Ланцоша.

STENIN I. V., SHAMANAEV P. A.

ALGORITHM OF SOLVING A SPARSE SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC
EQUATIONS OF LARGE DIMENSION BY CONJUGATE GRADIENT METHOD

Abstract. The algorithm of solving sparse systems of linear algebraic equations of large dimension of a special type by using of the conjugate gradient method is described. The results of a computational experiment for different values of the input data are presented.

Keywords: system of linear algebraic equations of large dimension, sparse matrix, conjugate gradient method, Krylov spaces, Lanczos biorthogonalization.

При решении задач идентификации параметров динамических систем по экспериментальным данным [1–3] возникает необходимость решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений большой размерности специального вида.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$My = d, \quad (1)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} H & T^T & A^T \\ T & O & O \\ A & O & O \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} s \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

$s, d_1 \in R^{2N+4}$, $\mu, d_2 \in R^2$, $\lambda, d_3 \in R^{2(N-1)}$, O – нулевые матрицы соответствующих размеров,

$$H = \begin{pmatrix} & & & & & B_{1,\theta} \\ & & & & & B_{2,\theta} \\ & & \frac{1}{N} I_{2N} & & & \vdots \\ & & & & & B_{N-1,\theta} \\ & & & & & B_{N,\theta} \\ B_{\theta,1} & B_{\theta,2} & \dots & B_{\theta,N-1} & B_{\theta,N} & B_{\theta,\theta} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} B_{\theta,i} &= B_{i,\theta}^T, \\ B_{i,\theta} &= O_{2 \times 4}, \\ i &= \overline{1, N}, \\ B_{\theta,\theta} &= O_4. \end{aligned}$$

I_{2N} — единичная $(2N \times 2N)$ -матрица, O_4 — нулевая (4×4) -матрица, $O_{2N \times 4}$ — нулевая $(2N \times (2N + 4))$ -матрица,

$$T = [T_1, T_2, \dots, T_N, T_\theta],$$

T_1 — единичная (2×2) -матрица, T_i ($i = \overline{2, N}$) — нулевые (2×2) -матрицы, T_θ — нулевая (2×4) -матрица,

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & K_1 & & & E_1 \\ & D_2 & K_2 & & E_2 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & D_{N-1} & K_{N-1} & E_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\tau}{2} \theta_1 & \frac{\tau}{2} \theta_2 \\ \frac{\tau}{2} \theta_3 & 1 + \frac{\tau}{2} \theta_4 \end{pmatrix}, \quad K_i = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{\tau}{2} \theta_1\right) & \frac{\tau}{2} \theta_2 \\ \frac{\tau}{2} \theta_3 & -\left(1 - \frac{\tau}{2} \theta_4\right) \end{pmatrix}, \quad \theta_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, 4},$$

$$E_i = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2}(x_{i,1} + x_{i+1,1}) & \frac{\tau}{2}(x_{i,2} + x_{i+1,2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{2}(x_{i,1} + x_{i+1,1}) & \frac{\tau}{2}(x_{i,2} + x_{i+1,2}) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Компоненты вектора d вычисляются по формулам

$$d_1 = -H_2(z - \tilde{z}), \quad d_2 = h - Tz, \quad d_3 = -g(z),$$

$$g(z) = \text{column}(g_1(z), \dots, g_{N-1}(z)), \quad g_i(z) = \text{column}(g_{i,1}(z), g_{i,2}(z)), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

$$z = \text{column}(\mathbf{x}_N, \theta) \in \mathbb{R}^{2N+4}, \quad \tilde{z} = \text{column}(\mathbf{x}_N, O_4) \in \mathbb{R}^{2N+4}, \quad H_2 = \frac{1}{N} H_1^T H_1,$$

$$\mathbf{x}_N = \text{column}(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{2N}, \quad x_i = \text{column}(x_{i,1}, x_{i,2}) \in \mathbb{R}^2, \quad i = \overline{1, N},$$

$$g_{i,1}(z) \equiv g_{i,1}(\mathbf{x}_N, \theta) = \left(1 + \frac{\tau}{2} \theta_1\right) x_{i,1} + \frac{\tau}{2} \theta_2 x_{i,2} - \left(1 - \frac{\tau}{2} \theta_1\right) x_{i+1,1} + \frac{\tau}{2} \theta_2 x_{i+1,2}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$g_{i,2}(z) \equiv g_{i,1}(\mathbf{x}_N, \theta) = \frac{\tau}{2} \theta_3 x_{i,1} + \left(1 + \frac{\tau}{2} \theta_4\right) x_{i,2} + \frac{\tau}{2} \theta_3 x_{i+1,1} - \left(1 - \frac{\tau}{2} \theta_4\right) x_{i+1,2}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

Для приближенного нахождения решения системы (1) использовался метод сопряженных градиентов. Приведем алгоритм метода сопряженных градиентов [4] для системы (1):

1. Выберем начальное приближение $y^{(0)}$.
2. $r^{(0)} := d - My^{(0)}$, $p^{(0)} := r^{(0)}$, $j := 1$.
3. Вычислим коэффициент $\alpha_j := (r^{(j)}, r^{(j)}) / (Mp^{(j)}, p^{(j)})$.
4. Найдем следующее приближение $y^{(j+1)} := y^{(j)} + \alpha_j p^{(j)}$.
5. Вычислим поправку к решению $r^{(j+1)} := r^{(j)} - \alpha_j Mp^{(j)}$.
6. Найдем коэффициент $\beta_j := (r^{(j+1)}, r^{(j+1)}) / (r^{(j)}, r^{(j)})$.
7. Если $\|r^{(j+1)}\| < \varepsilon$, то алгоритм завершается.
8. Вычислим вектор, вдоль которого вычисляется поправка $p^{(j+1)} := r^{(j+1)} + \beta_j p^{(j)}$.
9. $j := j + 1$.
10. Перейдем к пункту 3.

На основании приведенного алгоритма разработано программное обеспечение на языке C#. Структура программного обеспечения имеет вид

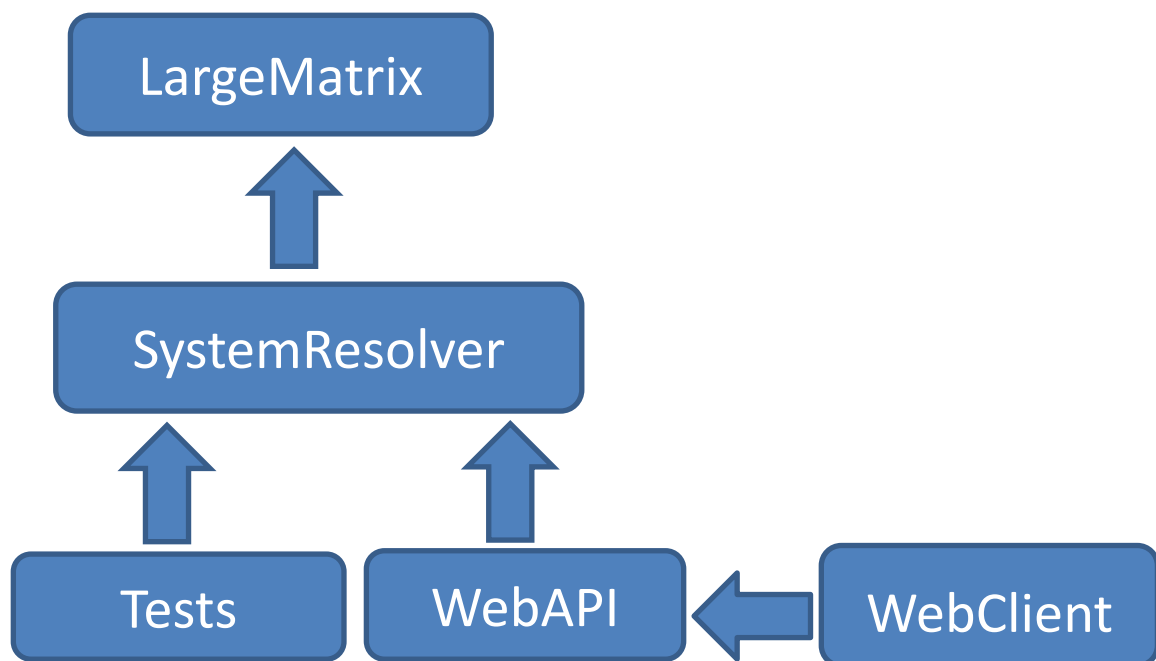


Рис. 1. Структура программного обеспечения.

Опишем модули программного обеспечения.

LargeMatrix – библиотека, содержащая классы разреженной матрицы, плотного вектора и плотной матрицы, а также классов, отвечающих за построение системы уравнений заданного вида.

Tests – модульные тесты, покрывающие библиотеку LargeMatrix, а также метод решения СЛАУ.

SystemResolver – основной проект, содержащий алгоритм решения разреженной системы методом сопряженных градиентов.

WebAPI – API на ASP.NET, позволяющий делать запрос к серверу на получение данных решения.

WebClient – клиентское приложение, получающее и отображающее данные решения в браузере.

Для хранения разреженной матрицы использовался разреженный строчный формат (Compressed sparse row), который предполагает наличие трех одномерных массивов.

- Массив, содержащий все ненулевые элементы матрицы.
- Массив, содержащий номера столбцов для соответствующих элементов.
- Массив индексов элементов, с которых начинается описание строки.

Вычислительный эксперимент проводился при следующих начальных данных:

$$N = 10, \theta_1 = -1, \theta_2 = 1, \theta_3 = -0.5, \theta_4 = 0.5, h = \text{column}(100, 150).$$

Значения $x_{i,1}$ и $x_{i,2}$ ($i = \overline{1, 10}$) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения $x_{i,1}$ и $x_{i,2}$, $i = \overline{1, 10}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{i,1}$	110	190	200	333	355	383	400	415	420	445
$x_{i,2}$	151	163	175	204	222	244	266	333	355	380

Результаты вычислительного эксперимента при различных значениях погрешности вычислений ε и параметра τ приведены в таблице 2.

Таблица 2

Количество итераций и время вычислений при различных ε и τ

Погрешность, ε	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.01$
0.1	32 0,003185 сек.	27 0,003003 сек.	25 0,002839 сек.	24 0,003031 сек.
0.01	33 0,003587 сек.	27 0,003042 сек.	25 0,003219 сек.	24 0,003095 сек.
0.001	33 0,004341 сек.	30 0,003109 сек.	30 0,003307 сек.	24 0,003372 сек.

Анализ таблицы 2 показывает, что при уменьшении параметра τ количество итераций, требуемых для достижения заданной точности ε , уменьшается, и, следовательно, скорость сходимости итерационного метода увеличивается. Вместе с тем, при фиксированном значении параметра τ и уменьшении погрешности вычислений ε время вычислений и количество итераций увеличивается незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атряхин В. А., Челышов М. С., Шаманаев П. А. Применение метода ортогональной циклической редукции для решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицами специального вида [Электронный ресурс]// Огарев-online. Раздел "Физико-математические науки". – 2014. – № 19. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/primenenie-metoda-ortogonalnojj-ciklicheskojj-redukicii-dlya-resheniya-sistem-linejjnykh-algebraicheskikh-uravnenijj-s-matricami-specialnogo-vida>.
2. Челышов М. С., Шаманаев П. А. Идентификация параметров динамических систем на основе экспериментальных данных // Актуальные вопросы прикладной математики и информатики: сб. науч. тр. – Саранск: СВМО, 2015. – С. 39–42.
3. Zhengfeng Li, Michael R. Osborne, Tania Prvan Parameter estimation of ordinary differential equations // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2005. – No. 25. – pp. 264–285.
4. Баландин М. Ю., Шурина Э. П. Методы решения СЛАУ большой размерности. – Новосибирск: НГТУ, 2000. – 70 с.